

2 vol

9—

PHILOSOPHIÆ NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

AUCTORE

ISAACO NEWTONO, Eq. Aur.

PERPETUIS COMMENTARIIS ILLUSTRATA,

COMMUNI STUDIO

PP. THOMÆ LE SEUR ET FRANCISCI JACQUIER,

EX GALLICANA MINIMORUM FAMILIA, MATH. PROFF.

EDITIO NOVA, SUMMA CURA RECENSITA.

VOL. II.

GLASGUÆ:

EXCUDIT GEORGIUS BROOKMAN;

IMPENSIS T. T. ET J. TEGG, LONDINI;

ET R. GRIFFIN ET SOC., GLASGUÆ.

MDCCCXXXIII.

SERENISSIMO PRINCIPI

ARMANDO GASTONI

DE ROHAN DE SOUBISE

S. R. E. CARDINALI AMPLISSIMO

EPISCOPO ET PRINCIPI ARGENTINO

COMMENTARIUM PERPETUUM IN HUNC

CELEBERR. IS. NEWTONI TRACTATUM

D. D. D.

THOMAS LE SEUR ET FRANCISCUS JACQUIER.

MONITUM.

Principiorum Mathematicorum Libros tres totidem Voluminibus complecti meditabamur, idque jam in alterâ operis nostri parte fueramus polliciti. Cur tertium Newtoni Librum in duas dividamus partes datamque fidem non liberemus, in causâ sunt præclara de Fluxu et Refluxu Maris Opera quæ anno 1740. a celeberrimâ Parisiensi Academiâ præmio fuêre condecorata. Tot et tam eximia in hisce operibus continentur, quæ non ad fluxum refluxumque maris duntaxat, sed etiam ad generales attractionis leges universamque astronomiam referuntur, ut clariss. Vir D. J. L. Calandrinus cujus consilia impensè veneramur, nos optimè facturos judicaverit, si prædicta Opuscula iis adjungeremus Propositionibus quas de fluxu et refluxu maris habet Newtonus; quod quidem commodè fieri non poterat, nisi tertium Librum in duas partes divideremus. Quamvis eam religiosè servemus legem, sine quâ honestus scriptor nemo esse potest, ut scilicet nihil insigne ex aliquo autore in usum nostrum convertamus, quin ei quod suum est, dùm locus occurrit, tribuatur, specialem nihilominùs grati animi significationem profiteri volumus clarissimis omnique laude nostrâ majoribus viris DD. Cassini, de Mairan, de Maupertuis, quorum præclaris inventis plurimùm debent hæc nostra Commentaria. Sed tanta sunt in universum hocce nostrum Opus prælaudati clariss. D. J. L. Calandrini beneficia, ut huic doctissimo viro pares meritis gratias referre non possimus.

Jam sub prælo est altera et ultima Commentariorum nostrorum Pars; quia verò nullus est tam mediocris ingenii, quem usus et exercitatio non edoceant, hinc factum est ut aliqua nobis in mentem venerint quæ brevi collecta appendice simul cum reliquâ tertii Libri parte justi voluminis molem component.

Datum Romæ
in Con^{tu}. SS^{æ}. Trinitatis anno 1742.

PP. LE SEUR ET JACQUIER

DECLARATIO.

NEWTONUS in hoc tertio Libro Telluris motæ hypothesim assumit. Autoris Propositiones aliter explicari non poterant, nisi eâdem quoquè factâ hypothesi. Hinc alienam coacti sumus gerere personam. Cæterum latis a summis Pontificibus contrà Telluris motum Decretis nos obsequi profitemur.

EDITORIS MONITUM.

INTELLEXIMUS quosdam malignè interpretari notulas quas adjecimus Commentariis P P. Le Seur et Jacquier, quasi sæpius Newtoni mentem non attigissent; ne autem ipsis vitio vertatur quod concesserunt ob ipsorum absentiam ab urbe in quâ liber edebatur, ut nempe quæcumque viderentur corrigenda, ab Editore ipso mutarentur, sive levia sive gravia forent, monendum puto, me Autorum deligentiam et doctrinam nusquam desiderasse, correctiones quas feci levissimi esse momenti, nec esse tales ut propter ipsas quidquam ex debitâ Autoribus gloriâ tollatur quod meæ opellæ tribuatur, et asterisco notatas fuisse, non quod aliquid laudis exinde speraverim, sed quia si illic aliquid vitii irrepserit, æquum est ut in Editorem, non in Autores ea culpa transferatur; ne similibus cavillationibus occasio in posterum detur, tales distinctionis notulæ non adhibebuntur in secundâ hujus Voluminis parte, in quâ speramus calculos NEWTONIANOS circa Lunam potissimum satis intricatos, in apertam lucem expositum iri.

CONTENTA

PARTIS PRIMÆ TOMI SECUNDI.

CONTENTA.

CONTENTA

PARTIS PRIMÆ TOMI SECUNDI.

INTRODUCTIO

AD

TERTIUM LIBRUM

PHILOSOPHIÆ NATURALIS

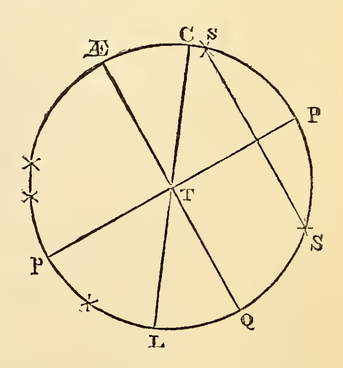
IS. NEWTONI.

CAPUT PRIMUM.

Quale oculo nudo appareat mundi systema paucis exponitur, et prima Astronomiæ Elementa breviter revocantur.

1. Figura telluris est propemodùm sphærica, et ideò gravium directio (ut pote quæ aquarum stagnantium superficiei perpendicularis est) ad centrum terræ tendit quam proximè. Patet per Eclipses Lunares in quibus umbra terrestris, in quamcumque cœli plagam vergat, est semper ad sensum circularis.

2. Spectatori terrestri cœlum apparet tanquam superficies sphærica concava, stellis plurimis distincta, cujus ipse spectator centrum occupat, quæque circà puncta fixa ceù cardines ab ortu ad occasum æquabiliter convertitur, et 24 circiter horis integram revolutionem absolvit. Puncta illa opposita P et p circà quæ rotari videtur sphæra, *poli mundi* dicuntur, quorum is qui nobis conspicuus est, ut P, arcticus vel borealis dicitur, ipsi verò oppositus p antarcticus seu australis appellatur. Recta linea P p utrumque polum connectens *axis mundi* vocatur.

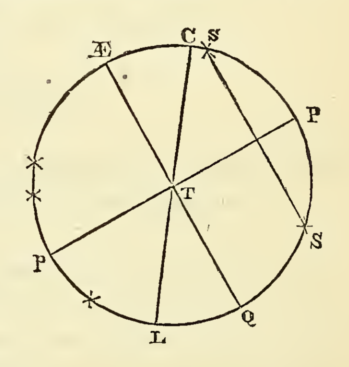


Æquator sivè *æquinoctialis* est circulus sphæræ cœlestis maximus cujus poli iidem sunt cum polis mundi; proindéque sphæram mundanam dividit

in duo hemisphæria, boreale Æ P Q, in quo est polus borealis P; et australe Æ p Q, in quo est polus australis p.

3. Stellæ singulæ, ut S, in circulis S S æquatori Æ Q parallelis, communi sphæræ cœlestis motu revolvi quotidie videntur. *Fixæ* nominantur quæ eandem inter sese distantiam perpetuò servant; *erraticæ* verò seu *planetæ* vocantur quæ distantias suas a fixis in dies mutant et motu proprio ferri conspiciuntur. Planetæ sunt septem suis propriis signis notati, videlicet Sol ☉, Luna ☽, Mercurius ☿, Venus ♀, Mars ♂, Jupiter ♃ et Saturnus ♄; Terræ verò signum est hoc ♁.

4. *Ecliptica* est circulus sphæræ maximus quem centrum Solis motu proprio ab occasu ad ortum singulis annis describere videtur. Hic circulus æquatorem obliquè intersecat sub angulo inclinationis Æ T C, graduum $23\frac{1}{2}$ circiter. Puncta duo opposita in quibus æquator et ecliptica sese mutuò secant, *æquinoctialia* dicuntur quod Sole in iis posito dies ubique terrarum nocti æqualis sit, et indè tempus quo Sol punctum alterutrum æquinoctiale attingit, vocatur æquinoctium. Punctum æquinoctiale vernale est undè Sol motu proprio versùs polum borealem ascendit in eclipticâ, autumnale verò undè Sol versùs polum australem descendit, ideóque æquinoctium est vernale vel autumnale. Puncta *solstitialia* sunt eclipticæ puncta duo opposita quæ a punctis æquinoctialibus toto circuli quadrante distant, quæque proindè maximè recedunt ab æquatore et in quibus ascensus Solis suprà æquatorem et descensus infrà eundem terminatur. Horum punctorum prius æstivum appellatur quo nimirum terminatur Solis ascensus suprà æquatorem; posterius brumale vel hybernum. Dicuntur solstitialia quod Sole in iis versante, per aliquot dies ex eodem horizontis puncto oriri, et e regione, in eodem puncto occidere videatur. Tempus quo Sol puncta solstitialia ingreditur, vocatur solstitium, quod ideò vel æstivum vel brumale est.



Signum cœleste est duodecima pars eclipticæ et in 30 gradus rursus dividitur. Primi signi principium est in puncto æquinoctiali vernali a quo signa ab occasu in ortum juxtà motum proprium Solis numerantur. Sex sunt borealia per borealem eclipticæ partem distributa, hisque nominibus ac characteribus designata: Aries ♈, Taurus ♉, Gemini ♊,

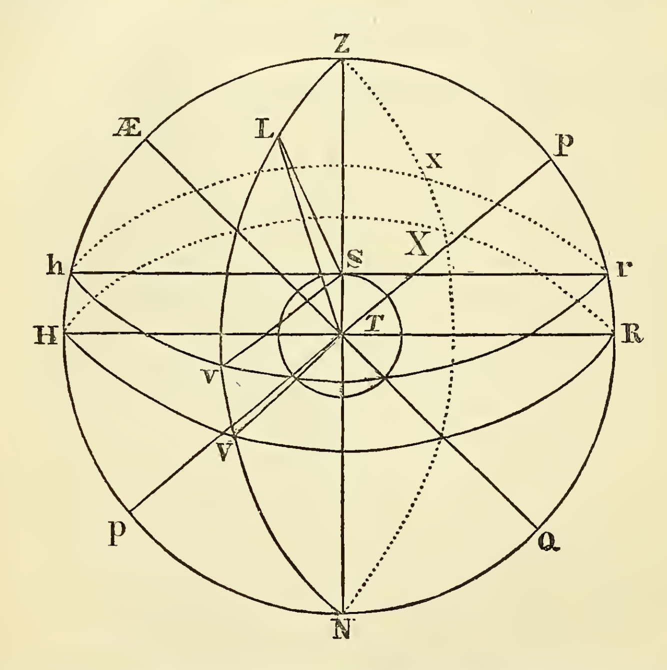
Cancer ♋, Leo ♌, Virgo ♍. Sex etiam australia videlicet Libra ♎, Scorpius ♏, Sagittarius ♐, Capricornus ♑ vel ♑, Aquarius ♒, Pisces ♓. Aries, Taurus ac Gemini, quæ inter punctum æquinoctiale vernum et punctum solstitiale æstivum continentur dicuntur, signa vernalia; Cancer, Leo, Virgo a solstitiali æstivo ad æquinoctiale autumnale numerata apellantur æstiva; Libra, Scorpius et Sagittarius autumnalia; Capricornus, Aquarius et Pisces, hyberna. Signa ascendentia a puncto solstitiali hyberno ad æstivum, descendentia verò a solstitiali æstivo ad hybernum computantur.

5. *Zodiacus* est sphæræ cœlestis portio seu zona duobus circulis eclipticæ parallelis et gradibus 8 vel 9 hinc indè ab eclipticâ distantibus terminata, sub quâ planetæ omnes motus suos absolvunt. Dum planeta ab occasu in ortum seu secundum ordinem signorum, aut quod idem sonat, in signa consequentia nimirùm ab Ariete ad Taurum, a Tauro ad Geminos, &c., motu proprio fertur, ille planeta tunc temporis directus vocatur; cùm ipsius motus proprius cessare videtur, seu dum planeta in eodem cœli puncto morari per aliquot dies cernitur, eumdem situm fixarum respectu servans, stationarius dicitur; retrogradus tandem appellatur ubi contrà signorum ordinem seu in antecedentia, ut a Tauro ad Arietem, ab Ariete ad Pisces, &c. proprio motu incedit.

6. Luna et Sol sunt semper directi; at cæteri planetæ tum superiores, videlicet, Saturnus, Jupiter et Mars, tum inferiores, nimirum, Venus et Mercurius, directi deindè stationarii et posteà retrogradi videntur. Eorum tempora periodica quibus totum zodiacum in consequentia peragrant, sunt inæqualia. Nam Saturnus 30 circiter annis periodum suam absolvit; Jupiter annis circiter 12, Mars annis duobus ferè, Luna diebus 27 et horis 7 circiter, Venus autem et Mercurius cum Sole anno uno. Nam hi duo planetæ Solem ità constanter comitantur ut Venus nunquam ultrà 47 circiter gradus, nec Mercurius ultrà 28 a Sole digrediatur, id est, angulus maximus sub quo distantia Veneris aut Mercurii a Sole e Terrâ conspicitur, gradus 47 vel 28 nunquam superat.

7. *Circuli declinationis*, seu *circuli horarii*, sunt circuli maximi per mundi polos transeuntes et proindè æquatori perpendiculares. Sideris vel puncti cujuslibet in sphærâ mundanâ *declinatio* est arcus circuli declinationis inter sidus vel datum punctum et æquatorem interceptus. *Ascensio recta* sideris est arcus æquatoris inter punctum æquinoctiale vernum et circulum declinationis sideris illius comprehensus ac secundum ordinem signorum numeratus. *Circuli latitudinis* siderum sunt cir-

culi sphæræ maximi per polos eclipticæ et per sidera transeuntes, atquè ideò eclipticæ perpendiculares. Hinc *latitudo* sideris est arcus circuli latitudinis inter sidus et eclipticam interceptus. *Longitudo* sideris est arcus eclipticæ ab Arietis initio versùs ortum seu in consequentia usquè ad latitudinis circulum numeratus. Punctum intersectionis eclipticæ cum circulo latitudinis sideris dicitur locus sideris, eclipticus, sive locus in eclipticâ, vel locus ad eclipticam reductus.



8. Si per locum quemvis S in superficie terræ ducatur per terræ centrum T linea recta Z S N quæ sphæræ cœlesti occurrat in Z et N, punctum Z dicitur loci S *zenith* seu vertex, et punctum N vocatur ejusdem loci *nadir*. *Horizon sensibilis* seu apparens loci S, est sphæræ circulus h v r x centrum habens in S, et polos in Z et N. *Horizon rationalis* seu verus est circulus H V R X, centrum habens in T, et polos in Z et N, ideóque horizonti sensibili parallelus.

Circulus verticalis est circulus quilibet maximus Z V N X per zenith atquè nadir et per aliud quodcumque punctum in sphærâ mundanâ transiens, ideóque horizonti perpendicularis.

Meridianus est circulus verticalis P Z N R per polos mundi P et p transiens, ac proindè æquatori perpendicularis et circulos omnes æqua-

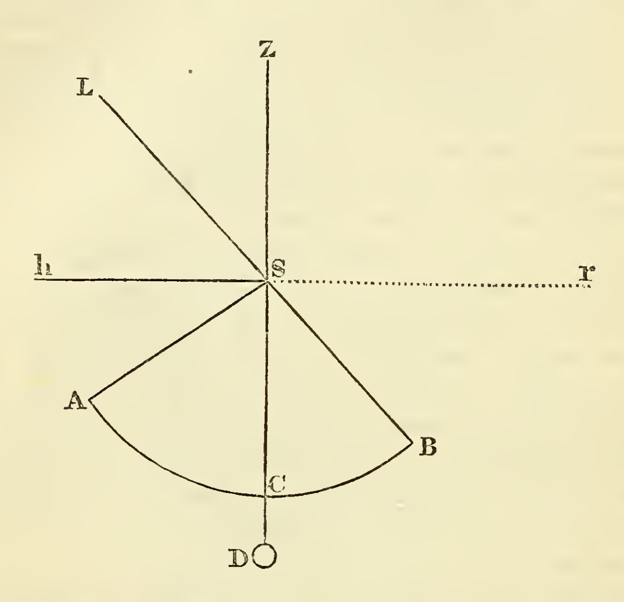
tori parallelos bifariam dividens. Intersectio plani meridiani cum plano horizontis H R vel h r dicitur *linea meridiana.* Circulus *verticalis primarius* est ille verticalis qui per polos meridiani transit. Sit Z V N X verticalis primarius horizontem rationalem H V R X intersecans in V et X, quem meridianus etiam secat in H et R. Puncta quatuor R, X, H, V, dicuntur *cardines mundi;* punctum quidem R in hemispherio boreali cardo *septentrionis,* H cardo *meridiei,* V ad partes orientis cardo *orientis* et punctum oppositum X cardo *occidentis.*

9. Distantia horizontis apparentis ab horizonte vero sivè telluris semidiameter S T, sensibilis non est, si conferatur cum stellarum (Lunâ ferè solâ exceptâ) distantiis, et ideò terra respectu sphæræ stellarum tanquam punctum, et quilibet terræ locus tanquam hujus sphæræ centrum considerari potest. Nam omnes ferè Astronomorum observationes id supponunt et computa indè inita cum phænomenis cœlestibus quadrant. Porrò quemadmodum singula terræ loca pro centro sphæræ stellarum usurpari potest, ità fingi potest in spatiis cœlestibus sphærica superficies cujus tanta sit diameter ut illius respectu evanescat Solis vel stellæ datæ a Tellure distantia, et hujus sphæræ centrum poterit collocari indifferenter vel in terrâ vel in sole aut in spatio intermedio.

10. *Altitudo poli P suprà horizontem* est meridiani arcus P R a polo ad horizontem interceptus. Ea semper æqualis est arcui Z Æ a vertice Z ad æquatorem Æ Q intercepto; Nam si ex circuli quadrantibus Z P R et Æ Z P subducatur arcus communis Z P, remanebunt arcus æquales Æ Z et P R. *Altitudo æquatoris suprà horizontem* est arcus meridiani Æ H, inter æquatorem et horizontem interceptus; æqualis est complemento altitudinis poli seu arcui Z P, quod, ablato ex quadrantibus H Æ Z et Æ Z P communi arcu Æ Z manifestum est. *Altitudo apparens* sideris vel puncti cujuslibet L in sphærâ mundanâ, est angulus L S v, sub quo ex centro S horizontis sensibilis videtur arcus L v circuli verticalis per L ducti usquè ad horizontem sensibilem h v r x. Altitudo vera puncti L est angulus L T V, seu ipsius mensura arcus L V in circulo verticali per L ducto usquè ad horizontem rationalem H V R X. Undè (9) stellarum fixarum et Solis altitudines apparentes et veræ coincidunt.

11. Jam verò quâ ratione phænomena quæ suprà retulimus, et alia quæ deinceps referemus, observari potuerint, paucis exponemus; et quidem ab observatione altitudinis apparentis siderum quæ præcipuum totius Astronomiæ fundamentum est, initium ducemus. Circuli quadrans

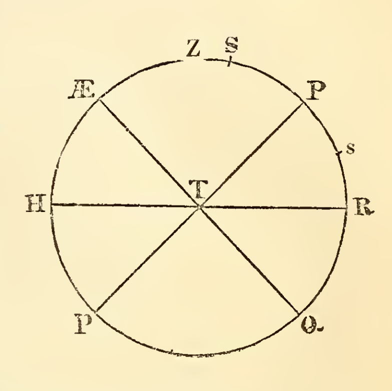
S A B cujus limbus A C B in gradus et minuta divisus est ità statuitur ut filum S C D pondere D tensum ideóque verticale, limbum illius tangat, deindè ità vertitur ut sidus L cujus altitudo observanda est, per diop-



tras aut per telescopium lateri S B affixum videatur in eodem latere S B producto. Quo facto, habetur arcus A C, mensura altitudinis apparentis L S h; nam cùm filum e quadrantis centro S, pendens sit semper in plano verticali, quadrans A S B erit etiam in eodem plano, (Eucl. 18. XI.) ideóque h r ad S D perpendicularis, erit intersectio horizontis sensibilis et plani verticalis per L ducti, atquè angulus L S h sideris L altitudo apparens. Sed si ab angulis rectis L S A, et h S D, subducatur communis h S A, remanent æquales anguli L S h et A S C; hujus verò mensura est arcus A C.

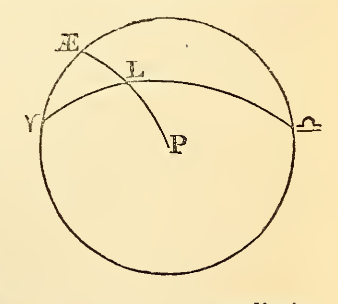
12. Hinc describi potest linea meridiana suprà quam si statuitur perpendiculariter quadrans circuli, observari poterit altitudo meridiana sideris. Nam meridianus portiones illas circulorum æquatori parallelorum, quæ supra horizontem eminent et qui arcus diurni dicuntur, bifariam secat (per El. XI. 19. et 4., et El. III. 30.) cùm sit illis circulis et horizonti eos arcus terminanti perpendicularis, et propterea si in circulo quolibet diurno sumantur puncta duo hinc indè orientem et occidentem versùs a meridiano æquidistantia, ea puncta erunt supra horizontem sensibilem æquè alta, et contrà si æquè alta sint, a meridiano hinc indè æqui-

distabunt. Quarè si stellæ fixæ meridiano vicinæ altitudo observetur versùs orientem, et deindè quadrans circà filum verticale immotum ceù circa axem convertatur versùs occidentem et expectetur donec stella eandem altitudinem habeat, recta quæ bifariam dividet angulum inter duas quadrantis cum horizonte intersectiones comprehensum, erit linea meridiana.



13. Datis per observationes duabus ejusdem stellæ nunquam occidentis altitudinibus meridianis S R, s R, dantur poli P et æquatoris Æ Q altitudines P R et Æ H supra horizontem H R. Nam datis arcubus S R et s R datur eorum differentia S s; et quia stella S circulum describit æquatori parallelum (3) cujus P est polus, erit S P = s P; undè datur P s, cui si addatur s R, habebitur arcus P R altitudo poli. Est autem H Æ æqualis arcui Z P seu complemento altitudinis poli ad rectum (10), datur ergò H Æ altitudo æquatoris.

14. Datâ stellæ S altitudine meridianâ S R cum æquatoris vel poli altitudine, datur illius declinatio S Æ; est enim arcus S Æ æqualis differentiæ arcuum Æ P R et S R. Sic observando quotidiè altitudinem meridianam centri Solis et indè eruendo ipsius declinationem, determinatum est planum eclipticæ et ejus ad æquatorem inclinatio seu maxima ab æquatore declinatio quæ inventa est $23\frac{1}{2}$ grad. aut verius 23°. 29′. Datâ autem inclinatione eclipticæ ad æquatorem cum solis declinatione, datur ascensio recta Solis ac longitudo. Sit enim P polus mundi, ♈ Æ ♎ æquator, ♈ L ♎ ecliptica, et P L Æ, circuli quadrans æquatori perpendicularis in Æ, et datis in triangulo sphærico Æ ♈ L rectangulo in Æ, latere seu declinatione Solis L Æ, et angulo Æ ♈ L, 23° 29′, dantur latus ♈ Æ ascensio recta solis, seu puncti L, et latus ♈ L quod est ejusdem longitudo, imò datur etiam angulus Æ L ♈, quem circulus declinationis efficit cum eclipticâ; Cùm verò præter angulum Æ ♈ L, data fuerit longitudo ♈ L, dabitur tum ♈ Æ ascensio recta, tum Æ L, declinatio.



15. Si quotidie observetur meridiana Solis altitudo, atquè indè eruantur ipsius declinatio, ascensio recta et longitudo, dabuntur motus Solis in eclipticâ, motus puncti declinationis in æquatore et temporis momenta quibus declinatio vel nulla est vel maxima, seu dabuntur æquinoctiorum et solstitiorum momenta (4). Porrò observatum est nec longitudinem nec ascensionem rectam Solis uniformiter crescere et proindè dies solares esse inæquales. Nam dies solaris est tempus unius revolutionis diurnæ Solis a meridiano ad eundem meridianum; dies sidereus seu primi mobilis (qui semper idem manet) est tempus revolutionis diurnæ stellæ fixæ a meridiano ad eumdem. Undè cùm Sol motu proprio ab occasu in ortum feratur, si stella fixa et Sol in eodem meridiano simul observentur, stella ad eumdem meridianum priùs redibit quam Sol qui motu proprio versùs orientem tendit. Attamen si ascensio recta Solis ex ipsius motu proprio in eclipticâ uniformiter cresceret, dies solares, licet diebus sidereis longiores, essent tamen inter se æquales; Quarè cùm Solis ascensio recta non augeatur uniformiter, necesse est ut dies solares inæquales sint. Simili modo collatis inter sese æquinoctiorum et solstitiorum observationibus deprehensum est Solem intervallo 8 ferè dierum diutiùs morari in signis borealibus quam in signis australibus; ac tandem comparando antiquas observationes ad determinandum momenta æquinoctiorum vel solstitiorum cum recentioribus, definita est quantitas anni æquinoctialis, sivè tempus quo Sol motu proprio ab uno æquinoctio ad idem æquinoctium, vel ab uno solstitio ad idem solstitium progreditur et ab authoribus Calendarii Gregoriani Lahirio, Cassino et Blanchinio inventa est $365^{\text{dier.}}\ 5^{\text{hor.}}\ 49'$.

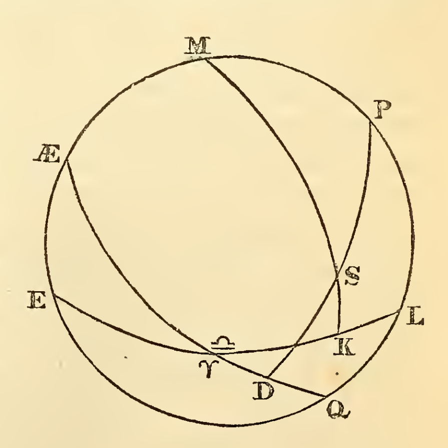
16. Datâ quantitate anni æquinoctialis, datur motus Solis medius pro quolibet dato tempore, hoc est motus qui Soli competeret si uniformiter in eclipticâ ferretur. Est enim ut $365^{d}.\ 5^{h}.\ 49'$. ad tempus datum, ità 360° quos Sol anni æquinoctialis tempore describit proprio motu ad arcum eclipticæ dato tempore conficiendum. Hâc proportione arcus eclipticæ anno communi $365^{\text{dier.}}$ describendus est XI Signorum $29^{\circ}.\ 45'\ 40''$, die uno est $59'\ 8''\ 20'''$, horâ unâ est $2'\ 28''$, minuto uno est $2''\ 28'''$.

Arcus æquatoris qui dato tempore sub Meridiano transit simili modo invenietur; nam quæratur arcus æquatoris dato tempore sidereo sub meridiano transiens, dicendum est: ut 24 horæ sidereæ ad tempus datum, ità 360 grad. ad arcum quæsitum, is ergo horâ unâ erit 15°; minuto uno primo $15'$, minuto secundo $15''$. Cùm autem Sol die uno describat motu proprio medio ad æquatorem relato arcum $59'\ 8''\ 20'''$ ab occasu

ad ortum, ut inveniatur arcus æquatoris dato tempore solari medio sub meridiano transiens, dicatur ut 24 horæ solares ad datum tempus solare, ità 360° 59′ 8″ 20‴ ad arcum quæsitum. His igitur proportionibus tempus solare medium vel tempus sidereum convertitur in gradus æquatoris et contrà. Facilè autem patet ex dictis diem solarem medium æqualem esse 24 horis sidereis cum 3′ 56″ 32‴.

17. Si observetur altitudo meridiana Solis et dato ante vel post meridiem tempore observetur etiam altitudo meridiana stellæ alicujus, stellæ hujus dabuntur declinatio et ascensio recta. Nam ex datâ altitudine meridianâ Solis datur ejus ascensio recta (14) et tempore quod inter duas observationes intercedit in arcum æquatoris converso (16) datur arcus æquatoris qui tempore inter duas observationes elapso per meridianum transit; hic arcus addatur vel subducatur ascensioni rectæ Solis, et summa vel differentia erit ascensio recta stellæ. Declinatio autem stellæ ex ipsâ altitudine ejus meridianâ eruitur (14). Quod si centrum Solis et centrum stellæ in meridiano simul reperiantur, eadem est utriusque ascensio recta.

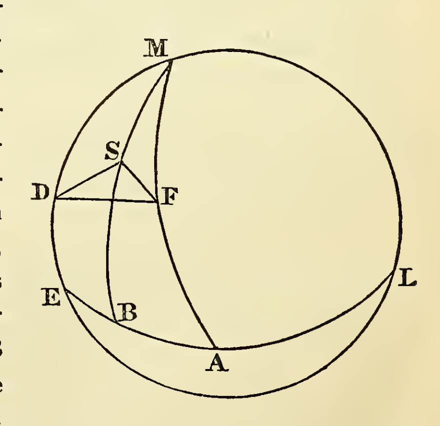
18. Datis declinatione et ascensione rectâ stellæ, dantur ipsius longitudo et latitudo. Sunto Æ Q æquator, E L ecliptica, P polus mundi, M polus eclipticæ, S stella, P S D quadrans circuli declinationis, et M S K, quadrans circuli latitudinis. Quæruntur arcus ♈ vel ♎ K et K S. In triangulo P S M datur latus P M seu distantia polorum P et M 23° 29′, datur quoque latus P S declinationis S D complementum et angulus M P S seu Æ P D, cujus mensura est arcus Æ D datus ob datos per ascensionem rectam arcum ♈ D vel ♎ D et quadrantem Æ ♈. Quarè (per trig. sphær.) invenitur latus M S latitudinis S K complementum et angulus M, cujus mensura est arcus K L; ex circuli quadrante ♈ L vel ♎ L subducatur K L, et dabitur ♈ K longitudo stellæ S. Hinc etiam facilè patet quomodò datis longitudine ♈ K et latitudine K S stellæ S inveniri possit ipsius ascensio recta et declinatio. Nam dato ♈ K datur K L, et indè datur angulus S M P, et dato S K, datur S M, undè cùm datum



sit M P, dantur in triangulo S M P latus P S complementum declinationis et angulus Æ P D, cujus est mensura Æ D, ex quâ si auferatur quadrans Æ ♈, dabitur ascensio recta ♈ D.

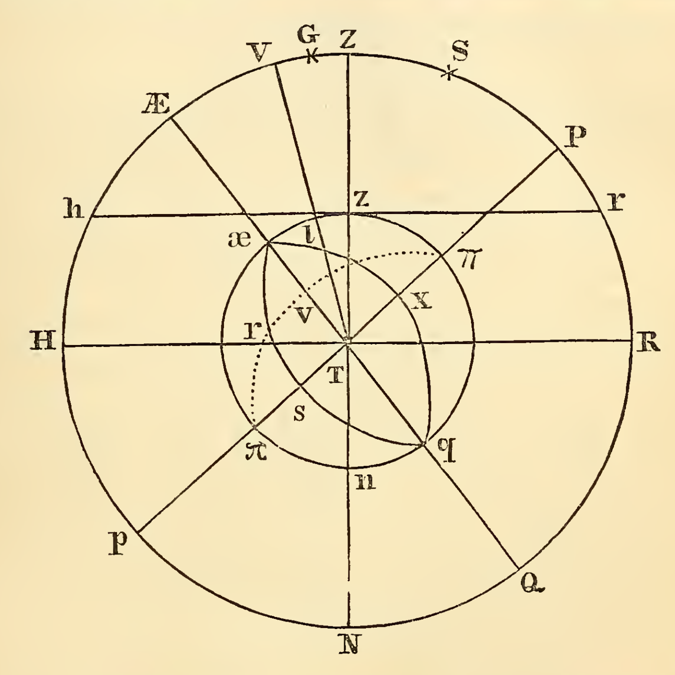
19. Ex hujusmodi observationibus et calculis inventum est fixarum latitudines immutabiles esse, longitudines verò per singulos annos 50 secundis, et per annos 72 gradu uno quamproximè augeri. Undè manifestum fit stellas fixas motu proprio sed lentissimo in circulis eclipticæ parallelis progredi in consequentia, aut si stellæ fixæ omni proprio motu priventur, puncta æquinoctialia singulis annis in antecedentia moveri per arcum 50″, atquè hæc est præcessio æquinoctiorum ex quâ fit ut Sol motu proprio ab æquinoctio ad idem æquinoctium citiùs revertatur quàm a stellâ fixâ ad eandem. Annus igitur solaris æquinoctialis brevior est anno solari sidereo, hoc est brevior est tempore unius revolutionis Solis a stellâ fixâ ad eandem fixam; differentia est 20′ 17″ quo tempore Sol motu proprio arcum 50″ conficit. Est ergò annus sidereus $365^{\text{dier.}}\ 6^{\text{hor.}}\ 9'\ 17''$.

20. Stellarum distantiam dicimus arcum circuli maximi inter stellarum centra comprehensum, aut, quod eodem redit, angulum quem rectæ a centris stellarum ad oculum spectatoris ductæ efficiunt. Si ope semicirculi vel quadrantis observentur distantiæ stellæ alicujus ab aliis duabus stellis quarum longitudo et latitudo notæ sunt, illius quoque longitudo et latitudo dabuntur. Nam esto ecliptica E L, polus ejus M, stellæ notæ longitudinis et latitudinis S et F, tertia stella D. Ducantur tres circuli latitudinis M D E, M S B et M F A, sintque datæ distantiæ D S et D F. Quia dantur latitudines S B et F A stellarum S et F, dabuntur earum complementa S M et F M cum angulo B M A, cujus mensura est arcus B A, differentia longitudinis stellarum S et F, et ideò in triangulo S F M, dabitur S F, cum angulo M S F. Datis in triangulo D S F, tribus lateribus dabitur angulus D S F, et si ex 360° seu quatuor angulis rectis subducatur summa angulorum datorum D S F et F S M, dabitur angulus D S M, cum quo et notis lateribus D S et S M, reperientur latus M D complementum quæsitæ latitudinis stellæ D, et angulus E M B cujus mensura est arcus E B,



differentia longitudinum stellarum D et S; hæ autem observationes distantiarum astrorum inter se propter astrorum continuam conversionem non facilè ad summam acribeiam perducuntur.

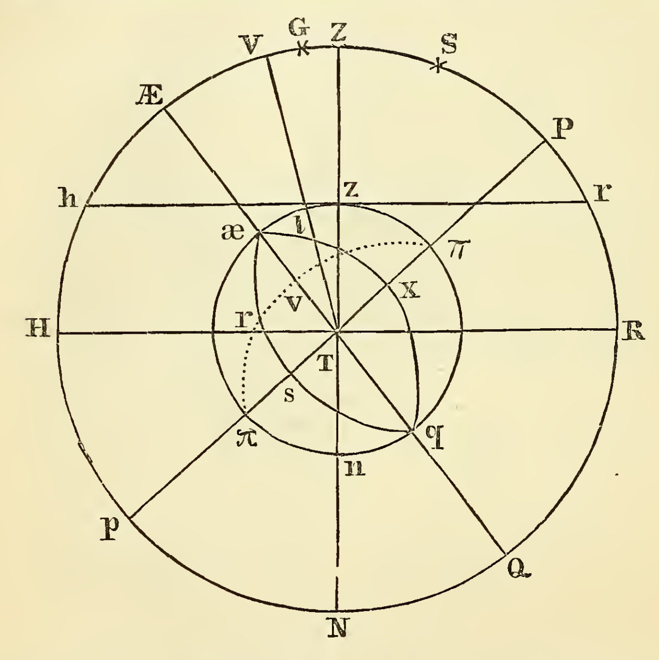
21. Sit Π z æ π q telluris globus per cujus centrum T transit axis mundi P p. Loci z sit horizon sensibilis h r, horizon rationalis H R, et meridianus P Z H N. His ità constitutis, axis telluris dicitur pars



Π π, axis mundi P p telluris superficie terminata in punctis Π et π, quæ poli terræ vocantur. Polus Π polo cœlesti P nobis conspicuo subjectus borealis vel arcticus, alter π australis vel antarcticus appellatur. Intersectio plani æquatoris cœlestis cujus est diameter Æ Q, cum telluris superficie, sivè circulus maximus æ s q x, cujus poli sunt Π et π, dicitur æquator terrestris aut etiam circulus æquinoctialis vel κατ' ἐξοχὴν linea. Latitudo loci cujusvis z in superficie terræ est distantia ejus ab æquatore, sivè est meridiani terrestris arcus z æ inter locum z et æquatorem æ s q x interceptus. Undè patet latitudinem loci z in superficie terræ numero graduum æqualem esse declinationi cœlesti verticis Z ejusdem loci, seu elevationi poli P R. Nam arcus P R et Z Æ, sunt æquales (10) et arcus Z Æ ac z æ similes; per locum in superficie terræ pro arbitrio determinatum ducatur meridianus Π r π æquatorem æ s q x secans in r;

dicaturque Π r ϖ primus meridianus, et loci cujusvis alterius z longitudo dicetur æquatoris arcus r æ inter meridianum primum Π r ϖ et meridianum z æ ϖ q loci z interceptus atquè ab occasu ad ortum numeratus.

22. Si per trigonometriam mensuretur distantia z l duorum locorum z et l sub eodem meridiano sitorum et ope quadrantis circuli ex iisdem locis observentur distantiæ S Z et S V, stellæ fixæ S a locorum vertici-

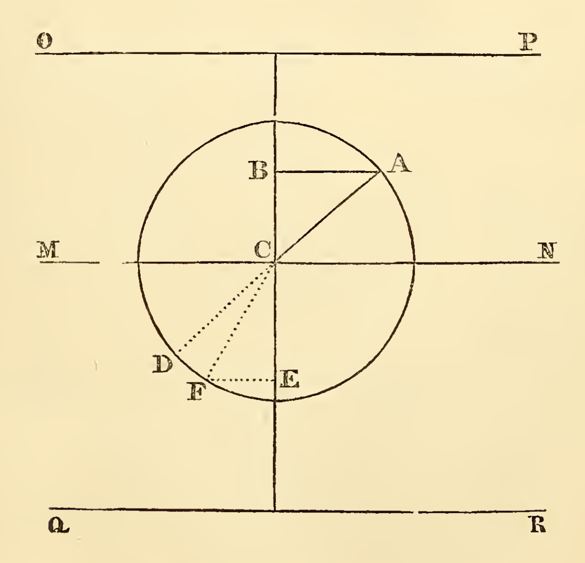


bus Z et V, dabitur telluris semidiameter z T. Nam datis arcubus S V et S Z, dabitur eorum differentia vel summa V Z, et hinc datur arcus l z qui arcui V Z similis est. Quarè per observationes astronomicas notum erit quot gradus vel minuta in arcu l z contineantur, et per trigonometricas mensuras ejusdem arcûs longitudo hexapedis vel pedibus aut aliis mensuris notis data erit, et indè inferendo ut numerus minutorum in arcu l z contentorum ad 360° seu ad 21600′, ità longitudo l z mensuris notis expressa ad circulum telluris maximum, dabitur hic circulus ex quo invenietur semidiameter z T.

CAPUT II.

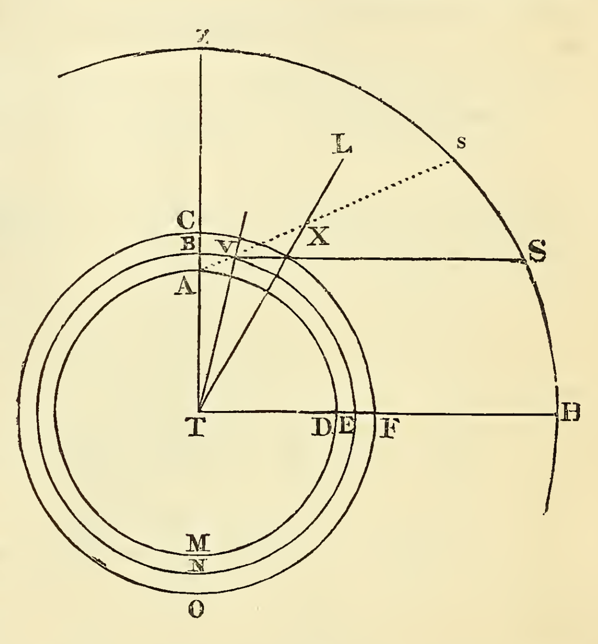
Siderum refractio et parallaxis breviter explicantur.

23. SIT M N plana superficies quâ aër rarior M O P N aërem densiorem contingit. Radius lucis per rectam A C propagatus ex aëre



rariori in densiorem obliquè transeat per punctum C et indè feratur per C F, per C ducatur B E ad M N perpendicularis, experientiâ certum est radium A C in aëre densiori non propagari per rectam continuam A C D, sed in puncto C itâ refrangi per C F accedendo ad perpendicularem B C E, ut sinus anguli cujusvis A C B sit semper ad sinum anguli E C F in datâ ratione. A C dicitur radius incidens, C punctum incidentiæ, C F radius refractus, A C B angulus inclinationis, E C F angulus refractus, et D C F angulus refractionis

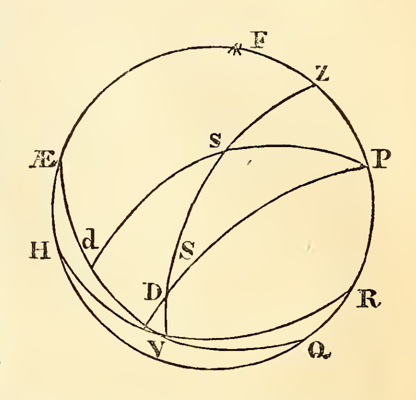
24. Si atmosphæra C X F O M A Terræ A D M circumfusa, divisa intelligatur in innumeras superficies sphæricas telluris superficiei concentricas C X F O, B V E N aër inter duas hujusmodi superficies contentus et aëris superioris pondere compressus eò densior erit quò minùs a telluris centro T distabit. Sit Z S H circulus verticalis ex centro telluris T descriptus, arcus S H altitudo sideris S supra horizontem rationalem T H, et Z S distantia sideris a vertice Z. Si radius lucis S X e sidere S propagatus incidat in atmosphæram in X, is refringetur in X per X V accedendo ad semidiametrum T X superficiei sphæricæ C X F O perpendicularem (23) et quoniam aëris densitas in V major est quàm in X radius in puncto V, superficiei B V E rursùs refringetur accedendo ad T V, atquè ità continuò incurvabitur et in lineam X V A versùs T cavam flectetur. Hanc curvam tangat in A recta A s, circulo verticali Z H occurrens in s, et quoniam radius lucis S X V A oculum spectatoris in A ingreditur secundum directionem tangentis A s, sidus, quod est reverâ in S, videbitur in s, in loco nempe altiore; notum enim est ex opticâ objectum videri in eâ rectâ secundùm quam fit directio radiorum oculos ingredientium.



25. Producatur T X ad L, ut sit S X L angulus inclinationis radii S X in atmosphæram incidentis, et V X T angulus refractus, data erit ratio sinûs anguli S X L, ad sinum anguli V X T (23) ac proindè sinus angulorum inclinationis erunt semper ut sinus angulorum refractorum. Quarè sideris in vertice Z constituti, ubi nullus est angulus inclinationis, nulla erit refractio, et siderum in æqualibus a vertice distantiis sitorum, ubi æquales sunt inclinationum anguli, æquales erunt refractiones. Solis

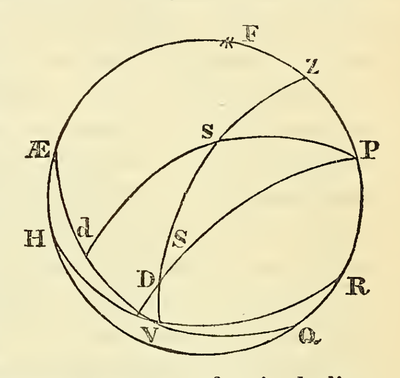
igitur, Lunæ, fixarum ac siderum omnium extrà terrestrem atmosphæram constitutorum, in paribus a vertice distantiis refractiones sunt æquales.

26. Siderum refractio ad singulos altitudinis gradus, observatione definiri potest. Esto H R horizon, P polus mundi, Æ Q æquator, P Z H meridianus, Z S V circulus verticalis, P S D et P s d, circuli declinationis. Stellæ fixæ F propè zenith constitutæ observetur altitudo meridiana H F, quæ a refractione libera est, et indè eruatur ejus declinatio F Æ (14). Deindè observetur ejusdem stellæ in S positæ altitudo quælibet S V, et ope horologii oscillatorii notetur tempus quod inter primam et secundam observationem intercedit, et inveniatur arcus æquatoris Æ D qui eo tempore per meridianum transiit (16). Stella quæ ob refractionem in loco altiori s apparet sit reverâ in S, erit P S D circulus declinationis stellæ in S constitutæ, et in triangulo P Z S, dabitur angulus Z P S, cujus mensura est arcus Æ D cum latere P Z quod est distantia poli a vertice et latere P S, quod est declinationis D S seu Æ F complementum, undè invenitur latus Z S cum altitudine S V, complemento lateris Z S. Si ergò ex altitudine observatâ s V, subducatur altitudo inventa S V, quæ a refractione libera est, dabitur arcus S s, refractio stellæ in quolibet gradu altitudinis. Hoc modo D. De la Hire in Tabulis Astronomicis observavit refractiones siderum diversis anni tempestatibus, in pari altitudine easdem esse exceptis refractionibus circà horizontem quas nonnullis inconstantiis obnoxias expertus est, atquè hinc unicam tabulam refractionum ex ipsis observationibus deductam constituit, quam postea correxit D. Cassinus, et eâ correctâ utuntur astronomi. Quoniam verò radiorum lucis in atmosphæram incidentium obliquitas cum sideris a vertice distantiâ crescit, iisdem observationibus invenit refractiones siderum a vertice ad horizontem usquè ubi maximæ sunt, continuò augeri; at quod ex alienis observationibus supponebat, videlicet refractiones borealium regionum ipsâ etiam æstate, longè majores esse quàm in zonis temperatis, id minimè verum esse ostendunt accuratiores observationes ab academicis Parisiensibus ad circulum polarem habitæ, quibus refractiones etiam horizontales Parisiensibus æquales invenerunt. Vide Domini De



Maupertuis nobilissimum opus de figurâ telluris per observationes ad circulum polarem definitâ.

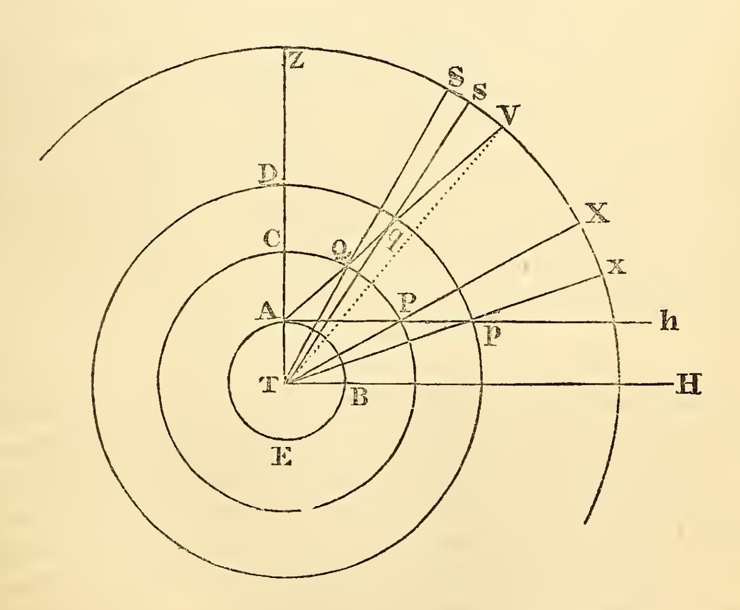
27. Refractio sideris declinationem, ascensionem rectam, longitudinem ac latitudinem afficit et arcus circuli maximi quo sideris declinatio, ascensio recta, longitudo et latitudo minuitur vel augetur per refractionem, dicitur refractio declinationis vel ascensionis rectæ, &c.; at ex datâ altitudinis refractione aliæ refractionum species inveniri possunt. Nam in figurâ superiori dantur in triangulo s Z P latera Z s et Z P cum angulo s Z P et indè reperitur latus s P cum angulo s P Z cujus mensura est arcus Æ d, undè cùm detur arcus Æ D, dabitur arcus d D refractio ascensionis rectæ sideris S; et quia dantur arcus d s et D S, dabitur etiam horum arcuum differentia, quæ est refractio declinationis. Sed datis declinatione et ascensione rectâ: puncti cujusvis in sphærâ mundanâ, dantur ipsius latitudo et longitudo (18); patet igitur quomodo latitudinis et longitudinis refractiones possint inveniri.



28. Jam de *Parallaxibus* pauca nobis delibanda sunt. Cætera, ubi opus fuerit, suis locis exponemus. Itaque distantia locorum in sphærâ cœlesti ad quæ sidus vel phænomenon quodvis e superficie telluris et ex ejus centro spectatum refertur, sivè arcus circuli maximi inter illa duo loca interceptus, ipsius sideris aut phænomeni parallaxis appellatur, quæ proindè nulla est nisi terræ semidiameter sensibilem habeat rationem ad distantiam sideris a terrâ. Sit T centrum telluris ac cœli; A oculus in superficie terræ; Z zenith loci A; Q sidus vel phænomenon quodvis; C Q P verticalis per Q transiens; Z S X H verticalis in superficie sphæræ cœlestis; A B E verticalis in superficie terræ; T H horizon rationalis et A h horizon sensibilis. His ità constitutis, locus physicus sideris Q, est punctum illud in quo sideris centrum hæret. Locus opticus apparens seu visus est punctum V in superficie sphæræ cœlestis, in quo recta ex oculo A per centrum sideris Q ducta terminatur. Locus opticus verus est punctum S in superficie sphæræ cœlestis in quo terminatur recta linea T Q S ex terræ centro T per Q ducta. *Parallaxis* est arcus S V sivè differentia duorum locorum opticorum. *Angulus parallacticus* qui plerumque etiam *Parallaxis* vocatur, est angulus A Q T quem in

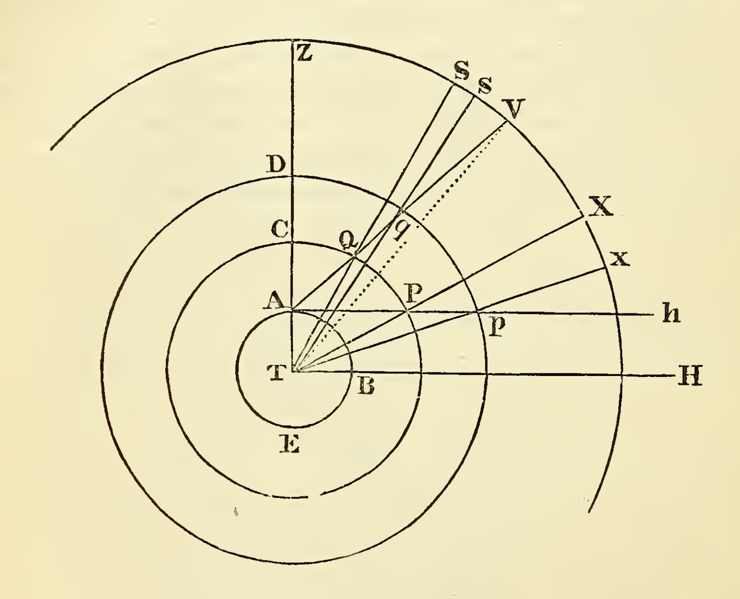
centro sideris efficiunt rectæ A Q et T Q ex oculo A et ex centro terræ T ad sideris centrum Q ductæ. Parallaxis altitudinis quæ et parallaxis simpliciter dicitur, est differentia inter distantiam Z V a zenith Z ex loco A visam et distantiam veram Z S, sivè est arcus S V in circulo verticali Z S V H, undè manifestum est altitudinem sideris veram per parallaxim minui et ejus a vertice distantiam augeri, atquè ideò parallaxim esse refractioni contrariam. Parallaxis horizontalis est parallaxis X h, sideris P in horizonte sensibili A h apparentis.

29. Parallaxis S V est mensura anguli parallactici A Q T. Jungatur T V, et angulus externus A Q T æqualis erit duobus internis oppositis Q T V et Q V T; sed angulus Q V T sivè A V T, evanescente A T respectu T V, nullus est (9), ergò angulus parallacticus A Q T, æqualis est angulo Q T V, seu S T V, cujus mensura est arcus S V.



30. Manente sideris a centro terræ distantiâ, sinus parallaxeos est ad sinum distantiæ visæ sideris a vertice in ratione datâ semidiametri telluris ad distantiam sideris a centro terræ. Nam in triangulo A Q T, est A T ad Q T, in ratione sinûs anguli parallactici A Q T seù sinus parallaxeos ad sinum anguli T A Q sivè ad sinum distantiæ visæ Z V a vertice, et ideò, datis A T et Q T, data est ratio sinuum illorum.

Hinc verò sequitur sideris in vertice Z, constituti parallaxim esse nullam, eandem crescere cum distantiâ a vertice et in horizonte fieri maximam. Sequitur quoquè sinus parallaxium in paribus sideris a centro terræ distantiis esse ut sinus distantiarum visarum a vertice, et ideò si detur parallaxis sideris in aliquâ a vertice distantiâ, dabitur in aliâ quâvis distantiâ a vertice.



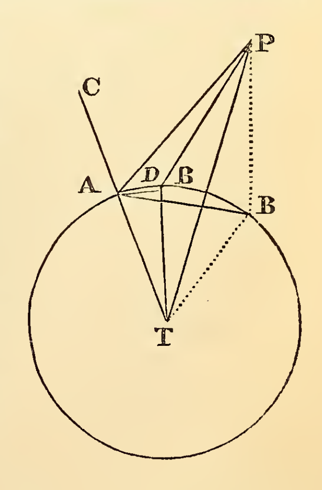
31. Datâ sideris Q, parallaxi A Q T, cum angulo Z A V seu distantiâ apparente a vertice, datur in semidiametris terræ tum distantia Q T sideris Q a centro terræ, tum distantia ejus A Q a loco A. Dato enim angulo Z A Q datur T A Q complementum illius ad duos rectos, undè, ob datum etiam angulum A Q T, dantur tres anguli trianguli Q A T, ex quibus datur ratio laterum inter se. Hinc datâ sideris P parallaxi horizontali, si inferatur ut sinus parallaxeos ad sinum totum, ità semidiameter telluris A T ad quartum obtinebitur distantia P T sideris a centro terræ ob angulum T A P rectum.

32. Sinus parallaxeon siderum Q et q in æqualibus distantiis apparentibus a vertice, sunt in ratione reciprocâ distantiarum siderum a centro terræ. Etenim ut sinus parallaxeos A Q T, ad sinum anguli Z A V, ita est A T ad Q T et ut sinus anguli Z A V, ad sinum parallaxeos

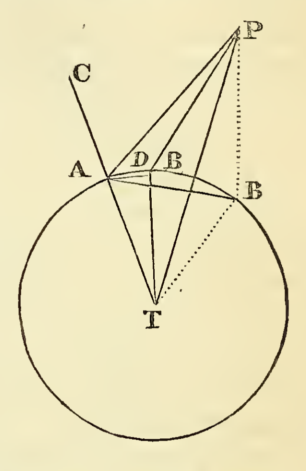
A q T, itâ q T ad A T, ideóque ex æquo, sinus parallaxeos A Q T est ad sinum parallaxeos A q T ut q T ad Q T. Ex quo etiam sequitur siderum in eâdem altitudine apparente existentium, hujus majorem esse parallaxim quod minùs distat a centro terræ.

33. Parallaxis altitudinis, uti de refractione dictum est, sideris declinationem, ascensionem rectam, longitudinem et latitudinem mutat; et eodem modo quo ex refractione altitudinis inveniuntur aliæ refractionum species, sic ex datâ parallaxi altitudinis eruuntur parallaxes declinationis, ascensionis rectæ, longitudinis et latitudinis; illud quoque observandum est sideris in meridiano existentis nullam esse ascensionis rectæ refractionem nec parallaxim; cùm enim altitudinis refractio sidus attollat, et altitudinis parallaxis illud deprimat, in eodem meridiano seu circulo declinationis (per hyp.) ascensio recta indè non mutatur. Similiter si circulus verticalis in quo sidus reperitur sit ad eclipticam perpendicularis, nulla erit longitudinis refractio nullaque parallaxis; nam in hoc casu circulus verticalis est simul circulus latitudinis, et siderum in eodem latitudinis circulo existentium longitudo est eadem.

34. Datâ differentiâ longitudinis locorum duorum in superficie terræ, seu dato arcu æquatoris inter locorum illorum meridianos intercepto, datur tempus quo Sol vel stella fixa ab uno meridiano ad alterum motu diurno transit (16); et indè definiri potest utrum observationes in illis duobus locis habitæ, respondeant eidem temporis absoluti momento an non. Facilè idem innotescit per Lunæ et Jovis satellitum eclipses; eodem enim momento temporis eclipsis initium ac finis, et macularum in Lunâ notarum immersio in umbram vel emersio ex umbrâ ex omnibus terræ locis undè conspici possunt videntur, atquè ex his phænomenis differentia longitudinis locorum determinatur. His positis si ex locis duobus A et B, quorum distantia A D B data est, phænomeni vel sideris P in plano verticali A P B T, existentis altitudines apparentes et a refractionibus liberæ observatæ fuerint eodem tempore, inveniri poterit puncti P parallaxis et distantia a centro terræ P T. Nam per observationem altitudinis apparentis in loco A, datur angulus C A P, distantia apparens sideris a vertice et indè datur



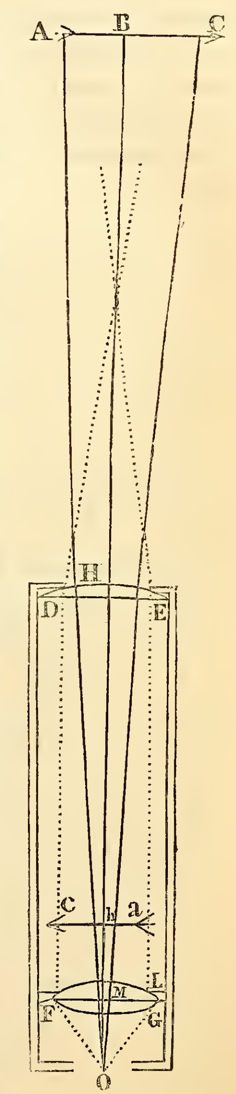
angulus P A T, anguli C A P complementum ad duos rectos, eodemque modo per observationem in loco B factam invenitur angulus P B T. Sed dato arcu A D B, datur angulus A T B et hinc in triangulo isoscele A T B, dantur anguli æquales T A B et T B A. Quarè dantur etiam in triangulo A B P, anguli P A B, et P B A quos latera P A et P B efficiunt cum chordâ A B. Ergò triangula duo A B T et A B P dantur specie ac proindè datur ratio P B ad B T, et quia datis angulis A B T et A B P datur angulus P B T, ductâ rectâ P T, dabuntur in triangulo P T B, angulus T B P, et ratio laterum T B et B P, atquè ideò triangulum hoc specie dabitur. Innotescet igitur tum angulus parallacticus B P T, tùm distantia P T, seu ejus ratio ad telluris notam semidiametrum. Hâc igitur ratione inveniri potest parallaxis sideris aut phænomeni vel quiescentis vel utlibet moti. Verùm astronomi recentiores plures invenerunt methodos quibus unicus observator in eodem loco manens siderum motu diurno ac proprio agitatorum parallaxes potest determinare. De his, ubi e re visum fuerit, dicemus. Vid. Keill. in Introductione ad Veram Astronomiam.



CAPUT III.

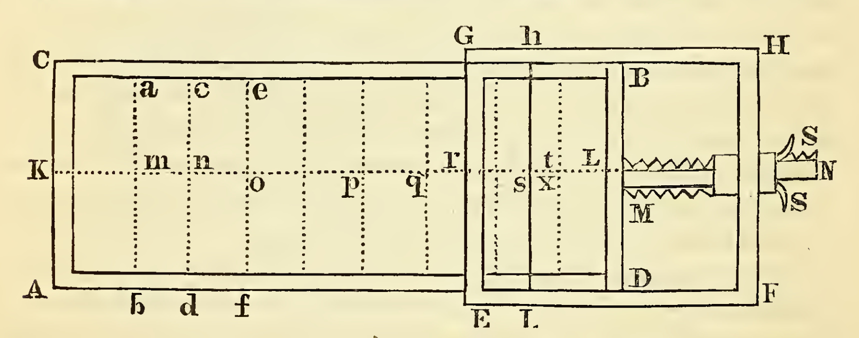
De Telescopii ac Micrometri usu et Phænomenis horum Instrumentorum beneficio observatis pauca.

35. SIT telescopium astronomicum D F G E, vitrum objectivum D E, oculare F G; objectum A C; itâ remotum ut radii qui ex singulo illius puncto in totam vitri objectivi superficiem incidunt pro parallelis possint usurpari. Radii illi ex eodem puncto v. gr. A propagati, a vitro objectivoità franguntur ut post vitrum D E coëant in unum punctum a, quod est puncti A imago, et similiter punctum C pingitur in c, totumque objectum A C in a c, situ inverso, estque c a foci locus in quo proindè oculus O, trans vitrum oculare F G, videt objectum A C, seu ipsius imaginem a c. Hinc si in foci loco c a positum sit corpus aliquod opacum, oculus illud distinctè videbit tanquam objecto A C, seu potiùs imagini ejus a c contiguum.



36. Sit B O radius ad A C normalis et per centra H et M vitrorum transiens, ideóque irrefractus. Jungatur recta A O, et objectum A B, oculo nudo videretur sub angulo A O B, estque proindè angulus A O B, magnitudo apparens objecti A B. Quoniam verò radii ex punctis imaginis b et a parallelè propagati colliguntur a vitro oculari F G in ejus foco O ubi oculus versatur, pars objecti A B, seu ejus imago a b, videtur sub angulo M O L, et (per Probl. XXXI. Element. Dioptr. Clariss. Wolf.) distantia foci lentis objectivæ H b, est ad distantiam foci lentis ocularis b M, ut angulus M O L ad angulum A O B, seu ut magnitudo apparens imaginis a b ad magnitudinem apparentem objecti A B nudo oculo visi, ex quo patet quod in eodem telescopio magnitudines apparentes objectorum sunt proportionales magnitudinibus imaginum in foco positarum et trans vitrum oculare visarum.

37. His positis, facile est micrometri usum intelligere. Est autem micrometrum instrumentum quod in foco lentis objectivæ telescopii aptatur ad magnitudines apparentes quæ gradum unum vel gradum cum semisse non superant, dimetiendas. Illius constructionem quam D. De la Hire in Tabulis Astronomicis veluti usibus Astronomicis accommodatiorem dedit, referemus. Constat ex duobus quadris rectangulis quorum alterum A C B D, ut plurimum longitudinem habet duorum pollicum cum semisse et latitudinem unius pollicis cum semisse. Hujus quadri, latera longa A D, C B, in partes æquales et tertiâ parte unius pollicis inter se distantes dividuntur, itâ tamen ut lineæ ductæ per singulas divisiones sint ad latera A D, C B, perpendiculares. Hisce divisionibus fila serica benè tensa applicantur, glutinanturque cerâ. Additur



filum sericum K L, dictum transversale, quod ad angulos rectos fila parallela modò descripta a b, c d, e f, &c. secet et in medio laterum A C, B D glutinatur. Alterum quadrum E F H G cujus longitudo E F non superat unum pollicem cum semisse, ita priori accommodatur ut ejus latera E F, G H, moveantur super latera A D, C B, alterius quadri nec ab ipso separentur. Facies hujus secundi quadri quæ divisam faciem prioris respicit, filo etiam serico et tenso h L, instruitur, quod, cùm movetur quadrum ubiquè prioris quadri filis parallelum maneat, eaque superlabitur quam proximè, nec tamen eis occurrit. Cochlea deindè M N, lateri B D, longioris quadri affigitur, cujus striatum receptaculum lateri F H alterius adhæret et in foramine rotundo circumvolvitur. Cochlea ejusque receptaculum auriculis S, S, instructum itâ inter se aptari debent ut receptaculum et quadrum E H, ne minimùm quidem moveri possit, nisi receptaculi motu conversionis. Quadrum A C B D, telescopii cujusvis longitudinis tubo in distantiâ foci objectivæ lentis itâ aptatur ut ipsius quadri planum perpendiculare sit ad telescopii axem. His itâ constitutis, telescopium in cœlum convertatur et itâ disponatur ut

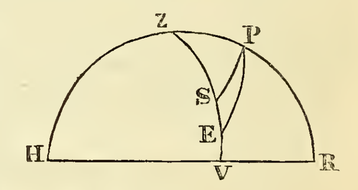
duæ stellæ fixæ quarum distantia apparens in minutis secundis aliundè nota sit, sint in filo transversali K L, positæ verseturque cochlea donec filum mobile h L, per centrum x, stellæ unius transeat, alterius stellæ centro m, vel n, existente in alio filo a b, vel c d. Hàc observatione notum erit cuinam distantiæ apparenti respondeat longitudo m x, vel n x, in lineis et lineæ partibus data, et indè per proportionis regulam, observatâ quâlibet aliâ siderum distantiâ n q, dabitur angulus sub quo hæc distantia nudo oculo videretur, inferendo sic: ut m x vel n x ad n q, ità distantia apparens stellarum duarum m, vel n, et x ad distantiam apparentem punctorum n et q. Moveatur jam quadrum E F H G ope receptaculi striati donec filum ejus sericum h L, exactè conveniat cuilibet ex filis parallelis alterius quadri, noteturque positio auricularum receptaculi et iterum moveatur receptaculum donec idem filum quadri E F H G proximo filo alterius congruat, vel, quod idem est, moveatur quadrum E F H G, per spatium quatuor linearum, numerenturque revolutiones receptaculi et partes unius revolutionis quæ filorum intervallo linearum quatuor conveniunt. Condatur tandem tabula revolutionum receptaculi et partium ejus quæ singulis minutis primis et secundis ex noto superiùs toto intervallo debentur.

38. Ubi diameter planetarum erit observanda, directo telescopio cum micrometro ad planetam ità disponantur fila movendo telescopium ut sideris limbus unum ex filis parallelis immobilibus percurrat; deindè receptaculum convertatur, donec filum mobile limbum alterum planetæ contingat. Manifestum est ex distantiâ cognitâ inter fila micrometri quæ planetam comprehendunt, notam fieri planetæ diametrum apparentem.

39. Datâ declinatione et ascensione rectâ stellæ fixæ, inveniri potest alterius stellæ declinatio et ascensio recta, modò tamen duæ illæ stellæ transire vicissim possint per campum telescopii immoti. Ità enim disponantur fila parallela micrometri ut motus diurnus stellæ quæ alteram præcedit fiat super unum ex illis E G. Super a b, in quo situ filum c d, exponet portionem exiguam paralleli quem stella describit, et filum K L illud ad angulos rectos intersecans, circulum aliquem declinationis. Notetur temporis momentum quo stella præcedens filo transversali occurrit in m. Similiter immoto telescopio observetur tempus appulsûs alterius seu sequentis sideris ad idem filum transversale seu circulum declinationis, et si intereà filum parallelum mobile h L, sideri huic aptetur, immoto manente micrometro ope distantiæ m x, filorum a b et

h L, distantiam apparentem inter parallelos siderum duorum quæ est differentia declinationis siderum, obtinebimus. Sed si differentia temporis inter utriusque sideris transitum per filum transversale in minutâ tam primâ quàm secundâ gradûs convertatur (16) differentiam ascensionalem siderum habebimus.

40. Hæc observatio supponit nullum esse sideris motum proprium nullamque parallaxim. Si sidus motum proprium habeat, illum oportet ex observationibus determinare quoad declinationem et ascensionem rectam illiùsque rationem habere. Quo peracto, si aliqua sit sideris parallaxis poterit ità reperiri. Observetur sideris ad meridianum appellentis ascensio recta quæ parallaxi obnoxia non est (33), et differentia inter hanc ascensionem rectam sideris in meridiano existentis et ascensionem rectam ejusdem sideris alibi existentis observatam, erit parallaxis ascensionis rectæ ex quâ parallaxis altitudinis inveniri poterit. Sit enim H R horizon, H Z R meridianus, Z zenith, P polus mundi, Z S E V circulus verticalis, S sidus observatum in loco S et deindè in meridiano, E locus sideris visus, S locus verus, et ideò S E parallaxis altitudinis; S P et P E circuli declinationis. Datur, (per Hyp.) angulus S P E, cujus mensura est parallaxis ascensionis rectæ sideris observata. Datur etiam punctum illud quod est intersectio æquatoris et meridiani tempore observationis sideris in E, apparentis, undè habetur arcus æquatoris inter meridianum R Z H et circulum declinationis P E interceptus qui est mensura anguli Z P E. Quarè in triangulo Z P E, dantur latus Z P distantia poli a vertice, et latus Z E distantia visa sideris a vertice cum angulo Z P E. Innotescet igitur angulus P Z E, ab angulo Z P E, subducatur datus S P E, et dabitur angulus Z P S. Denique in triangulo Z P S, ex datis angulis P Z S et Z P S, cum latere Z P, dabitur latus Z S, vera sideris a vertice distantia quæ ex visâ Z E, ablata relinquet S E parallaxim altitudinis.



41. Telescopium maculas quamplurimas variabiles quæ super corpus Solis incedere videntur ostendit, ex earum motu Solem circà proprium axem $25\frac{1}{2}$ diebus revolvi infertur. In Venere pro variâ ejus ad Solem et Terram positione phases diversæ conspiciuntur phasibus Lunaribus similes ità ut partem illuminatam Soli constanter obvertat. Prætereà Mercurius et Venus tanquam maculæ nigræ et rotundæ discum Solis

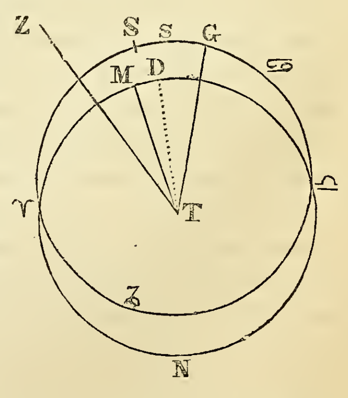
trajicere visi sunt. Undè notum factum est Planetas illos esse corpora opaca a Sole illustrata. In Jove, Marte ac Venere maculæ observatæ fuerunt quarum motus rotationem illorum planetarum circà proprium axem probat. Circà Jovem quatuor revolvi videntur lunulæ Jovis corpus perpetuò comitantes. Sunt omnes ut et Jupiter ipse corpora opaca lumen suum a Sole mutuantia; nam Jove inter ipsas et Solem diametraliter interposito, lumine privantur et cælo sereno evanescunt; ubi verò aliqua Jovialis Lunula inter Solem et Jovem transit, ejus umbra instar maculæ nigræ ac rotundæ observatur in ipso Jovis disco. Quinque pariter Lunulæ Saturnum comitantur et circà eum revolutiones suas agunt lumineque privantur dum radii Solares a Saturni corpore opaco intercipiuntur. Hugenius ex propriis observationibus intulit Saturnum cingi annulo tenui, plano, nusquam cohærente cum corpore Saturni et ad Eclipticam inclinato; quæ hypothesis, si ità nunc potest appellari, non solùm Phænomenis ab Hugenio observatis, sed et aliis plurimis quæ magnâ diligentiâ a Cassino et Maraldo observata fuêre satisfacit. Tandem per telescopium stellæ longè plures quam oculo nudo cernuntur; Stellæ illæ quas nebulosas dicunt et integra via lactea nihil aliud sunt quam plurimarum stellarum quæ oculo non distinguuntur congeries. Novæ quoque in cælis stellæ apparent et quæ antè videbantur, nonnunquam inconspicuæ fiunt, illarum quædam apparitionis et disparitionis periodos habent quæ quamdam regularitatem obtinere videntur, earumque magnitudo sub initio apparitionis crescit et sub finem decrescit.

42. Si sæpius observetur tum motus Solis in Eclipticâ (15) tum ipsius diameter apparens (39) quàm fieri potest accuratissimè, circà datum punctum in plano describi poterit curva similis orbitæ quam Sol circà terram percurrere videtur. Nam cùm diametri Solis apparentes sint reciprocè ut ipsius a tellure distantiæ, ex datis diametris apparentibus dantur distantiarum rationes et ex dato Solis motu in Eclipticâ, dantur anguli inter illas distantias contenti. Si verò ex hujusmodi observationibus conferantur diametri apparentes Solis cum ipsius angulari velocitate circà terram, apparet areas quas Sol radio ad terram ducto verrit, esse temporibus proportionales, Solisque orbitam non multum differre a circulo et haberi posse pro ellipsi cujus umbilicum alterum occupat terra. Est autem Solis diameter apparens maxima 32′ 40″, et minima 31′ 36″ juxtà D. Cassini in Tabulis Astronomicis et ideò maxima distantia Solis a terrâ est ad distantiam minimam ut 32′ 40″ ad 31′ 36″, sivè ut 1960 ad 1896 circiter, sive 245 ad 237. Ex similibus observationibus, tum

diametri apparentis Lunæ, tum velocitatis ipsius in unâ revolutione colligitur hunc planetam radio ad centrum terræ ducto areas describere temporibus circiter proportionales.

43. Si itaquè observetur locus Solis in Eclipticâ quandò tum ipsius velocitas tum diameter apparens minima est, dabitur tempore dato locus Apogæi Solis et collatis plurium annorum observationibus innotescet Apogæi motus annuus qui juxtà D. Cassini est 1′ 2″ et inde per proportionis regulam habetur motus Apogæi pro quolibet dato tempore. Hinc si tempore quovis observetur Solis longitudo vera, dabitur eodem tempore locus Apogæi Solis et ipsius anomalia vera ex quâ eruetur ejusdem anomalia media (per Schol. ad Prop. XXXI. Lib. I.) ac proindè longitudo media habebitur tempore observationis. Hæc longitudo media assumatur tanquam radix seu principium motuum mediorum Solis et tempus observationis tanquam epocha temporum mediorum computandorum et dato quolibet alio tempore medio inveniri poterit medius Solis motus huic tempori proportionalis, et indè habebitur ipsius longitudo media et distantia ejus media ab Apogæo seu anomalia media dabitur ex quâ deindè eruetur anomalia coæquata, ac proindè longitudo vera Solis habebitur.

44. Quia verò dies Solares sunt inæquales (15), necesse est ut tempus apparens quod diebus solaribus constat, fluat enim inæquabiliter. Differentia quæ est inter tempus apparens seu verum et tempus æquabile seu medium dicitur æquatio temporis quâ indigemus ut tempus medium convertatur in tempus apparens et vice versâ, ideóque ut invento loco Solis pro tempore medio, inveniatur etiam pro tempore vero et contrà.



45. Sit T, Cœli et Terræ centrum T Z, planum immobile circuli alicujus horarii, ♈ M ♎ N æquator, ♈ S ♋ ♎ ♑ ecliptica, S Sol, ♈ S Solis longitudo vera, ♈ s ejusdem longitudo media, cui æqualis capiatur arcus æquatoris ♈ M, et ♈ D sit Solis ascensio recta vera. Ducantur ad puncta mobilia M et D radii æquatoris T M et T D qui semper moveantur cum punctis M et D, in consequentia. Quoniam æquator per circulum horarium T Z, motu æquabili diurno nempè qui fit ab oriente in occidentem, transit; si punctum D ascensionis

rectæ Solis etiam æquabiliter progrederetur in æquatore ab occidente in orientem, dies Solares seu revolutiones singulæ puncti D a circulo horario T Z ad eundem, essent æquales et tempus apparens a medio non differret. Sed cùm motus ascensionis rectæ D, inæquabilis sit, dies et horæ Solares sunt quoquè inæquales. At punctum M, æquabiliter progreditur in æquatore ab occasu ad ortum, et ideò motus illius constitui potest pro mensurâ temporis medii. Itaque longitudo Solis media ♈ s vel æqualis est ascensioni rectæ ♈ D vel eâ major est aut minor. In primo casu punctum M coincidit cum puncto D, in secundo casu est ultrà D, versùs orientem et in tertio casu est citrà D, versùs occidentem. Temporis absoluti momentum quo punctum M, coincidit cum puncto D, sumatur tanquam principium a quo tempus apparens et tempus medium incipiunt computari et quo simul coincidunt; et in aliis casibus tempus apparens a medio differet pro quantitate arcûs M D in tempus solare conversi (16); Nam dum punctum D, est sub meridiano T Z, horâ 12ª computatur in loco cujus meridianus est T Z, et ubi punctum M distat a puncto D, arcus M D, in tempus solare conversus, dabit differentiam inter meridiem apparentem et meridiem medium qui contingit quandò punctum M est in meridiano T Z.

46. Itaquè tempus medium in apparens sic convertitur. Quæritur longitudo Solis tum media, tum vera tempori dato respondens (44) indè eruitur longitudinis veræ ascensio recta (14), si hæc major est mediâ Solis longitudine, differentia in tempus solare conversa subtrahitur ex tempore medio ut fiat apparens, additur si minor est. At tempus apparens in medium ità mutatur. Tempus apparens tanquam medium consideratur, et inquiritur pro dato tempore longitudo Solis tùm media, tum vera, et indè eruitur longitudinis veræ ascensio recta; si hæc mediam Solis longitudinem superat, differentia in tempus solare conversa additur tempori apparenti ut fiat medium. Si verò longitudinis veræ ascensio recta minor est mediâ Solis longitudine, differentia in tempus solare conversa a tempore apparente subducitur. Quod si media Solis longitudo æqualis sit ascensioni rectæ longitudinis veræ, tempus apparens congruit cum medio nullâque eget æquatione. Hæc omnia ex modò dictis (46) manifesta sunt; si enim punctum D est orientalius puncto M, hoc citiùs ad meridianum T Z, pervenit quàm illud, ac proinde hora 12ª temporis medii computatur, cùm nondùm est meridies temporis apparentis, et contrarium contingit, si punctum D puncto M fuerit occidentalius. Ubi tempus apparens in medium oportet converti, tempore apparente utimur tanquam

medio ad locum Solis inveniendum; cùm enim tempus apparens non multum differat a tempore medio, differentia inter ascensionem rectam et longitudinem mediam Solis est quam proximè eadem, sivè per tempus medium, sivè per tempus apparens inquiratur.

47. Jam verò si tempore quovis apparente observetur Solis ascensio et longitudo vera, indèque eruatur ipsius longitudo media (44) ac tempus apparens convertatur in tempus medium (47) habebimus locum Solis medium pro dato temporis medii momento, et hic locus erit radix motuum Solis, momentum verò temporis medii datum epocha temporum computandorum; quibus semel constitutis ad quodlibet aliud datum tempus medium vel apparens inveniri poterit locus Solis verus vel medius in eclipticâ et contrà. Exposuimus jam (44) quomodò locus Solis dato tempore medio inquiratur. Si datum sit tempus apparens, hoc tanquam tempus medium usurpetur et quæratur locus Solis verus huic correspondens (44); deindè longitudini Solis sic inventæ tantum longitudinis addatur vel dematur quantum temporis æquationi debetur et ità prodibit locus Solis tempori apparenti respondens. Facile est ex dictis problema inversum solvere, seu ex dato loco Solis medio aut vero tempus medium aut apparens huic Solis loco respondens invenire.

48. Nec opus est ut moneamus easdem esse motuum cœlestium apparentias, sive cœlum omne cum stellis circà tellurem motu diurno revolvatur ab oriente in occidentem, sive terra circà proprium axem eodem tempore ab occidente in orientem converti supponatur immoto cœlo; sivè etiam terra immota maneat et Sol proprio motu ab occasu ad ortum feratur, seu circa Solem immotum terra motu annuo circumvolvatur in eclipticâ Nam in utrâque suppositione diametri apparentes et velocitates relativæ sunt eædem.

DE

MUNDI SYSTEMATE.

LIBER TERTIUS.

In Libris præcedentibus principia philosophiæ tradidi, non tamen philosophica sed mathematica tantùm, ex quibus videlicet in rebus philosophicis disputari possit. Hæc sunt motuum et virium leges et conditiones, quæ ad philosophiam maximè spectant. Eadem tamen, ne sterilia videantur, illustravi scholiis quibusdam philosophicis, ea tractans quæ generalia sunt, et in quibus philosophia maximè fundari videtur, uti corporum densitatem et resistentiam, spatia corporibus vacua, motumque lucis et sonorum. Superest ut ex iisdem principiis doceamus constitutionem systematis mundani. De hoc argumento composueram librum tertium methodo populari, ut a pluribus legeretur. Sed quibus principia posita satis intellecta non fuerint, ii vim consequentiarum minimè percipient, neque præjudicia deponent, quibus a multis retro annis insueverunt: et propterea ne res in disputationes trahatur, summam libri illius transtuli in propositiones, more mathematico, ut ab iis solis legantur qui principia prius evolverint. Verumtamen quoniam propositiones ibi quam plurimæ occurrant, quæ lectoribus etiam mathematicè doctis moram nimiam injicere possint, auctor esse nolo ut quisquam eas omnes evolvat; suffecerit siquis definitiones, leges motuum et sectiones tres priores libri primi sedulo legat, dein transeat ad hunc librum de mundi systemate, et reliquas librorum priorum propositiones hic citatas pro lubitu consulat.

REGULÆ PHILOSOPHANDI.

REGULA I. ([a])

Causas rerum naturalium non plures admitti debere, quàm quæ et veræ sint et earum phænomenis explicandis sufficiant.

Dicunt utique philosophi: Natura nihil agit frustra, et frustra fit per plura quod fieri potest per pauciora. Natura enim simplex est et rerum causis superfluis non luxuriat.

REGULA II.

Ideóque effectuum naturalium ejusdem generis eædem assignandæ sunt causæ, quâtenus fieri potest.

Uti respirationis in homine et in bestiâ; descensus lapidum in Europâ et in Americâ; lucis in igne culinari et in Sole; reflexionis lucis in terrâ et in planetis.

REGULA III.

Qualitates corporum quæ intendi et remitti nequeunt, quæque corporibus omnibus competunt in quibus experimenta instituere licet, pro qualitatibus corporum universorum habendæ sunt.

Nam qualitates corporum non nisi per experimenta innotescunt, ideóque generales statuendæ sunt quotquot cum experimentis generaliter

([a]) 49. * *Regula prima.* Hæc regula duas habet partes; prima est, ne philosophia in vana abeat opinionum commenta, causæ rerum naturalium non aliæ admitti debent quàm quæ reverâ existunt et quæ phænomenis explicandis sufficiunt; undè si velimus cum evidentiâ ac certitudine philosophari, omnes hypotheses negligendæ nobis sunt; hypothesis enim si legitima est, causæ quidem possibilitatem, minimè verò existentiam adstruit, cùm effectus idem pluribus modis produci possit. Verumtamen ubi certitudinis obtinendæ ab experimentis et indè mathematicâ viâ procedendo spes non affulget hypothesibus quibusdam particularibus uti licet ad veritatem novis experimentis indagandam, quemadmodum astronomi varias adhibuerunt hypotheses ut phænomena cœlestia prædicere et accuratius observare, atquè ità veras eorum causas conjectando investigare possent. Altera pars regulæ, ea scilicet quæ præscribit non plures admittendas esse rerum naturalium causas quàm quæ eorum phænomenis explicandis sufficiunt, manifesta est; nam cùm vera effectûs causa per experientiam semel inventa est, et matheseos ope præsertim demonstratum est causæ illius eam esse vim quæ ad effectum producendum sufficiat, liquet aliam quamlibet causam esse inutilem.

quadrant; et quæ minui non possunt, non possunt auferri. Certè contra experimentorum tenorem somnia temerè confingenda non sunt, nec a naturæ analogiâ recedendum est, cùm ea simplex esse soleat et sibi semper consona. Extensio corporum non nisi per sensus innotescit, nec in omnibus sentitur: sed quia sensibilibus omnibus competit, de universis affirmatur. Corpora plura dura esse experimur. Oritur autem durities totius a duritie partium, et inde non horum tantùm corporum quæ sentiuntur, sed aliorum etiam omnium particulas indivisas esse duras meritò concludimus. Corpora omnia impenetrabilia esse, non ratione sed sensu colligimus. Quæ tractamus, impenetrabilia inveniuntur, et inde concludimus impenetrabilitatem esse proprietatem corporum universorum. Corpora omnia mobilia esse, et viribus quibusdam (quas vires inertiæ vocamus) perseverare in motu vel quiete, ex hisce corporum visorum proprietatibus colligimus. Extensio, durities, impenetrabilitas, mobilitas et vis inertiæ totius oritur ab extensione, duritie, impenetrabilitate, mobilitate et viribus inertiæ partium: et inde concludimus omnes omnium corporum partes minimas extendi et duras esse et impenetrabiles et mobiles et viribus inertiæ præditas. Et hoc est fundamentum philosophiæ totius. Porro corporum partes divisas et sibi mutuò contiguas ab invicem separari posse, ex phænomenis novimus, et partes indivisas in partes minores ratione distingui posse (b) ex mathematicâ certum est. Utrum verò partes illæ distinctæ et nondum divisæ per vires naturæ dividi et ab invicem separari possint, incertum est. At si vel unico constaret experimento quod particula aliqua indivisa, frangendo corpus durum et solidum, divisionem pateretur: (c) concluderemus vi hujus regulæ, quod non solum

(b) 50. * *Ex mathematicâ certum est.* Demonstrationes passim reperiuntur apud eos autores qui de materiæ divisibilitate tractant, ut ex incommensurabilitate lateris quadrati et ejus diagonalis, &c.

(c) * *Concluderemus vi hujus regulæ,* seu ex analogiâ naturæ quæ simplex esse solet et sibi semper consona. * Hinc patet differentia Newtonianismi et Hypotheseos Atomorum; atomistæ necessariò et metaphysicè atomos esse indivisibiles volunt, ut sint corporum unitates; metaphysicam hanc quæstionem missam facit Newtonus, et huc redit ejus sententia, si illæ partes quas Deus condidit indivisas, quæque ideo sunt corporum physica elementa seu physicæ monades, frangendo dividerentur, tunc exinde edocti, statueremus eas posse dividi, ideóque ulterius ulteriusque sine fine divisibiles esse diceremus, omnem hâc de re theoriam metaphysicam experimentis facile postponentes. Hæc etiam fluunt ex Lockii, de ratione quâ agnoscimus qualitates essentiales, doctrinâ; ignoramus planè, inquit ille, quænam qualitates cum subjecti naturâ sint conjunctæ si rem metaphysicè spectemus; sed fit ut experientiâ magistrâ, has aliasve qualitates ad universa subjecta quæ ad eamdem classem referimus pertinere deprehendamus, aut saltem ad omnia in quæ experimenta instituere licuit, et eas essentiales dicere lubuit. Hinc infert Newtonus, eâdem istâ regulâ quâ utimur vulgo ad agnoscendas eas qualitates, eâdem etiam regulâ in rebus philosophicis uti debemus ubi experientiâ quidem, sed minus obviâ ac vulgari, similem inductionem instituere dabitur. Adjungit quidem præter eam inductionem, caracterem hunc metaphysicum, ut illæ qualitates intendi ac remitti nequeant, etenim qualitates quæ remitterentur, gradatim eâdem ratione quâ remittuntur, aboleri possent, sicque universorum corporum qualitates non amplius forent.

partes divisæ separabiles essent, sed etiam quod indivisæ in infinitum dividi possent.

Denique si corpora omnia in circuitu terræ gravia esse in terram, idque pro quantitate materiæ in singulis, et lunam gravem esse in terram pro quantitate materiæ suæ, et vicissim mare nostrum grave esse in lunam, et planetas omnes graves esse in se mutuo, et cometarum similem esse gravitatem in Solem, per experimenta et observationes astronomicas universaliter constet: dicendum erit per hanc regulam quod corpora omnia in se mutuo gravitant. Nam et fortius erit argumentum ex phænomenis de gravitate universali, quàm de corporum impenetrabilitate: de quâ utique in corporibus cœlestibus nullum experimentum, nullam prorsus observationem habemus. Attamen gravitatem corporibus essentialem esse minimè affirmo. Per vim insitam intelligo solam vim inertiæ. Hæc immutabilis est. (d) Gravitas recedendo a terrâ, diminuitur.

REGULA IV.

In philosophiâ experimentali, propositiones ex phænomenis per inductionem collectæ, non obstantibus contrariis hypothesibus, pro veris aut accuratè aut quamproximè haberi debent, donec alia occurrerint phænomena, per quæ aut accuratiores reddantur aut exceptionibus obnoxiæ.

(e) Hoc fieri debet ne argumentum inductionis tollatur per hypotheses.

(d) * *Gravitas recedendo a terrâ diminuitur,* ut infrà demonstrabitur.

(e) * *Hoc fieri debet.* Hanc regulam in quæstionibus opticis hoc ferè modo exponit Newtonus. In physicis non secus ac in mathematicis scientiis, ad res difficiles inquirendas methodus analytica priùs est usurpanda quàm synthetica methodus in auxilium vocetur. Hæc prima methodus in eo posita est ut adhibeantur experimenta atquè observationes ex quibus deindè per inductionem conclusiones generales deducantur, non obstantibus contrariis hypothesibus, nisi eas aliquo experimento aut certâ aliquâ veritate nixas esse contigerit. Nam quod hypotheses spectat, eæ in philosophiâ experimentali locum habere non debent. Quamvis ratiocinia ab experimentis et observationibus per inductionem deducta ad stabiliendas modo demonstrativo conclusiones generales satis non sint, hic tamen ratiocinandi modus est omnium quos rerum naturâ admittere possit optimus, isque eò tutior reputari debet quò generalior est inductio; si autem nulla repugnaverint phænomena, generalem conclusionem deducere licebit. Sin verò deinceps contraria occurrant phænomena, exceptionibus necessariis limitanda erit atquè restringenda conclusio. Hujus analyseos auxilio a compositis ad simplicia, a motibus ad vires producentes, et generatim ab effectibus ad eorum causas perveniri potest. Quod ad synthesim pertinet, hæc causas cognitas atquè probatas tanquam principia assumit quorum ope phænomena indè nota explicantur.

PHÆNOMENA.

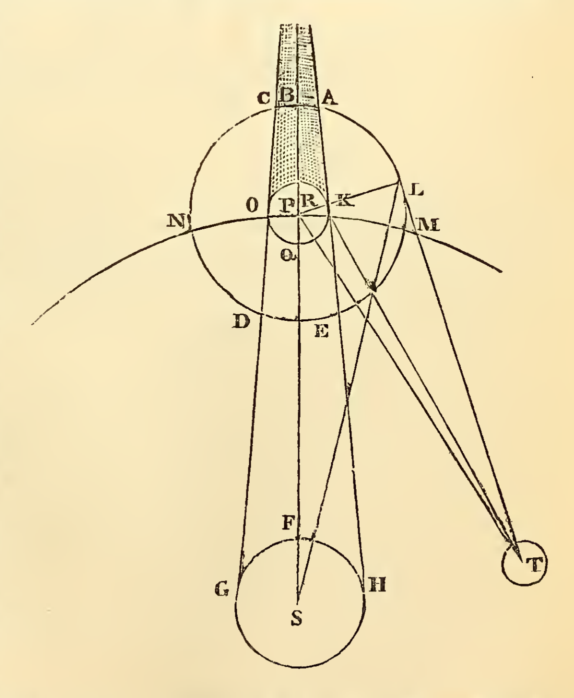
PHÆNOMENON I.

(f) *Planetas circumjoviales, radiis ad centrum jovis ductis, areas describere temporibus proportionales, eorumque tempora periodica, stellis fixis quiescentibus, esse in ratione sesquiplicatâ distantiarum ab ipsius centro.*

(f) 51. * *Planetæ circumjoviales.*

Lemma . . . . . Satellitum Jovis et Saturni orbes ac motus determinare.

Sit H F G H Sol, cujus centrum S, T Terra; K O Q Jupiter vel Saturnus circà Solem S describens orbitam M P N, A C D E L orbita satellitis; radii Solis extremi G O, H R paulo plusquam dimidium planetæ P illustrant, et producti umbram conicam R A C O terminant, cujus axis est recta S P B per Solis et planetæ centra transiens. Dum satelles in orbitâ suâ L C D E girans, conum umbrosum attingit in A, in umbram immergitur et cessat videri; deindè ex umbrâ emergens in C rursus apparet. Attamen satellitum Saturni, ob nimiam illorum a Sole et Tellure distantiam, eclipses observari huc usquè non potuerunt, sed omnium satellitum Jovis eclipses e terrâ conspici possunt, cum hoc tamen discrimine quod immersiones et emersiones quarti et tertii et nonnunquam secundi in eâdem eclipsi cernantur, primi verò immersio tantum vel emersio observari possit. Sit jam satelles in L, et ductis e terrâ T rectis T P, T L, angulus P T L, dicitur elongatio seu digressio geocentrica satellitis L a planetâ primario P. Ducatur etiam recta T K discum primarii planetæ tangens in K, et angulus P T K erit semidiameter primarii e tellure visa seu apparens, ideóque elongatio geocentrica erit ad semidiametrum apparentem ut angulus P T L ad angulum P T K. Observatis pluribus hujusmodi elongationibus geocentricis et semidiametris apparentibus, iisque inter se collatis, inveniuntur elongationes maximæ ubi ratio anguli P T L ad angulum P T K maxima est, et hoc modo observatum est elongationes maximas geocentricas ejusdem satellitis in variis orbitæ suæ locis æquales esse inter se quam proximè, ideóque satellites describunt circulos planetæ primario concentricos. Quia ergò, ubi



elongatio maxima est, P K est quamproximè ad P L, ut angulus P T K ad angulum P T L, ob datam rationem horum angulorum et datam quoque semidiametrum P K, datur et P L, seu distantia satellitis a centro primarii. Angulus

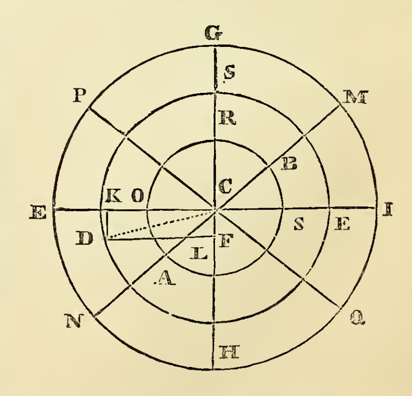
P S L sub quo e centro Solis S videretur distantia satellitis a centro primarii P, dicitur ejus elongatio heliocentrica; quæ maxima est, cùm angulus S P L rectus est. Quia verò P L data est, elongationes maximæ heliocentrica et geocentrica æquales sunt, ubi planeta P a Sole et terrâ æquè distat.

Cognitis orbitarum diametris, tempora periodica satellitum inveniri possunt per eorum eclipses maximæ durationis, atque etiam per transitum satellitis aut umbræ illius per medium discum planetæ primarii. Nam cùm radius circuli sit æqualis arcui grad. 57.29578, (Lib. I. not. 372.) et data sit ratio radii P L ad diametrum planetæ primarii O R, erit quamproximè ut P L ad O R, ità gradus 57.29578. ad numerum graduum arcûs exigui C A, qui ferè æqualis est diametro O R, ob parallelas O C, R A. Fiat deindè ut numerus graduum aut partium gradûs C A vel O R ad gradus 360, ità tempus quo describitur C A vel O R ad tempus periodicum satellitis, quod ità dabitur. Suppositâ theoriâ primarii planetæ per observationes determinatâ, tempora periodica inveniuntur mensurando intervalla temporis inter duas satellitum conjunctiones, vel etiam inter duas digressiones maximas.

52. Satellitum a centro Jovis distantias observandi et in diametri partibus æstimandi triplicem methodum describit Clariss. Cassinus in Elementis Astronomiæ anno 1740 editis.

1°. Sit A R B Jupiter, D S E D orbita satellitis, micrometro capiatur diameter Jovis A B, deinde ubi satelles in maximâ elongatione versatur, capiatur distantia D C, inter centrum Jovis C, et satellitem D, quo facto, distantia D C, conferatur cum diametro Jovis, habebitur distantia satellitis a centro Jovis in partibus diametri.

2°. Adhibendum est telescopium in cujus foco aptantur fila quatuor, quorum duo G H, E I sese perpendiculariter secent, reliqua duo N M, P Q his ad angulos semirectos insistant in communi sectione C. Quibus ità paratis dirigatur telescopium et continuò vertatur, donec centrum Jovis C, motu diurno unum ex his filis, puta E I, percurrere videatur, in quo situ filum G H circulum aliquem horarium repræsentabit. Observetur deindè differentia temporis inter appulsum centri Jovis et appulsum satellitis in maximâ suâ elongatione versantis ad eundem circulum horarium G H, differentia temporis convertatur in gradus et minuta, ità ut quatuor minutis horariis respondeat gradus unus, habebitur portio D F vel K C, circuli paralleli Jovis. Observetur etiam differentia temporis inter appulsum satellitis ad L, et appulsum ad F, quæ differentia simili modo in gradus circuli paralleli graduumque partes convertatur, habebitur L F, cui æqualis est F C, ob angulos L C F, F L C, semirectos. Datis verò D F



et F C, datur D C. Jam conferatur D C, cum diametro Jovis A B vel O S, cujus diametri mensura habebitur, si tempus quo diameter per filum horarium G H transit, in gradus et minuta convertatur, utriusque diametri D C,

Constat ex observationibus astronomicis. ([g]) Orbes norum planetarum non differunt sensibiliter a circulis Jovi concentricis, et motus eorum in his circulis uniformes deprehenduntur. Tempora verò periodica esse in sesquiplicatâ ratione semidiametrorum orbium consentiunt astronomi; et idem ex tabulâ sequente manifestum est.

([h]) *Satellitum Jovialium tempora periodica.*

$1^d. 18^h. 27'. 34''. 3^d. 13^h. 13'. 42''. 7^d. 3^h. 42'. 36''. 16^d. 16^h. 32'. 9''.$

([i]) *Distantiæ satellitum a centro Jovis.*

Ex observationibus	1	2	3	4	
Borelli	$5\frac{2}{3}$	$8\frac{2}{3}$	14	$24\frac{2}{3}$	Semidiam. Jovis
Townlei *per microm.*	5,52	8,78	13,47	24,72	
Cassini *per telescop.*	5	8	13	23	
Cassini *per eclips. satell.*	$5\frac{2}{3}$	9	$14\frac{23}{60}$	$25\frac{3}{10}$	
([l]) *Ex temporibus periodicis.*	5,667	9,017	14,384	25,299	

O C obtinebitur ratio, et eorumdem absoluta magnitudo in gradibus circuli maximi sphæræ habebitur, gradibus circuli paralleli Jovis ad gradus circuli maximi reductis, dicendo, ut radius circuli maximi ad radium paralleli, ità numerus graduum et minutorum in arcu circuli paralleli ad numerum graduum et minutorum in arcu circuli maximi. Nam in circulis inæqualibus, gradus qui æqualibus arcubus continentur, esse reciprocè ut circulorum radios, ex elementis patet.

3°. In eclipsibus satellitum centralibus, dum nempe duratio est omnium maxima, observetur tempus quod ab ingressu centri satellitis in discum Jovis usque ad illius egressum interfluxit. Deindè fiat, ut tempus periodicum satellitis ad tempus moræ in disco Jovis, ità 360° ad quartum proportionalem, hoc est, ad gradus quos continet arcus æqualis disco Jovis, satellitis orbitæ applicato. Iterum (ex trigon.) inferatur, ut sinus semissis ejusdem arcûs ad sinum totum, ità semidiameter Jovis ad semidiametrum orbitæ satellitis, ideóque comparari poterit semidiameter Jovis cum semidiametro orbitæ satellitis, hoc est, cum distantiâ satellitis a centro, ac proindè habebitur distantia satellitis a centro Jovis in partibus semidiametri Jovis.

Quod Saturnum spectat, solis oculis telescopio adjutis distantias satellitum a centro Saturni cum diametro annuli comparare solent astronomi.

([g]) * *Orbes horum planetarum* (51.)

([h]) * *Satellitum Jovialium tempora periodica.* (ibid.)

* In novissimo Cassini opere suprà laudato tempora periodica paulo majora constituuntur, scilicet, primus satelles 62″, 2us. sat. 4′ 12″; 3us. sat. 17′; 4us. sat. 1^h, 32′, 58′, tardius revolutiones suas absolvere statuuntur; illæ autem differentiæ totius temporis periodici respectu minimæ sunt, maximæ enim differentiæ non excedunt trecentesimam partem durationis totius revolutionis.

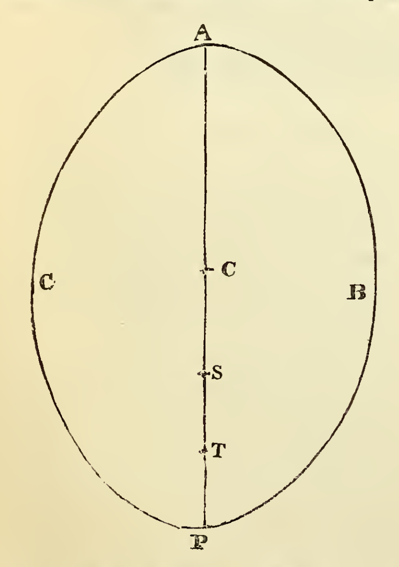
([i]) * *Distantiæ satellitum a centro Jovis* (52.)

([l]) * *Ex temporibus periodicis.* Newtonus computum iniit hoc modo. Assumpsit distantiam observatam primi satellitis $5\frac{2}{3}$, seu 5′667, et deindè per tempora periodica etiam observata quæsivit aliorum satellitum distantias, supponendo quadrata temporum periodicorum cubis distantiarum proportionalia. Nam si logarithmi temporum periodicorum primi et secundi satellitis dicantur l, L, et logarithmi distantiarum d, D, erit 2 l ad 2 L, arithmeticè ut 3 d ad 3 D, ideóque $2\,l + 3\,D = 2\,L + 3\,d$, unde invenitur $D = d + \frac{2\,L}{3} - \frac{2}{3}\,l$. Est autem $d = 0{,}7533532$, $\frac{2}{3}\,L = 2{,}324591$, et $\frac{2}{3}\,l = 2{,}1228512$, quare habetur $D = 0{,}955093$, cui respondet numerus 9,07, uti Newtonus invenit; et ità inveniuntur cæterorum satellitum distantiæ per eorum tempora periodica.

Elongationes satellitum Jovis et diametrum ejus D. Pound micrometris optimis determinavit ut sequitur. (m) Elongatio maxima heliocentrica satellitis quarti a centro Jovis micrometro in tubo quindecim pedes longo capta fuit, et prodiit in mediocri Jovis a Terrâ distantiâ 8′. 16″ circiter. Ea satellitis tertii micrometro in telescopio pedes 123 longo capta fuit, et prodiit in eâdem Jovis a Terrâ distantiâ 4′. 42″. Elongationes maximæ reliquorum satellitum in eâdem Jovis a Terrâ distantiâ ex temporibus periodicis prodeunt 2′. 56″. 47‴, et 1′. 51″. 6‴.

Diameter Jovis micrometro in telescopio pedes 123 longo sæpius capta fuit, (n) et ad mediocrem Jovis a Sole vel Terrâ distantiam reducta, semper minor prodiit quàm 40″, nunquam minor quàm 38″, sæpius 39″. In telescopiis brevioribus hæc diameter est 40″ vel 41″. (o) Nam lux Jovis per inæqua-

(m) 53. * *Elongatio maxima heliocentrica* satellitis in mediocri Jovis a Sole distantiâ æqualis est ipsius elongationi maximæ geocentricæ in mediocri distantiâ ejusdem Jovis a Terrâ. Sit enim A B P G orbita Jovis, Sol in S, A aphe-



lium Jovis, P perihelium, T Terra, erit A S maxima distantia Jovis a Sole, S P minima; A T verò maxima distantia Jovis a Terrâ, P T minima, et ideò mediocris distantia Jovis a Sole seu $\frac{1}{2}$ A P $= \frac{1}{2}$ A S $+ \frac{1}{2}$ S P, et mediocris distantia Jovis a Terrâ erit $\frac{1}{2}$ A T $+ \frac{1}{2}$ T P $= \frac{1}{2}$ A P. Quare duæ illæ mediocres distantiæ sunt æquales, ideóque elongationes maximæ heliocentricæ et geocentricæ in mediocribus illis distantiis sunt etiam æquales.

(n) 54. * *Et ad mediocrem Jovis a Sole.* Datur positio lineæ ducta ab oculo spectatoris ad Jovem tempore observationis, et per theoriam Solis, datur etiam positio lineæ ductæ ab oculo ad Solem (47) eodem tempore; unde datur angulus his duabus lineis interceptus, seu elongatio Jovis a Sole. Insuper datur, per theoriam Jovis, locus ejus in propriâ orbitâ, et ideò notus est angulus quem comprehendunt duæ lineæ a centro Solis ductæ ad Jovem et ad Terram seu oculum observatoris. In triangulo igitur ex tribus illis lineis facto cujus angulus unus est in oculo spectatoris seu in Terrâ, alter in Sole et tertius in Jove, dantur anguli omnes, et exindè datur ratio laterum seu ratio distantiæ Jovis a Sole ad distantiam Jovis a Terrâ tempore observationis. Datur verò, per theoriam Jovis ex observationibus constitutam, ratio distantiæ Jovis a Sole tempore observationis ad ipsius distantiam mediocrem a Sole vel a Terrâ. Quare datur ratio distantiæ Jovis a Terrâ tempore observationis ad distantiam ejus mediocrem a Sole vel a Terrâ. Sed diametri apparentes Jovis e Terrâ visi sunt inter se inversè ut distantiæ Jovis a Terrâ, dabitur itaque ratio diametri apparentis tempore observationis ad diametrum apparentem in mediocri distantiâ Jovis a Terrâ vel Sole.

(o) 55. * *Nam lux Jovis.* Newtonus Prop. VII. Lib. I. Optices, experimentis et calculo invenit quod, si ex puncto lucido in axem telescopii posito ad ingentem distantiam, radii in vitrum objectivum incidant axi paralleli, distincta et minima hujus puncti imago in vitri foco depicta, est circulus, non verò punctum ut esse deberet, obstante nimirum non tantum vitri sphæricitate, sed præcipuè radiorum inæquali refrangibilitate quâ lux ea dilatatur. Nam in vitro plano convexo cujus convexitas puncto lucido obvertitur, cujusque sphæricitas diametrum habet 100 ped. seu 1200 digit. apertura verò 4 digit. diameter circelli qui ex vitri sphæricitate oritur erit ad diametrum ejusdem circelli maximè distincti

lem refrangibilitatem nonnihil dilatatur, et hæc dilatatio minorem habet rationem ad diametrum Jovis in longioribus et perfectioribus telescopiis quàm in brevioribus et minus perfectis. Tempora quibus satellites duo, primus ac tertius, transibant per corpus Jovis, ab initio ingressus ad initium exitus, et ab ingressu completo ad exitum completum, observata sunt ope telescopii ejusdem longioris. (p) Et diameter Jovis in mediocri ejus a Terrâ distantiâ prodiit per transitum primi satellitis $37\frac{1}{8}''$, et per transitum tertii $37\frac{3}{8}''$. Tempus etiam quo umbra primi satellitis transiit

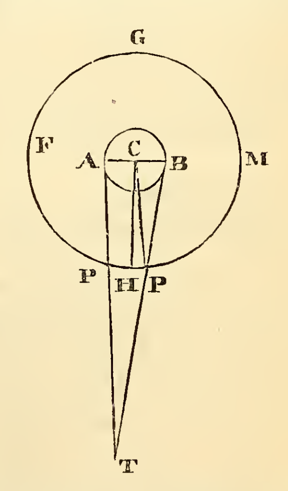
qui ex inæquali refrangibilitate provenit ut $\frac{961}{72000000}$ ad $\frac{4}{250}$, seu ut 1 ad 1200; distincta siquidem ejus puncti lucidi imago et maximè splendida continet partem 250^{am}. aperturæ vitri objectivi optimè elaborati, neglectâ luce dibili et subobscurâ quæ imaginem illam circumdat. Undè in telescopio cujus apertura est 4 digit. et longitudo 100 ped. hujus imaginis diameter trans vitrum oculare visa occupat 2″ 4‴ vel 3″, et in telescopio cujus apertura est duorum digitorum et longitudo 20 aut 30 ped. occupabit imago 5″ vel 6″. Itaque in telescopio optimo Hugeniano 123 ped. error erit circiter 2″ in minoribus major.

* In telescopiis autem rectè constitutis sive secundum theoriam Prop. LVI. Dioptrices Hughenii, id curatur ut aberratio lucis circa imaginem puncti lucidi æquale occupet spatium super retinâ, sed imago ipsius objecti in telescopiis majoribus majus occupat spatium in retinâ, idque secundum rationem radicum quadratarum longitudinis telescopiorum. Ergo lux erratica quæ dilatat objecti imaginem ab utraque ejus extremitate, minorem habet rationem ad illius objecti apparentiam in majoribus telescopiis quàm in minoribus, in ratione nempe inversâ radicum quadratarum longitudinis telescopiorum.

Hæc omnia ex doctrinâ Newtonianâ circa colores ita jam sunt cognita ut ea fusiùs et accuratiùs demonstrare necessarium non judicemus.

56. Hugenius planetarum lucem obstaculo quodam intercipiens majores invenit planetarum diametros quàm ab aliis micrometro definitum est; nam lux erratica, ubi tegitur planeta, vividioribus radiis minus extenuatur, ideóque latius propagari videtur. Contrariam ob causam fit quod planetæ in Sole visi, dilatatâ luce non parum attenuentur. Mercurius in Sole, Hevelio, Galletio et Halleio observantibus, non superavit 12″ vel 15″, et Venus Crabirio solum 1′ 3″, Horroxio 1′ 12″ occupare visa est, quæ tamen juxtà mensuras Hevelii et Hugenii extrà discum Solis captas implere debuisset 84″ ad minimum. Sic et Lunæ diameter apparens quæ anno 1682, paucis diebus antè et post eclipsim Solis mensurata fuit in observatorio Parisiensi 31′ 30″, in ipsâ eclipsi non superabat 30′ vel 30′ 5″. Quarè patet diametros planetarum extrà Solem minuendas esse, et intrà Solem augendas minutis aliquot secundis.

(p) 57. * *Et diameter Jovis in mediocri*, &c. Sit T Tellus, A B diameter Jovis, P F G M orbita satellitis, ductis e Terrâ radiis T A, T B fere parallelis, dum satelles describit arcum P p; videbitur e Terrâ describere diametrum Jovis A B cui æqualis est arcus P p quamproximè, propter distantiæ T P magnitudinem. Datis autem tempore periodico et tempore quo describitur P p, datur ratio P p ad totum circulum,



seu datur arcus P p, in gradibus vel partibus gradus, et inde datur dimidius arcus P H, hincque habetur angulus P C H seu A C P. Jam verò datur P C ob datas per observationem elongationes maximas satellitum a centro Jovis in mediocri Jovis a Tellure distantiâ; quarè si fiat A B ad P C ut duplus sinus anguli dati P C H, ad sinum totum, dabitur (ex trig.) diameter apparens Jovis seu angulus A T B, sub quo videtur in mediocri ejus a Tellure distantiâ. Eodem modo patet determinari diametrum Jovis per transitum umbræ hanc diametrum percurrentis.

per corpus Jovis, observatum fuit, et inde diameter Jovis in mediocri ejus a Terrâ distantiâ prodiit 37″ circiter. Assumamus diametrum ejus esse $37\frac{1}{4}''$ quamproximè; et elongationes maximæ satellitis primi, secundi, tertii, et quarti æquales erunt semidiametris Jovis 5,965, 9,494, 15,141, et 26,63 respectivè.

PHÆNOMENON II.

Planetas circumsaturnios, radiis ad Saturnum ductis, areas describere temporibus proportionales, et eorum tempora periodica, stellis fixis quiescentibus, esse in ratione sesquiplicatâ distantiarum ab ipsius centro.

(†) Cassinus utique ex observationibus suis distantias eorum a centro Saturni et periodica tempora hujusmodi esse statuit.

Satellitum Saturniorum tempora periodica.

$1^d. 21^h. 18'. 27''.$	$2^d. 17^h. 41'. 22''.$	$4^d. 12^h. 25'. 12''.$
$15^d. 22^h. 41'. 14''.$	$79^d. 7^h. 48'. 00'.$	

Distantiæ satellitum a centro Saturni in semidiametris annuli.

Ex observationibus	$1\frac{19}{20}$.	$2\frac{1}{2}$.	$3\frac{1}{2}$.	8.	24.
Ex temporibus periodicis.	1,93	2,47.	3,45.	8.	23,35.

Quarti satellitis elongatio maxima a centro Saturni ex observationibus colligi solet esse semidiametrorum octo quamproximè. At elongatio maxima satellitis hujus a centro Saturni, micrometro optimo in telescopio Hugeniano pedes 123 longo capta, prodiit semidiametrorum octo cum septem decimis partibus semidiametri. Et ex hâc observatione et tem-

(†) *Cassinus utique*, &c. Hæc ex Philosophicis Transactionibus n. 187. sunt deprompta: exigua quædam est horum differentia a numeris quos in Elementis Astronomiæ assignat Cassinus filius; ille ita determinat satellitum Sat. tempora periodica, et distantias.

Primi	$1^d. 21^h. 18'. 27''.$	1. 933, &c.
Secundi	$2^d. 17^h. 44'. 22''.$	2. 5.
Tertii	$4^d. 12^h. 25'. 12''.$	3. 5.
Quarti	$15^d. 22^h. 34'. 38''.$	8.
Quinti	$79^d. 7^h. 47'. 0''.$	23. paulo plus.

Observat autem primi et secundi satellitis distantias a Saturno æstimatione solummodo potuisse determinari; motibus verò eorum satis accuratè nunc cognitis ex unius nempe quarti cognitâ distantiâ 8 semi-diametrorum annuli per regulam Kepleri reliquorum distantias posse exquiri, atque ita inveniri.

Distantia primi	1.	93.
Secundi	2.	47.
Tertii	3.	45.
Quarti (ex observat.)	8.	
Quinti	23.	23.

Quæ quidem, inquit, adeò congruunt cum observationibus immediatis, ut sine errore sensibili adhiberi possint. *Elem. Astr. Tom. I. pag.* 640. *et seq.*

poribus periodicis, distantiæ satellitum a centro Saturni in semi-diametris annuli sunt 2,1. 2,69. 3,75. 8,7. et 25,35. Saturni diameter in eodem telescopio erat ad diametrum annuli ut 3 ad 7, et diameter annuli diebus Maii 28 et 29 anni 1719. prodiit 43″. (q) Et inde diameter annuli in mediocri Saturni a Terrâ distantiâ est 42″. et diameter Saturni 18″. (r) Hæc ita sunt in telescopiis longissimis et optimis, propterea quod magnitudines apparentes corporum cœlestium in longioribus telescopiis majorem habeant proportionem ad dilatationem lucis in terminis illorum corporum quàm in brevioribus. Si rejiciatur lux omnis erratica, manebit diameter Saturni haud major quàm 16″.

PHÆNOMENON III.

Planetas quinque primarios, Mercurium, Venerem, Martem, Jovem et Saturnum orbibus suis Solem cingere.

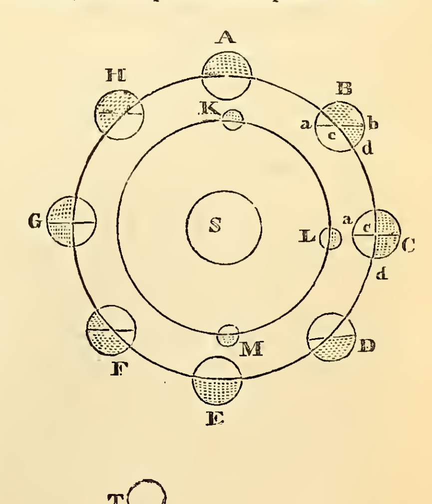
Mercurium et Venerem circa Solem revolvi (s) ex eorum phasibus lunaribus demonstratur. Plenâ facie lucentes ultra Solem siti sunt;

(q) * *Et inde diameter annuli.* Quia diametri apparentes sunt in distantiarum ratione reciprocâ, datis diametro annuli diebus Maii 28 et 29 anno 1719, et distantiâ Saturni a Terrâ iisdem diebus datâ (per theoriam planetæ) dabitur quoque diameter annuli in datâ mediocri distantiâ Saturni a Terrâ, hæc autem diameter prodiit 42″; sed Saturni diameter erat ad diametrum annuli ut 3 ad 7 (per observ.) quarè diameter Saturni in mediocri a Terrâ distantiâ est 18″.

(r) * *Hæc ita sunt* (55.) * Si in hoc telescopio lux erratica subtendat angulum duorum secundorum, fiet diameter annuli 40″ et Saturni 16″ ut revera sint in ratione 5 ad 2. hinc autem ut id obiter notemus, cùm parallaxis Solis in distantiâ Terræ mediocri a Sole sit 10″ sive diameter Telluris a Sole tunc visa sit 20″, distantia verò mediocris Terræ a Sole sit ad mediocrem distantiam Saturni a Terrâ vel a Sole, quod idem est (n. 53.) ut 100 ad 954, hinc diameter Terræ erit ad diametrum annuli ut 100 ad 1908, sive ut 1 ad 19 et ad diametrum ipsius Saturni ut 1 ad $7\frac{3}{5}$.

Pariter, cùm diameter Jovis in mediocri ejus a Sole distantiâ sit $37\frac{1}{4}''$ sitque mediocris distantia Terræ ad mediocrem distantiam Jovis a Sole ut 10 ad 52; erit diameter Terræ, ad diametrum Jovis ut 1 ad $\frac{23 \times 37\frac{1}{4}}{200}$, sive ut 1 ad 9.685; sicque diameter Jovis est circiter dimidia diametri annuli Saturni, et est ad ipsius Saturni diametrum ut 5 ad 4. Solis autem diameter vera est circiter decupla diametri Jovis.

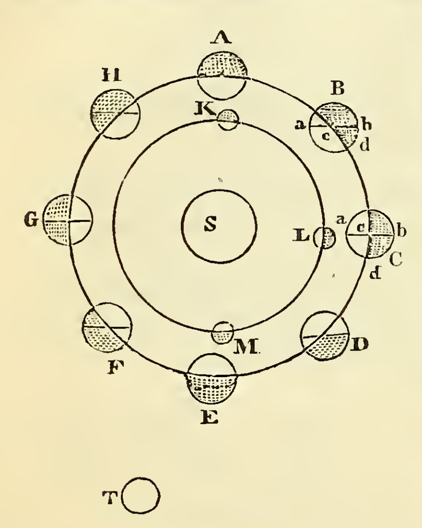
(s) * *Ex eorum phasibus lunaribus.* Si Veneris faciem telescopio contemplemur, in unâ ejus conjunctione cum Sole, plenâ facie fulgere cernitur, deindè phases habere phasibus lunari-



bus simillimas partemque illuminatam Soli constanter obvertere videtur. Dum verò ad alteram conjunctionem cum Sole pervenit, tenebris obvolvitur, et nonnunquam per discum Solis

dimidiatâ e regione solis; falcatâ cis Solem, per discum ejus ad modum macularum nonnunquam transeuntes. Ex Martis quoque plenâ facie prope Solis conjunctionem, et gibbosâ in quadraturis, certum est, quod is Solem ambit. De Jove etiam et Saturno idem ex eorum phasibus semper plenis demonstratur: hos enim luce a Sole mutuatâ splendere ex umbris satellitum in ipsos projectis manifestum est.

ad modum maculæ nigræ et rotundæ transit, nunquam verò Soli opponitur, neque ab eo digreditur ultrà gradus 47. Eadem ferè de Mercurio observantur quantùm licet per ejus



exiguitatem, cum hoc tamen discrimine quod ejus elongationes maximæ a Sole 28 gradus nunquam superent. Sunt igitur Venus et Mercurius corpora opaca et rotunda quorum pars circiter dimidia Soli obversa illustratur, et pars altera a Sole aversa lumine privatur. Undè cùm Venus et Mercurius in unâ conjunctione in E vel M hemisphærium obscurum Telluri T obvertant, hemisphærium verò illustratum Soli S, necesse est ut in illâ conjunctione inter Solem et Tellurem constituantur; e contrà ubi in alterâ proximè sequenti conjunctione in A vel K versantur, totam faciem illustratam et Soli obversam e Tellure T, observamus, hinc necesse est ut tunc temporis Sol S, inter ipsos atquè Tellurem T positus sit. Ubi verò Venus aut Mercurius a Sole digreditur, primum gibbosa apparet, tum dimidiatâ facie lucet, posteà falcata fit et denique tota obscuratur ut in locis B, C, D, F, et contrariâ ratione splendescere in locis, F, G, H, videtur. Si verò ex Tellure T, ad Veneris centrum ducatur linea recta ad quam ducatur planum perpendiculare a b, per centrum Veneris transiens, ea pars tantum apparet quæ est inter planum a c, et planum c d, undè cùm projectio plani C c d, sit ellipsis, hinc gibbosa apparet planetæ pars visa in B, in C dimidiata, et in D, falcata, &c., quia a puncto A, conjunctionis superioris cum Sole, elongatio seu angulus A T B, crescit usque ad situm C e regione Solis, ubi digressio maxima est et deindè decrescit in D, atque evanescit in E, ac posteà rursùs crescit usque ad G, ac deindè decrescit et denique rursùs evanescit in A. Evidens ergò est quod Venus et Mercurius circà Solem revolvantur in orbitis quæ Tellurem excludunt. Jam cùm maximæ elongationes Veneris a Sole majores sint elongationibus Mercurii, necesse est ut orbita Veneris orbitam Mercurii complectatur.

Mars, Jupiter et Saturnus Soli S oppositi, e Tellure M in E plenâ facie lucentes conspiciuntur, ideóque Tellus tunc temporis inter Solem et planetas illos collocatur. At verò in conjunctione ut in A, iidem planetæ pleno orbe fulgent, proindéque partem illustratam Soli ac Terræ obvertentes, sunt ultrà Solem positi; deindè verò digrediuntur a Sole, et Mars quidem in quadrato cum Sole aspectu ut in C, aliquantulum gibbosus apparet, quod hemisphærium ipsius illustratum et Soli obversum non possit totum Terræ sensibiliter obverti, quia non satis magna est ejus a Tellure distantia. At Jupiter et Saturnus cùm longiùs a Sole et Tellure distent, hemisphærium illuminatum Soli ac Telluri semper obvertunt sensibiliter; nam cùm (ex obs.) Mars Jovem, et Jupiter Saturnum nonnunquam tegant, necesse est ut orbita Saturni orbitam Jovis, et hæc orbitam Martis complectatur, tres verò orbitæ illæ Terram et Solem ambiant. Quia verò diametri apparentes planetarum superiorum multò minores videntur in oppositionibus quàm in conjunctionibus planetarum, et distantiæ a Terrâ sunt ut diametri apparentes inversè, necesse est ut orbitæ Martis, Jovis et Saturni sint Telluri admodum excentricæ.

PHÆNOMENON IV.

Planetarum quinque primariorum, et vel Solis circa Terram vel Terræ circa Solem tempora periodica, stellis fixis quiescentibus, esse in ratione sesquiplicatâ mediocrium distantiarum a Sole.

Hæc a Keplero inventa ratio in confesso est apud omnes. (t) Eadem utique sunt tempora periodica, eædemque orbium dimensiones, sive Sol circa Terram, sive Terra circa Solem revolvatur. Ac de mensurâ quidem temporum periodicorum convenit inter astronomos universos. Magnitudines autem orbium Keplerus et Bullialdus omnium diligentissimè ex observationibus determinaverunt: et distantiæ mediocres, quæ temporibus periodicis respondent, non differunt sensibiliter a distantiis quas illi invenerunt, suntque inter ipsas ut plurimum intermediæ; uti in tabulâ sequente videre licet.

Planetarum ac Telluris tempora periodica circa Solem respectu fixarum, in diebus et partibus decimalibus diei.

♄	♃	♂	♁	♀	☿
10759,275.	4332,514.	686,9785.	365,2565.	224,6176.	87,9692.

(t) 58. * *Eadem utiquè sunt tempora periodica.* Tempora periodica planetarum circà Solem hoc modo possunt inveniri. Observentur planetarum oppositiones et conjunctiones cum Sole, tunc enim planeta e Sole videtur in loco qui oppositus est loco Solis e Terrâ visi, undè dato Solis loco datur planetæ locus in cœlo. Jam verò observatis pluribus oppositionibus cum temporum intervallis inter singulas oppositiones interceptis, datur tempus quo planeta circà Solem motu vero describit angulos ad Solem inter oppositiones contentos, et per regulam proportionis habetur tempus quo planeta 360 gradus seu revolutionem unam absolvit. Tempore periodico ità crassè determinato, habetur numerus revolutionum planetæ tempore satis longo peractarum. Si autem capiantur duæ oppositiones valdè dissitæ iisque addatur arcus necessarius ut planeta ac idem orbitæ suæ punctum redeat, totumque tempus dividatur per numerum revolutionum, habebitur tempus periodicum accuratiùs, supponendo quod aphelia planetæ non aliter moveantur quàm fixæ. Sufficit verò in his Newtoni phænomenis ut hæc tempora, neglectis minutiis, desiniantur.

Potest etiam tempus periodicum determinari per observationes latitudinum planetæ. Nam dum latitudo nulla est, planeta versatur in plano eclipticæ, seu in nodo orbitæ suæ; invenitur autem tempus, ubi latitudo nulla est, observando illam antequam nulla sit et ubi decrescit, aut postquam nulla fuit et ubi crescit, atquè per regulam proportionis ex incrementis vel decrementis, determinatur tempus, quandò nulla fuit. Si itaque observetur hoc modo tempus elapsum inter appulsum planetæ ad nodum, et reditum ejusdem ad eundem nodum, hoc erit tempus periodicum planetæ; constat enim planetarum nodos vix in unâ revolutione planetæ moveri.

59. Longitudo ac latitudo planetæ observari possunt (per not. 17. 18. 20.) et indè determinatur tempus syzigiarum, cùm videlicet longitudo planetæ non differt a longitudine Solis quo tempore fit conjunctio, vel differt semicirculo ut in oppositione. Quod Mercurium spectat, determinatur ipsius conjunctio inferior cum Sole per ipsius transitum in disco Solis qui vicibus octo observatus fuit, dum transitus Veneris semel tantum visus est, in his verò non supponitur Telluris motus nec quies. Determinato tempore periodico planetæ, habetur motus ejus medius in orbitâ, et ex observatis pluribus locis planetæ e Sole visis per oppositiones vel conjunctiones aut per digressiones, dantur etiam ipsius motus veri, ac proindè dantur differentiæ inter motus veros et motus medios. Indè verò

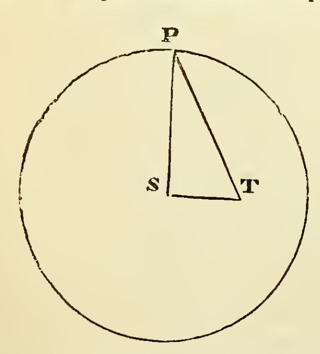
Planetarum ac Telluris distantiæ (u) *mediocres a Sole.*

	♄	♃	♂	♁	♀	☿
Secundum Keplerum	951000.	519650.	152350.	100000.	72400.	38806.
Secundum Bullialdum	954198.	522520.	152350.	100000.	72398.	38585.
Secundum tempora periodica	954006.	520096.	152369.	100000.	72333.	38710.

(x) De distantiis Mercurii et Veneris a Sole disputandi non est locus, cùm hæ per eorum elongationes a Sole determinentur. De distantiis etiam superiorum planetarum a Sole tollitur omnis disputatio per eclipses

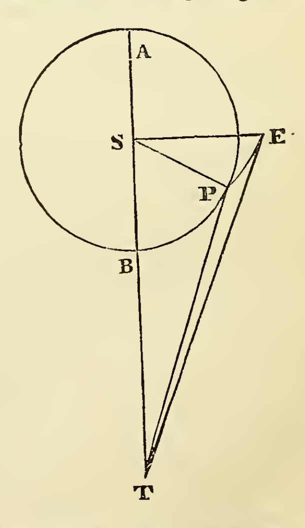
determinantur aphelia et perihelia planetarum cum ipsorum excentricitate, atquè construi possunt tabulæ per quas tempore quolibet inveniri potest eorum locus in propriâ orbitâ. Quæ omnia quomodò ex observationibus determinari possint independenter ab hypothesibus, Tom. I. Element. Astronom. exposuit celeberrimus Cassinus.

(u) 60. * *Distantiæ mediocres a Sole.* Planetarum distantiæ a Sole per observationes possunt definiri. Hic autem non quæruntur absolutæ distantiæ planetarum a Sole, sed solummodò rationes illarum distantiarum ad distantias Solis a Tellure. Itaque sit Sol in S, Terra quiescens vel mota in T, planeta in P, observetur locus planetæ in cœlo, et per theoriam Solis, dabitur locus Solis tempore observationis seu positio



lineæ T S, undè datur angulus S T P. Quæratur etiam locus planetæ P, in propriâ orbitâ per theoriam planetæ, et quia datur locus Terræ T e Sole visus atque locus planetæ P, dabitur angulus P S T. In triangulo igitur P S T, dantur tres anguli, ac proindè datur etiam ratio laterum P S et S T; sed, per theoriam Solis, datur ratio S T ad mediocrem distantiam Solis a Terrâ, et per theoriam planetæ P, datur ratio distantiæ S P, ad mediocrem distantiam planetæ a Sole, ergò dabitur ratio distantiæ mediocris planetæ a Sole ad distantiam mediocrem Solis a Terrâ. Negligimus autem minutias quæ ex inclinatione orbium planetarum ad eclipticam oriri possunt, et præthereà observationes possunt fieri dum planeta est propè nodos, ubi ferè in plano eclipticæ versatur.

(x) 61. * *De distantiis Mercurii et Veneris.* Sit A B P orbita Veneris, S Sol, Terra T, Venus P in maximâ suâ elongatione. Quia orbita Veneris est ferè circularis, linea T P tanget orbitam in P, ideóque angulus S P T,



rectus. Undè est ut sinus totus ad sinum elongationis maximæ seu anguli observati S T P, ità distantia Solis a Terrâ S T ad distantiam S P, Veneris a Sole. Supponitur autem orbita circularis, quia Venus nunquam digreditur a Sole ultrà 47° 30′ et ejus elongationes maximæ nunquam minores sunt gradibus 45° 30′. Quarè angulus S P T est ferè rectus. Si verò considerare velimus inclinationem orbitæ Veneris, sit

satellitum Jovis. (y) Etenim per eclipses illas determinatur positio umbræ quam Jupiter projicit, et eo nomine habetur Jovis longitudo heliocentrica. Ex longitudinibus autem heliocentricâ et geocentricâ inter se collatis determinatur distantia Jovis.

PHÆNOMENON V.

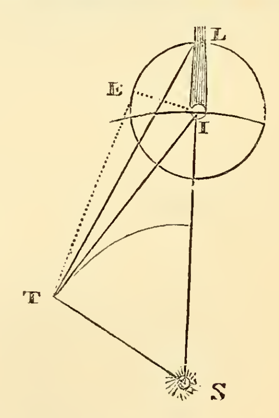
Planetas primarios, radiis ad Terram ductis, areas describere temporibus minime proportionales ; at radiis ad Solem ductis, areas temporibus proportionales percurrere.

Nam respectu Terræ nunc progrediuntur, nunc stationarii sunt, nunc etiam regrediuntur : At Solis respectu semper progrediuntur, idque pro-

latitudo Veneris ex Tellure observata P T E, e Sole visa P S E, E punctum in eclipticâ, erit ut P S ad P T, ità tangens latitudinis P T E, ad tangentem latitudinis P S E. Nam ob angulos E P T et E P S rectos, est P T ad P E ut sinus totus ad tangentem anguli P T E ; et similiter P S ad P E ut sinus totus ad tangentem anguli P S E, ideóque ut P S ad P T, ità tangens anguli P T E ad tangentem anguli P S E, quarè dabitur angulus iste cum recto E P S, et ideò erit S P ad S E ut sinus anguli S E P, complementi P S E ad rectum ad sinum anguli P S E, dabitur ergò S E, seu ratio ejus ad S T, sicque observatis variis distantiis S P, dabitur mediocris; quia verò datur ratio S T ad mediocrem distantiam Solis a Terrâ tempore observationis, dabitur ratio distantiæ mediocris Veneris ad distantiam mediocrem Solis a Terrâ. Mercurii distantiæ a Terrâ determinantur etiam per elongationes ejus maximas a Sole, sed quia orbita Mercurii est admodum excentrica, si Mercurius fit in P, in maximâ digressione, per observationem notus sit oportet angulus S T P et per theoriam motuum Mercurii angulus P S T unde deducetur angulus T P S, quia angulus ille rectus non est, unde tandem cætera determinentur ut in Venere, neglectis minutiis.

(y) 62. * *Etenim per eclipses* Jovis *determinatur positio umbræ quam Jupiter projicit, et eo nomine habetur Jovis longitudo heliocentrica.*

* Sit S Sol; T Terra; I Jupiter; L Satelles ejus per medium umbræ I L transiens: ex Terrâ T observetur in partibus semi-diametri Jovis, distantia centri Jovis a satellite in umbram sese immergente et ex eâ emergente, medium inter eas distantias erit distantia a centro Jovis ad satellitem in medio umbræ immersum in partibus semi-diametri Jovis, eadem distantia in minutis et secundis observari poterit, eritque mensura anguli I T L; ducatur T E tangens ad orbitam satellitis, et I E quæ erit in E T perpendicularis, quia cognoscitur ratio maximæ elongationis hujus satellitis ad semi-diametrum Jovis, et hic habetur in secundis semi-diameter



Jovis habebitur in secundis angulus I T E sub quo apparere deberet linea I E, si satelles foret in maximâ suâ elongatione eo temporis momento ; sed ex trigonometricis, est sinus anguli I T E, ad sinum totum sive sinum anguli E, ut est I E ad T I, rursus in triangulo T I L est I L (sive I E ipsi æqualis) ad T I ut sinus anguli observati I T L ad sinum anguli T L I ; itaque ut sinus anguli I T E ad sinum totum, ita sinus anguli I T L ad sinum anguli T L I sive T L S ; unde in triangulo T L S, cognito per observationem angulo S T L et invento ut indicatum est, angulo T L S, habetur angulus T S L, qui additus vel detractus e longitudine heliocentricâ Terræ dat Jovis heliocentricam longitudinem. Q. e. i.

pemodum uniformi cum motu, sed paulo celerius tamen in periheliis ac tardius in apheliis, sic ut arearum æquabilis sit descriptio. Propositio est astronomis notissima, (z) et in Jove apprimè demonstratur per eclipses satellitum, quibus eclipsibus heliocentricas planetæ hujus longitudines et distantias a Sole determinari diximus.

PHÆNOMENON VI.

Lunam radio ad centrum Terræ ducto, aream tempori proportionalem describere.

Patet ex Lunæ motu apparente cum ipsius diametro apparente collato. Perturbatur autem motus lunaris aliquantulum a vi Solis, sed errorum insensibiles minutias in hisce phænomenis negligo.

(z) *Et in Jove apprimè demonstratur.* Nam per eclipses satellitum determinatur locus Jovis e Sole visus ejusque a Sole distantia, et ideò collatis plurium eclipsium observationibus, habetur motus verus Jovis in propriâ orbitâ circà Solem, et orbita ipsa describi potest; undè quemadmodum de Sole diximus (43) patet Jovem describere areas temporibus proportionales circà Solem.

PROPOSITIONES.

PROPOSITIO I. THEOREMA I.

Vires, quibus planetæ circumjoviales perpetuo retrahuntur a motibus rectilineis et in orbibus suis retinentur, respicere centrum Jovis, et esse reciprocè ut quadrata distantiarum locorum ab eodem centro.

PATET pars prior propositionis per phænomenon primum, et propositionem secundam vel tertiam libri primi: et pars posterior per phænomenon primum, et corollarium sextum propositionis quartæ ejusdem libri.

Idem intellige de planetis qui Saturnum comitantur, per phænomenon secundum.

PROPOSITIO II. THEOREMA II.

Vires, quibus planetæ primarii perpetuo retrahuntur a motibus rectilineis, et in orbibus suis retinentur, respicere Solem, et esse reciprocè ut quadrata distantiarum ab ipsius centro.

Patet pars prior propositionis per phænomenon quintum, et propositionem secundam libri primi: et pars posterior per phænomenon quartum, et propositionem quartam ejusdem libri. Accuratissimè autem demonstratur hæc pars propositionis (a) per quietem apheliorum. Nam

(a) * *Per quietem apheliorum.* * Astronomi motus cœlestes calculant referendo astra ad eclipticam, cujus initium per intersectionem æquatoris et eclipticæ determinatur; sed illud initium fixum non est, et propter axis Terræ nutationem intersectio illa in antecedentia fertur 51 circiter secundis singulo anno, hinc fixæ totidem secundis progredi videntur. Aphelia planetarum etiam progredi videntur respectu ejus initii eclipticæ, progreditur ergo singulo anno.

Aphelium	Terræ	62″.
	Saturni	78″.
	Jovis	57″.
	Martis	72″.
	Veneris	86″.
	Mercurii	80″.

Sed multum abest quàm ut ille apheliorum motus, certissime determinetur, et uniformis esse deprehendatur, ex observationibus motûs aphelii Terræ nunc plus procedere quàm 50″ nunc minus deprehenditur, unde quidam astronomi non alium esse ejus motum præter motum ipsius initii eclipticæ censent. Pariter ex observationibus aphelii Saturni, ejus motus irregularis videretur, aliquando accelerari, aliquando retrocedere, ex. gratia, ab anno 1694 ad finem anni 1708, minutis ferè 33 retrocessisse testatur Cassinus. Aphelium Jovis ad motum fixarum proximè accedere videtur, &c. Unde constat, aphelia quamproximè quiescere, et eam quantitatem exiguam motûs ipsis assignati quæ excedit motum fixarum, forte observationum erroribus deberi,

aberratio quàm minima a ratione duplicatâ (per Corol. 1. Prop. XLV. Lib. I.) motum apsidum in singulis revolutionibus notabilem, in pluribus enormem efficere deberet.

PROPOSITIO III. THEOREMA III.

Vim, quâ Luna retinetur in orbe suo, respicere Terram, et esse reciprocè ut quadratum distantiæ locorum ab ipsius centro.

Patet assertionis pars prior per phænomenon sextum, et propositionem secundam vel tertiam libri primi: et pars posterior per motum tardissimum lunaris apogæi. Nam motus ille, qui singulis revolutionibus est graduum tantum trium et minutorum trium in consequentia, contemni potest. Patet enim (per Corol. 1. Prop. XLV. Lib. I.) quod si distantia Lunæ a centro Terræ sit ad semidiametrum Terræ ut D ad 1; vis a quâ motus talis oriatur sit reciprocè ut $D^{2\frac{4}{243}}$, id est, reciprocè ut ea ipsius D dignitas cujus index est $2\frac{4}{243}$, hoc est, in ratione distantiæ paulo majore quàm duplicatâ inversè, sed quæ partibus $59\frac{3}{4}$ proprius ad duplicatam quàm ad triplicatam accedit. Oritur verò ab actione Solis (ut posthac dicetur) et propterea hic negligendus est. ([b]) Actio Solis quâtenus Lunam distrahit a Terrâ, ([c]) est ut distantia Lunæ a Terrâ quamproximè;

forte actioni mutuæ vicinorum planetarum inter se; sic cùm anno 1703 Saturnus et Jupiter conjuncti fuerint, et cùm nonnisi quinque annis nonaginta gradibus a se mutuo discedant, patet quod ab anno 1698 ad annum 1708 Jupiter inter Solem et Saturnum erat versatus, ejusque actio in Saturnum adjuncta fuerat actioni Solis in Saturnum; posito autem quod reverà vis Solis in Saturnum decrescat secundum quadrata distantiarum, et Jovis interpositione vim qualemcumque illi addi quæ X dicatur, ex Propositione XLV. primi Libri habebitur angulum apsidis imæ cum summâ esse $180^{gr.} \sqrt{\frac{1+X}{1+3X}}$ sed $\frac{1+X}{1+3X}$ est fractio ideóque ille angulus est minor $180^{gr.}$ regreditur itaque apsis ex his hypothesibus planè ut observatione constat: unde non obscurè colligitur apheliorum fixarum respectu quies (semotis his accidentalibus causis) ac per consequens quod vires quibus planetæ ad Solem retrahuntur, sunt in duplicatâ distantiarum ratione accuratè, siquidem si vel unâ sexagesimâ parte accederet ratio a duplicatâ ad triplicatam, apsides tribus ad minimum gradibus progrederentur, ut demonstratum fuit in fine primi Coroll. Prop. 45æ. Lib. I.

([b]) * *Actio Solis quâtenus Lunam distrahit a Terrâ.* * Motus apogæi lunaris uniformis non est, sed aliquando procedit, aliquando recedit, aliquando quiescit, sed ita ut omnibus compensatis progrediatur, et octo aut novem annis 360. gr. percurrerit; pariter et actio Solis quâ Lunam distrahit a Terrâ non est continua, actio Solis Lunam a Terrâ distrahit dum Luna a syzygiâ non plus quàm 55. gradibus hinc inde discessit, circa quadraturas verò actio Solis cum Terræ attractione consentit, Lunamque ad Terram attrahit, sed tunc et debilior est et per pauciores gradus agit, quàm circa syzygias, hinc effectus qui resultat pendet ex actione Solis quâ Luna distrahitur. (Lib. I. Prop. LXVI. Cor. 6. 7. 8. cum notis.)

([c]) * *Est ut distantia Lunæ a Terrâ quam proximè.* * Propter motum Telluris cum Lunâ circa Solem, omnia puncta lunaris orbitæ successivè obvertuntur Soli, et versantur in syzygiâ, postea verò in quadraturâ, et cùm ea orbita non sit circulus cujus Terra sit centrum, patet puncta syzygiarum et quadraturarum, nunc viciniora nunc remotiora fore Terræ; jam verò vis quâ Sol distrahit Lunam a Terrâ, in syzygiis, sicut et vis quâ Sol Lunam attrahit Terram versus in quadraturis, crescit secundum distantias Lunæ a Terrâ, in iis autem punctis

([d]) ideóque (per ea quæ dicuntur in Corol. 2. Prop. XLV. Lib. I.) est ad Lunæ vim centripetam ut 2 ad 357,45 circiter, seu 1 ad $178\frac{29}{40}$. Et neglectâ Solis vi tantillâ, vis reliqua quâ Lunâ retinetur in orbe erit reciprocè ut D^2. Id quod etiam plenius constabit conferendo hanc vim cum vi gravitatis, ut fit in propositione sequente.

Corol. ([e]) Si vis centripeta mediocris quâ Luna retinetur in orbe augeatur primò in ratione $177\frac{29}{40}$ ad $178\frac{29}{40}$, deinde etiam in ratione duplicatâ semidiametri Terræ ad mediocrem distantiam centri Lunæ a centro Terræ: habebitur vis centripeta lunaris ad superficiem Terræ, posito quod vis illa descendendo ad superficiem Terræ perpetuò augeatur in reciprocâ altitudinis ratione duplicatâ.

PROPOSITIO IV. THEOREMA IV.

Lunam gravitate in Terram, et vi gravitatis retrahi semper a motu rectilineo, et in orbe suo retineri.

Lunæ distantia mediocris a Terrâ in syzygiis est semidiametrorum terrestrium, secundùm Ptolemæum et plerosque astronomorum 59, secundùm Vendelinum et Hugenium 60, secundùm Copernicum $60\frac{1}{3}$, secundùm

præcipua est Solis actio ad apogæum Lunæ movendum, unde effectus resultans pendebit a differentiâ earum actionum quæ erit sicut distantia Lunæ a Terrâ: vel ut melius res concipiatur, fingatur orbitam Lunæ cingi undique Solibus æqualiter a Terrâ distantibus, ita ut singulum punctum orbitæ lunaris sit simul in syzygiâ et quadraturâ; cùm actio Solis in syzygia, sicut et actio Solis in quadraturâ, sit ut distantiæ Lunæ a Terrâ, differentia earum actionum erit etiam ut distantia Lunæ a Terrâ, sed effectus differentiæ earum actionum erit idem ac id quod resultabit ex translatione dicti puncti per syzygiam et postea per quadraturam: hinc si motus apogæi medius assumatur, is pendebit ab actione quæ erit ut distantia Terræ a Lunâ; addit autem Newtonus quàm proximè propter actionem in punctis inter syzygias et quadraturas, sed quæ parum hanc rationem turbant; nam in punctis intermediis ubi actio quâ Luna distrahitur a Terrâ magis recederet ab hac ratione, actiones compositæ sese mutuò destruunt et in punctis a syzygiis aut a quadraturis non remotis actio Sòlis sequitur proximè easdem rationes ac in ipsis Syzygiis ac quadraturis; hinc actio Solis quâtenus Lunam distrahit a Terrâ, est proximè ut distantia Terræ a Lunâ.

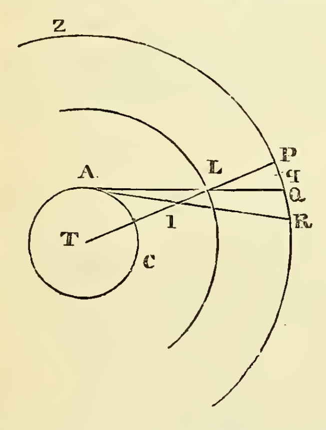
([d]) * *Ideóque per ea quæ dicuntur in Cor. 2. Prop. XLV. Lib. I.* * Dicitur in eo Corollario, quod si ex vi decrescente secundum quadrata distantiarum auferatur vis quæ crescat secundum ipsas distantias, quæ sit ad priorem ut 1 ad 357.45, motus progressivus apogæi erit $1^d. 31'. 28''$ in singulâ revolutione; motus autem progressivus apogæi lunaris est circiter duplo velocior, hinc vis illa ablatitia debet esse ad vim Lunæ centripetam ut 2 ad 357.45 sive ut 1. ad 178.725.

([e]) * *Si vis centripeta mediocris.* Quoniam vis ablatitia Solis est ad vim centripetam Lunæ ut 1 ad $178\frac{29}{40}$, si vis ablatitia Solis sit 1, erit vis centripeta Lunæ $178\frac{29}{40}$, ideóque detractâ vi ablatitiâ Solis, erit vis Lunæ quâ reverâ retinetur in orbitâ suâ per vim Terræ minutam actione Solis $177\frac{29}{40}$. Quarè si vis mediocris quâ Luna retinetur in orbe, augeatur in ratione $177\frac{29}{40}$ ad $178\frac{29}{40}$, obtinebitur vera vis Lunæ centripeta, qualis foret si nulla esset actio Solis. Hinc posito quod vis illa descendendo ad superficiem Terræ perpetuò augeatur in reciprocâ altitudinis seu distantiæ a centro Terræ ratione duplicatâ, ut habeatur vis centripeta in superficie Terræ, dicendum est ut quadratum semidiametri Terræ ad quadratum distantiæ mediocris centri Lunæ a centro Terræ, itâ vis centripeta ad quartum, quod erit vis in superficie Terræ.

Streetum $60\frac{2}{5}$, et secundùm Tychonem $56\frac{1}{2}$. Ast Tycho, et quotquot ejus tabulas refractionum sequuntur, constituendo refractiones Solis et Lunæ ([f]) (omnino contra naturam lucis) majores quàm fixarum, idque scrupulis quasi quatuor vel quinque, ([g]) auxerunt parallaxin Lunæ scrupulis totidem, hoc est, quasi duodecimâ vel decimâ quintâ parte totius parallaxeos. Corrigatur iste error, et ([h]) distantia evadet quasi $60\frac{1}{2}$ semidiametrorum terrestrium, ferè ut ab aliis assignatum est. Assumamus distantiam mediocrem sexaginta semidiametrorum in syzygiis; et lunarem periodum respectu fixarum compleri diebus 27, horis 7, minutis primis 43, ut ab astronomis statuitur; atque ambitum Terræ esse pedum Parisiensium 123249600, uti ([i]) a Gallis mensurantibus definitum est: et si Luna motu omni privari fingatur ac dimitti, ut urgente vi illâ

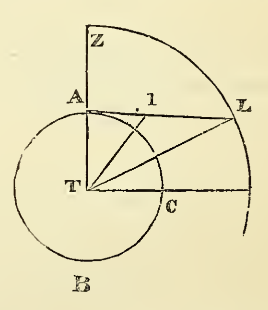
([f]) * *Omninò contra naturam lucis* (25.).

([g]) * *Auxerunt parallaxim Lunæ.* Tantùm augeri parallaxim Lunæ quantùm augetur refractio, patet si determinetur parallaxis Lunæ, quod ità præstari potest. Sit A C T, Tellus



cujus centrum T, observetur altitudo meridiana centri Lunæ L ex loco A in Q a refractionibus libera, et ex tabulis eruatur pro tempore observationis longitudo et latitudo Lunæ; deindè (per trigon.) quæratur ipsius declinatio, habebitur ejus distantia a vertice Z seu locus P e Terræ centro T visus, differentia P Q seu angulus P L Q aut æqualis A L T est parallaxis Lunæ. Porrò ut habeatur locus Q e loco A visus a refractione liber, quoniam refractio auget altitudinem, sit locus visus q, Q q metietur refractionem, undè arcus Q q addendus est arcui P q ut habeatur parallaxis tota P Q; si verò refractio major assumatur ut q R, parallaxis erit major, nempè P R, quasi Luna esset in l; undè tantum augetur parallaxis quantum refractio ipsa.

([h]) * *Distantia evadet.* Sit T centrum Terræ et angulus A L T parallaxis horizontalis mediocris. Ob angulum L A T rectum, erit semidiameter Terræ A T ad distantiam mediocrem Lunæ a Terrâ T L, ut sinus parallaxeos medio-

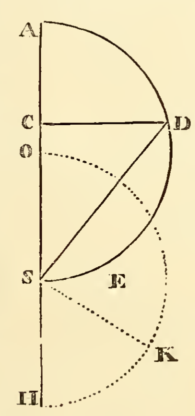


cris ad sinum totum. Est autem parallaxis ista 58′ circiter. Jam ducatur T l, sitque angulus A l T 63′ vel 62′, ob refractionem malè constitutam, erit T l ad T L ferè ut 58 ad 62 vel 63, ideóque cùm sit juxtà Tychonem T l = $56\frac{1}{2}$ semid. Terræ, erit ut 58 ad 62 vel 63 ità $56\frac{1}{2}$ ad $60\frac{23}{58}$ vel $61\frac{43}{116}$. Quarè si corrigatur error qui ex refractione malè constitutâ oritur, distantia mediocris Lunæ a Terrâ evadet quasi $60\frac{1}{2}$ semid. terrestr.

([i]) * *A Gallis mensurantibus.* A Picarto nimirum inventum est gradui circuli maximi terrestris respondere hexapedas 57060 seu ped. Paris. 342360. Quarè inferatur (22) ut numerus graduum arcus distantiæ duorum locorum ad 360°. seu peripheriam integram, ità idem arcus in milliaribus aut pedibus expressus ad ambitum Telluris in eadem mensurâ inveniendum, sicque definitum est ambitum Telluris esse ped. Paris. 123249600 ejusque proindè diameter est ped. Paris. 39231566.

omni, quâ (per Corol. Prop. III.) in orbe suo retinetur, descendat in Terram; hæc spatio minuti unius primi cadendo describet pedes Parisienses $15\frac{1}{12}$. (k) Colligitur hoc ex calculo vel per Propositionem XXXVI. Libri primi, vel (quod eodem recidit) per Corollarium nonum Propositionis quartæ ejusdem Libri, confecto. Nam arcus illius quem Luna tempore minuti unius primi, medio suo motu, ad distantiam sexaginta semidiametrorum terrestrium describat, sinus versus est pedum Parisiensium $15\frac{1}{12}$ circiter, vel magis accuratè pedum 15. dig. 1. et lin. $1\frac{4}{9}$. Unde cùm vis illa accedendo ad Terram augeatur in duplicatâ distantiæ ratione inversâ, ideóque

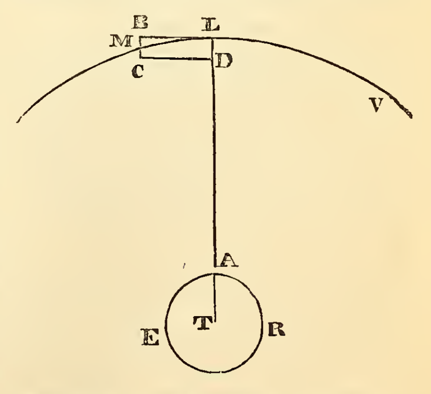
(k) 63. * *Colligitur hoc per Propositionem XXXVI. Lib. I.* * In hâc Propositione XXXVI. sit S centrum Terræ S A distantia mediocris Lunæ a Terrâ, S O dimidium ejus distantiæ mediocris, velocitas quâ corpus revolvi potest in circulo O K H erit ad velocitatem Lunæ in propriâ orbitâ ut $\sqrt{2}$ ad 1, sit X arcus quem Luna in propriâ orbitâ uno minuto primo describit, erit $X\sqrt{2}$ arcus O K eodem tempore descriptus in circulo O K H et area O K S erit $\frac{1}{2}$ $SO \times X\sqrt{2}$, æqualis areæ $ASD = \frac{1}{2}$ $AS \times CD$ (nam ob exiguitatem arcûs A D pro rectâ sumi potest) sive $\frac{1}{2}\, SO \times X\sqrt{2} = SO \times CD$



unde est $CD = \frac{X}{\sqrt{2}}$, sed est S C ad C D ut C D ad A C, ergo $AC = \frac{CD^2}{SC} = \frac{X^2}{2SC}$ sed S C est proximè æqualis S A, ergo $AC = \frac{X^2}{2SA}$; rursus sit 1 ad p ut radius ad circumferentiam, orbitæ lunaris peripheria erit p S A, et quoniam tota a Luna describitur tempore 27d. 7h. 43′. sive minutis 39343; erit arcus $X = \frac{pSA}{39343}$ et $AC = \frac{p^2SA^2.}{2 \times 39343^2 \times SA} = \frac{p^2SA}{3095743298}$, est verò $\frac{pSA}{60}$ ambitus Terræ qui pedum 1232496000 ex Picarto adsumptus fuit; ideóque $pSA = 7394976000$; unde divisione factâ est $AC = 2.388756$ p, sed radius est ad peripheriam ut 1 ad 6.283185, &c. unde tandem habetur $AC = 15.00878$, &c. Alter autem calculus ex Cor. 9. Prop. IV. deductus ita se habet.

Sit R A E Terra, cujus centrum T, V L orbita Lunæ cujus pars L M a Lunâ percurritur minuti unius primi intervallo. Quoniam Luna periodum suam respectu fixarum complet diebus 27, hor. 7. minutis primis 43, ut ab astronomis statuitur, hoc est, minutis primis 39343, erit L M, $\frac{1}{39343}$ totius peripheriæ. Porrò ambitus Terræ est ped. Paris. 123249600. unde dabitur orbitæ lunaris circumferentia quæ ejus est sexagecupla 73949760000. ped. Paris. quæ si dividatur per 39443, quotus dabit longitudinem arcûs a Lunâ minuto primo descripti pedibus Parisiensibus expressam, scilicet 187964. ped. circiter cujus quadrato 35330465296 per diametrum diviso, quæ est pedum 2353893976 habebitur sinus versus L D ped. Paris. 15.0093, &c. proximè ut priori calculo.

* Sed ex Corollario Propositionis præcedentis, vis quâ Luna retinetur in orbe suo augeri debet in ratione $177\frac{29}{40}$ ad $178\frac{29}{40}$ ut corrigatur



vis ejus per Solis actionis diminutionem, et spatia per diversas vires iisdem temporibus percursa sunt ut illæ vires, ergo linea B C inventa 15ped. 009. est ad spatium quod Luna demptâ vi Solis describeret ut $177\frac{29}{40}$ ad $178\frac{29}{40}$ illud ergo spatium est 15ped. 00934. quæ $\frac{934}{10000}$ pedis efficiunt accuratè pollices 1 lin. $1\frac{4}{9}$.

ad superficiem Terræ major sit partibus 60 × 60 quàm ad Lunam; corpus vi illâ in regionibus nostris cadendo, describere deberet spatio minuti unius primi pedes Parisienses 60 × 60 × $15\frac{1}{12}$, et spatio minuti unius secundi pedes $15\frac{1}{12}$, vel magis accuratè pedes 15. dig. 1. et lin. $1\frac{4}{9}$. Et eâdem vi gravia reverâ descendunt in Terram. Nam penduli, in latitudine Lutetiæ Parisiorum ad singula minuta secunda oscillantis, longitudo est pedum trium Parisiensium et linearum $8\frac{1}{2}$, ut observavit Hugenius. (l) Et altitudo, quam grave tempore minuti unius secundi cadendo describit, est ad dimidiam longitudinem penduli hujus in duplicatâ ratione circumferentiæ circuli ad diametrum ejus (ut indicavit etiam Hugenius) (m) ideóque est pedum Parisiensium 15. dig. 1. lin. $1\frac{7}{9}$. Et propterea vis quâ Luna in orbe suo retinetur, si descendatur in superficiem Terræ, æqualis evadit vi gravitatis apud nos, ideóque (per Reg. 1. et 11.) est illa ipsa vis quam nos gravitatem dicere solemus. Nam si gravitas ab eâ diversa esset, corpora viribus utrisque conjunctis Terram petendo duplo velocius descenderent, et spatio minuti unius secundi cadendo describerent pedes Parisienses $30\frac{1}{6}$: omninò contra experientiam.

(n) Calculus hic fundatur in hypothesi quod Terra quiescit. Nam si Terra et Luna moveantur circum Solem, et interea quoque circum com-

(l) * *Et altitudo.* (471. Lib. I.)

(m) * *Ideóque est ped. Paris.* (ibid.)

(n) 64. * *Calculus hic fundatur in hypothesi quod Terra quiescit.* * Undecimâ Sectione Libri I. quæsivit Newtonus qualis oriretur differentia inter motus corporum attractorum, quando tota vis uni immoto tribuitur, aut quando (sicut res se habet) attractione mutuâ in se agunt, et demonstravit Propositione LVIII. et LIX. Quod si e duobus corporibus se mutuo attrahentibus et circa commune gravitatis centrum ellipses similes describentibus, alterutrum sit nostra sedes, ita ut motum totum alteri tribuamus quod circa nos ellipsim describere videretur; illud eâdem vi centripetâ eamdem ellipsim circa nos, si immoti reverâ foremus, nonnisi longiori tempore describeret, ita ut tempus quo mutuâ actione gravitatis circa nos *motos* revolvi videretur, foret ad tempus quo circa nos *immotos* revolveretur, in ratione subduplicatâ corporis centralis immoti ad summam duorum corporum revolventium; unde, manente eâdem gravitatis lege, ellipsis quæ describeretur circa nos *immotos* eodem tempore quo describitur ellipsis relativa circa nos *motos*, minor foret quàm ea ellipsis relativa, et ratio axium invenietur dicendo, quadratum temporis quo hæc ellipsis describitur, sive (ex Hyp.) quadratum temporis quo describitur ellipsis relativa circa nos, est ad quadratum temporis quo ellipsis relativæ ellipsi æqualis circa nos verè immotos describitur, ut cubus semi-axis ellipseos minoris descriptæ circa corpus immotum ad cubum semi-axis ellipsis majoris descriptæ circa corpus etiam immotum, et quæ ellipsi relativæ est æqualis, sed illa tempora erant in subduplicatâ ratione massæ corporis immoti ad summam massarum duorum corporum, ergo, ut massa corporis immoti ad summam massarum duorum corporum, sic cubus semi-axis ellipseos minoris descriptæ circa corpus immotum ad cubum semi-axis ellipsis majoris reverâ descriptæ; hinc cùm hactenus immotam Terram supposuerimus Lunamque revolventem tempore quo reverâ revolvitur, et semiaxem orbitæ lunaris 60 semi-diametrorum Terræ assumserimus, sitque massa Terræ ad massam Lunæ ut 42. ad 1. erit 42. ad 43. ut cubus 60. ad cubum semi-axeos ejus ellipseos quam (manente eadem gravitatis lege eodemque tempore periodico) Luna relativè describet circa Terram dum ipsa Terra mutuâ Lunæ attractione circa centrum gravitatis commune reverâ revolvetur; ille ergo semi-axis erit $\frac{43 \times 216000}{42}$ cujus radix cubica est 60.47 ferè $60\frac{1}{2}$ ut habet Newtonus.

65. Eodem modo quo Luna in orbitâ suâ revolvitur circà Tellurem, ità aliud quodvis grave ex puncto extrà Telluris superficiem secundum rectam horizontalem satis validè projectum orbitam describeret, et planetæ instar periodum suam compleret (10. Lib. I.). Sed

mune gravitatis centrum revolvantur: manente lege gravitatis, distantia centrorum Lunæ ac Terræ ab invicem erit $60\frac{1}{2}$ semidiametrorum terrestrium circiter; uti computationem ineunti patebit. Computatio autem iniri potest per Prop. LX. Lib. I.

Scholium.

Demonstratio Propositionis sic fusius explicari potest. Si Lunæ plures circum Terram revolverentur, perinde ut fit in systemate Saturni vel Jovis; harum tempora periodica (per argumentum inductionis) observarent legem planetarum a Keplero detectam, et propterea harum vires centripetæ forent reciprocè ut quadrata distantiarum a centro Terræ, per Prop. I. hujus. Et si earum infima esset parva, et vertices altissimorum montium prope tangeret: hujus vis centripeta quâ retineretur in orbe, gravitates corporum in verticibus illorum montium (per computationem præcedentem) æquaret quamproximè, efficeretque ut eadem lunula, si motu omni quo pergit in orbe suo privaretur, defectu vis centrifugæ quâ in orbe permanserat, descenderet in Terram, idque eâdem cum velocitate quâ gravia cadunt in illorum montium verticibus, propter æqualitatem virium quibus descendunt. Et si vis illa quâ lunula illa infima descendit, diversa esset a gravitate, et lunula illa etiam gravis esset in Terram more corporum in verticibus montium, eadem lunula vi utrâque conjunctâ duplo velocius descenderet. Quare cùm vires utræque, et hæ corporum gravium, et illæ Lunarum, centrum Terræ respiciant, et sint inter se similes et æquales, eædem (per Reg. 1. et 11.) eandem habebunt causam. Et propterea vis illa, quâ Luna retinetur in orbe suo, ea ipsa erit quam nos gravitatem dicere solemus: idque maximè ne lunula in vertice montis vel gravitate careat, vel duplò velocius cadat quàm corpora gravia solent cadere.

quò altius est suprà Terram punctum illud ex quo grave projicitur, eò minori opus est vi projectili ut projectum in planetam mutetur, et quò humilius est eò majori (ibid.) hoc est, celeritas per vim projectilem impressa erit inversè ut distantia, v. gr. Si Luna eâdem celeritate quâ nunc in orbitâ suâ revolvitur juxta Terram, projiceretur secundùm directionem horizontalem, circà Tellurem non giraret, sed terrestrium projectilium more in Terram caderet, antequam * per tertiam partem minuti esset mota. Nam arcus quem Luna 20 scrupulis secundis horariis in suo circulo percurrit est 11″ si juxta Tellurem accedat et eâdem celeritate moveatur, ille arcus erit 11′; sinus versus arcus 11′ est $\frac{51}{10.000.000}$ radii, qui radius cùm sit pedum 19615783 erit sinus ille versus pedum centum circiter, sed grave prope Terram viginti istis scrupulis secundis cadendo percurrit $20 \times 20 \times 15\frac{1}{12}$, sivè 6033 ped. Unde Luna in circulo suo non manebit, sed longè prius in Terram impegerit quàm 20 secunda elapsa fuissent.

PROPOSITIO V. THEOREMA V.

Planetas circumjoviales gravitare in Jovem, circumsaturnios in Saturnum, et circumsolares in Solem, et vi gravitatis suæ retrahi semper a motibus rectilineis, et in orbibus curvilineis retineri.

Nam revolutiones planetarum circumjovialium circa Jovem, circumsaturniorum circa Saturnum, et Mercurii ac Veneris reliquorumque circumsolarium circa Solem, sunt phænomena ejusdem generis cum revolutione Lunæ circa Terram, et propterea (per. Reg. 11.) a causis ejusdem generis dependent: præsertim cùm demonstratum sit quod vires, a quibus revolutiones illæ dependent, respiciant centra Jovis, Saturni ac Solis, et recedendo a Jove, Saturno et Sole, decrescant eâdem ratione ac lege, quâ vis gravitatis decrescit in recessu a Terrâ.

Corol. 1. (°) Gravitas igitur datur in planetas universos. Nam Venerem, Mercurium, cæterosque esse corpora ejusdem generis cum Jove et Saturno, nemo dubitat. Et cùm attractio omnis per motûs legem tertiam mutua sit, Jupiter in satellites suos omnes, Saturnus in suos, Terraque in Lunam, et Sol in planetas omnes primarios gravitabit.

Corol. 2. (p) Gravitatem, quæ planetam unumquemque respicit, esse reciprocè ut quadratum distantiæ locorum ab ipsius centro.

Corol. 3. Graves sunt planetæ omnes in se mutuò per Corol. 1. et 2. (q) Et hinc Jupiter et Saturnus prope conjunctionem se invicem attrahendo, sensibiliter perturbant motus mutuos, Sol perturbat motus lunares, Sol et Luna perturbant mare nostrum, ut in sequentibus explicabitur.

(°) 66. * *Gravitas igitur datur in planetas universos;* * Datur gravitas in Terram et eâ gravitate Luna circa eam revolvitur per Prop. IV.; datur gravitas in Jovem et Saturnum, nam revolutiones planetarum circumjovialium circa Jovem, et circumsaturniorum circa Saturnum sunt ejusdem generis cum revolutione Lunæ circa Terram, pendent ergo (per Reg. 2.) ex gravitate eorum satellitum in eos planetas; quamvis autem non sint aut non observati sint satellites circa Martem, Venerem et Mercurium, attamen Jovi, Saturno, Terræ in cæteris ita sunt similes ut dubitandi locus non relinquatur quod si satellites juxta ipsos collocarentur, idem eveniret illis ac Lunæ et circumsaturniis aut circumjovialibus, unde sequitur gravitatem etiam dari in illos planetas. Postea propter mutuam attractionem, Terram esse gravem in Lunam, &c. constabit.

(p) * *Corol.* 2. Patet (ex Reg. 1. et Prop. I.).

(q) * *Et hinc Jupiter.* Hæc mutua planetarum perturbatio, ut potè cum sequentibus Propositionibus conjuncta, deinceps convenientius explicabitur, * sufficiant in præsentiarum quæ de eâ superius dictum est, occasione quietis apheliorum, vide notam [a] ad Prop. II.

Scholium.

Hactenus vim illam quâ corpora cœlestia in orbibus suis retinentur, centripetam appellavimus. Eandem jam gravitatem esse constat, et propterea gravitatem in posterum vocabimus. Nam causa vis illius centripetæ, quâ Luna retinetur in orbe, extendi debet ad omnes planetas per Reg. 1. 2. et 4.

PROPOSITIO VI. THEOREMA VI.

Corpora omnia in planetas singulos gravitare, et pondera eorum in eundem quemvis planetam, paribus distantiis a centro planetæ, proportionalia esse quantitati materiæ in singulis.

([r]) Descensus gravium omnium in Terram (demptâ saltem inæquali retardatione quæ ex aëris perexiguâ resistentiâ oritur) æqualibus temporibus fieri, jamdudum observarunt alii; et accuratissimè quidem notare licet æqualitatem temporum in pendulis. Rem tentavi in auro, argento, plumbo, vitro, arenâ, sale communi, ligno, aquâ, tritico. Comparabam pyxides duas ligneas rotundas et æquales. Unam implebam ligno, et idem auri pondus suspendebam (quàm potui exactè) in alterius centro oscillationis. Pyxides ab æqualibus pedum undecim filis pendentes, constituebant pendula; quoad pondus, figuram, et aëris resistentiam omnino paria: et paribus oscillationibus, juxta positæ, ibant unà et redibant diutissimè. ([s]) Proinde copia materiæ in auro (per Corol. 1. et 6. Prop. XXIV. Lib. II.) erat ad copiam materiæ in ligno, ut vis motricis actio in totum aurum ad ejusdem actionem in totum lignum; hoc est, ut pondus ad pondus. Et sic in cæteris. In corporibus ejusdem ponderis differentia materiæ, quæ vel minor esset quàm pars millesima materiæ totius, his experimentis manifestò deprehendi potuit. Jam verò naturam gravitatis in planetas eandem esse atque in Terram, non est dubium. Elevari enim fingantur corpora hæc terrestria ad usque orbem Lunæ, et unà cum

([r]) * *Descensus gravium omnium* (3. Lib. I.).

([s]) * *Proindè copia materiæ.* Quantitas materiæ in medio non resistente est ut pondus comparativum et quadratum temporis directè et longitudo penduli inversè (per Cor. 6. Prop. XXIV. Lib. II.) ideóque datis tempore et longitudine penduli, ut pondus comparativum directè. Sed pondus comparativum est actio vis motricis (per Cor. 6. Prop. XX. Lib. II.). Ergò copia materiæ in auro erat ad copiam materiæ in ligno ut vis motricis actio in totum aurum ad ejusdem actionem in lignum, hoc est, (per Cor. 1. Prop. XXIV. Lib. II.) ut pondus ad pondus.

Lunâ motu omni privata demitti, ut in Terram simul cadant; et [t] per jam ante ostensa certum est quod temporibus æqualibus describent æqualia spatia cum Lunâ; ideóque quod sunt ad quantitatem materiæ in Lunâ, ut pondera sua ad ipsius pondus. Porro quoniam satellites Jovis temporibus revolvuntur quæ sunt in ratione sesquiplicatâ distantiarum a centro Jovis, [u] erunt eorum gravitates acceleratrices in Jovem reciprocè ut quadrata distantiarum a centro Jovis; et propterea in æqualibus a Jove distantiis, eorum gravitates acceleratrices evaderent æquales. Proinde temporibus æqualibus ab æqualibus altitudinibus cadendo, describerent æqualia spatia; perinde ut fit in gravibus in hâc Terrâ nostrâ. [x] Et eodem argumento planetæ circumsolares, ab æqualibus a Sole distantiis demissi, descensu suo in Solem æqualibus temporibus æqualia spatia describerent. [y] Vires autem, quibus corpora inæqualia æqualiter accelerantur, sunt ut corpora; hoc est, pondera ut quantitates materiæ in planetis. Porro Jovis et ejus satellitum pondera in Solem, proportionalia esse quantitatibus materiæ eorum, patet ex motu satellitum quam maximè regulari; per Corol. 3. Prop. LXV. Lib. I. Nam si horum aliqui magis traherentur in Solem, pro quantitate materiæ suæ, quàm cæteri: motus satellitum (per Corol. 2. Prop. LXV. Lib. I.) ex inæqualitate attractionis perturbarentur. Si, paribus a Sole distantiis, satelles aliquis gravior esset in Solem pro quantitate materiæ suæ, quàm Jupiter pro quantitate materiæ suæ, in ratione quâcunque datâ, puta d ad e: distantia inter centrum Solis et centrum orbis satellitis, major semper foret quàm distantia inter centrum Solis et centrum Jovis in ratione subduplicatâ quàm proximè; [z] uti calculo quodam inito inveni. Et si satelles minus gravis esset in Solem in ratione illâ d ad e, distantia centri orbis

[t] * *Per jam antè ostensa* (Prop. IV. Lib. hujus).

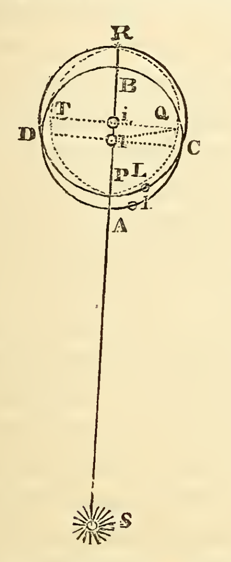
[u] * *Erunt eorum gravitates acceleratrices.* (Per Cor. 2. Prop. V.).

[x] * *Et eodem argumento.* Gravitates acceleratrices planetarum in Solem sunt reciprocè ut quadrata distantiarum a centro Solis (Cor. 2. Prop. V.) et propterea in æqualibus a Sole distantiis eorum gravitates acceleratrices evaderent æquales, proindéque temporibus æqualibus ab æqualibus altitudinibus cadendo describerent spatia æqualia. Quanto autem tempore planeta quilibet circumsolaris omni motu revolutionis privatus solâ vi centripetâ descenderet et ad Solem usque perveniret ex datâ ejus a Sole distantiâ innotescit per not. 401. Lib. I. dimidio scilicet temporis periodici quo planeta ad distantiam duplò minorem revolvi posset, sive tempore quod est ad tempus periodicum planetæ ut 1 ad $4\sqrt{2}$, idem planeta cadendo Solem attingeret.

[y] * *Vires autem quibus corpora inæqualia.* (Def. VIII. et not. 15. Lib. I.)

[z] * *Uti calculo quodam inito inveni.* * Sit S Sol, I Jupiter, L satelles gravior in Solem quàm Jupiter paribus in distantiis in ratione d ad e, fiat S I ad S i sicut $\frac{1}{\sqrt{d}}$ ad $\frac{1}{\sqrt{e}}$ et quoniam gravitas est inversè ut quadrata distantiarum, gravitas in Solem ad distantiam S I erit ad gravitatem in Solem ad distantiam S i ut d ad e; unde si gravitas Jovis in I positi sit ut e, et gravitas satellitis gravioris in L etiam positi sit ut d, ejusdem satellitis gravitas in i positi erit ut e, quare erit æqualis gravitati Jovis in I positi: fingatur satelles l qui Jove nec gravior nec levior sit, qui circa Jovem I circulum describat A C P D, et

fingatur in i corpus centrale Jovi simile, circa quod, semotâ Solis actione, satelles gravior L describere poterit orbitam P Q R T priori A C B D æqualem; restituatur Solis actio, actio ejus in utrumque satellitem erit æqualis in similibus orbitarum punctis; nam propter ingentem puncti S distantiam erit S A ad S P, et S B ad S R ut S I ad S i, ideóque ut $\frac{1}{\sqrt{d}}$ ad $\frac{1}{\sqrt{e}}$ gravitates in eis punctis forent ut d ad e, ideóque si



satellites forent æque graves, paribus in distantiis gravitates in eis punctis forent ut d ad e, sed quia gravitas satellitis l est ad gravitatem satellitis L ut e ad d, compensatur discrimen gravitatis ex distantiâ ortum per discrimen gravitatis ex hypothesi constitutum: mutatio autem quæ ex actione Solis oritur in orbitam satellitis relatè ad ejus primarium pendet ex discrimine actionis Solis in satellitem et in primarium, hoc est in oppositione pendet ex residuo actionis Solis in primarium demptâ actione Solis in satellitem; et in conjunctione ea mutatio pendet ex residuo actionis Solis in satellitem demptâ Solis actione in primarium: cùm ergo actio Solis in satellites L et l, sit eadem; sed actio Solis in primarium i fit minor quàm in primarium I, in oppositione minus est residuum quod mutationem pariet in orbita satellitis L, quàm residuum quod mutationem satellitis l parit in orbitâ, et majus e contra est residuum in conjunctione respectu orbitæ satellitis L quàm respectu orbitæ satellitis l; sed illa residua tam in oppositione quàm in conjunctione vim centripetam minuunt; ergo vis centripeta major manet in R quàm in B, et minor e contra in P quàm in A, unde patet quod ut restituatur similitudo inter orbitam satellitis L, et orbitam satellitis l corpus centrale debeat removeri a puncto R et accedere versus P, hoc est transferri ex i versus I; ita ut centrum orbitæ satellitis L remotius esse debeat a Sole quàm ipsius corpus centrale.

Jam verò dico illud corpus centrale ad I transferri debere, nam sit corpus centrale in I, semotâ Solis actione, satelles L eodem tempore periodico ac prius describet ellipsim cujus centrum i, focus verò I et axis major R P, (per Cor. Prop. XV. Lib. I.) et in mediocri suâ distantiâ I Q (Cor. 4. Prop. XVI. Lib. I.) velocitatem eamdem habebit quam habet satelles l in suo circulo, qualem v. gr. habet in C ubi velocitatum illarum directiones sunt parallelæ tam inter se quàm diametro R P, et ob distantiarum I Q et I C æqualitatem vires centrales sunt æquales directionis obliquitate paulum differentes; addatur jam actio Solis, et cùm sit S Q ad S C ut S i ad S I actiones illæ Solis (ex Hyp. et demonstratis) in satellites diversæ gravitatis, sed positos in Q et C erunt etiam æquales; movebitur ergo satelles L in mediocribus distantiis Q et T ut satelles l movetur in C et D quam proximè, tam ratione corporis centralis I quàm etiam ex adjuncta actione Solis, mutationes verò ex Sole pendentes in A et P, et in R et B æquales sunt, quia sunt differentia ejusdem vis Solis in I et virium Solis in A et P, ut et virium Solis in R et P, vires autem in A et P sunt æquales ex Hyp. et dem. ut et in R et B. Undè cùm vis primarii magna censenda sit respectu vis S; rationes virium centripetarum residuarum in P et A, B et R manent inter se in eadem ratione ac si nulla foret actio Solis, et ut semotâ actione Solis curvas suas iisdem temporibus describere faciebant, celeritate quidem majori in P, minori in R, media verò in A et B, itaque eadem proximè iis in punctis manebit ratio descriptionis curvarum; cùm ergo demonstratum sit quod in punctis P Q R T, A C B D actio Solis non turbet relationem quæ intercedit inter modum quo curvæ illæ P Q R T, A C B D describuntur, cùm virium rationes eædem maneant ac prius quamproximè, idem etiam de punctis intermediis erit intelligendum. Unde sequitur quod satelles L in orbitâ P Q R T revolvi poterit eodem tempore iisdemque proximè legibus ac satelles L in orbitâ suâ A C B D, si gravior sit Jove paribus in distantiis in ratione duplicatâ distantiæ Solis a centro suæ orbitæ ad distantiam Solis ab ipso Jove. Q. e. d.

Eamdem demonstrationem applicari posse ad casum ubi satelles supponeretur levior Jove paribus in distantiis, illumque tunc descripturum ellipsim cujus centrum Sole vicinius erit quàm Jupiter, ita ut sit gravitas satellitis ad gravitatem Jovis in duplicatâ ratione distantiæ Solis a centro orbitæ ad distantiam Solis a Jove. Q. alterum e. d.

Hâc ratione satis constare assertum Newtoni credimus, idem tamen aliter *inito calculo* magis ad mentem Newtoni demonstrari posse non negamus; sed ratio eum calculum ineundi, ex iis quæ postea de motibus lunaribus dicentur, erit deducenda.

satellitis a Sole minor foret quàm distantia centri Jovis a Sole in ratione illâ subduplicatâ. Ideóque si in æqualibus a Sole distantiis, gravitas acceleratrix satellitis cujusvis in Solem major esset vel minor quàm gravitas acceleratrix Jovis in Solem; parte tantum millesimâ gravitatis totius, foret distantia centri orbis satellitis a Sole major vel minor quàm distantia Jovis a Sole ([a]) parte $\frac{1}{2000}$ distantiæ totius, id est, parte quintâ distantiæ satellitis extimi a centro Jovis: quæ quidem orbis eccentricitas foret valde sensibilis. Sed orbes satellitum sunt Jovi concentrici, et propterea gravitates acceleratrices Jovis et satellitum in Solem æquantur inter se. Et eodem argumento pondera Saturni et comitum ejus in Solem, in æqualibus a Sole distantiis, sunt ut quantitates materiæ in ipsis: et pondera Lunæ ac Terræ in Solem vel nulla sunt, vel earum massis accuratè proportionalia. Aliqua autem sunt per Corol. 1. et 3. Prop. V.

Quinetiam pondera partium singularum planetæ cujusque in alium quemcunque sunt inter se ut materia in partibus singulis. Nam si partes aliquæ plus gravitarent, aliæ minus, quàm pro quantitate materiæ, planeta totus, pro genere partium quibus maximè abundet, gravitaret magis vel minùs quàm pro quantitate materiæ totius. Sed nec refert utrum partes illæ externæ sint vel internæ. Nam si, verbi gratiâ, corpora terrestria, quæ apud nos sunt, in orbem Lunæ elevari fingantur, et conferantur cum corpore Lunæ: si horum pondera essent ad pondera partium externarum Lunæ ut quantitates materiæ in iisdem, ad pondera verò partium internarum in majori vel minori ratione, forent eadem ad

([a]) * *Parte* $\frac{1}{2000}$ *distantiæ totius.* Gravitas acceleratrix Jovis sit 1, erit (per Hyp.) gravitas acceleratrix satellitis $1+\frac{1}{1000}$, sed (ex dem.) distantia inter centrum Solis et centrum orbis satellitis major est quàm distantia inter centrum Solis et centrum Jovis in ratione illâ subduplicatâ quam proximè, hoc est, ut 1, ad $\sqrt{1+\frac{1}{1000}}$. Quarè utriusque distantiæ differentia est $\sqrt{1+\frac{1}{1000}}-1$ seu $\sqrt{\frac{1001}{1000}}-1=\sqrt{1.001}-1=1.0004998$, &c. -1 $=.0004998$, &c. sive $=\frac{5}{10000}=\frac{1}{2000}$, ideóque distantia centri orbis satellitis a Sole major erit quàm distantia Jovis a Sole parte $\frac{1}{2000}$ distantiæ totius, id est parte quintâ distantiæ satellitis extimi a centro Jovis.

* Nam est diameter Jovis circiter decima pars diametri Solis, ut supra indicavimus, sive ut 997 ad 10.000, distantia extimi satellitis est 26.63 semi-diametrorum Jovis, ergo ea distantia semi-diametros Solis continebit 2.665 aut accuratiùs 2.655.

Solis semi-diameter mediocris e Terrâ visus, secundùm Cassini Tabulas, est 16′ 3″ vel 16′ 4″. Jam verò in triangulo rectangulo cujus angulus verticis est 16′ 4″ altitudo continet basim 213.96 vicibus; ergo inter Solem et Terram intervallum est quod Solis semi-diametros 215.96 contineret, sive proximè, Solis diametros 107.

Jovis autem distantia mediocris a Sole est ad distantiam mediocrem Terræ a Sole, ut 52 ad 10, ergo ea continebit semi-diametros Solis 1112.592, ejus numeri bis millesima pars est .556296 quæ est excentricitas Jovis si satelles sit Jove 1000[â.] parte gravior vel levior paribus in distantiis, ille verò numerus .556296 est quinta pars numeri 2.78148 paulò majoris quàm 2.655 sed distantia extimi satellitis a Jove continebat Solis semi-diametros 2.655; ergo excentricitas Jovis si satelles sit Jove 1000[â.] parte gravior vel levior paribus in distantiis, est ad minimum quinta pars distantiæ satellitis extimi a Jove. Q. e. d.

pondus Lunæ totius in majori vel minori ratione: contra quam supra ostensum est.

Corol. 1. Hinc pondera corporum non pendent ab eorum formis et texturis. Nam si cum formis variari possent, forent majora vel minora, pro varietate formarum, in æquali materiâ: omnino contra experientiam.

Corol. 2. Corpora universa, quæ circa Terram sunt, gravia sunt in Terram; et pondera omnium, quæ æqualiter a centro Terræ distant, sunt ut quantitates materiæ in iisdem. Hæc est qualitas omnium in quibus experimenta instituere licet, et propterea per Reg. 3. de universis affirmanda est. Si æther aut corpus aliud quodcunque vel gravitate omninò destitueretur, vel pro quantitate materiæ suæ minus gravitaret: quoniam id (ex mente Aristotelis, Cartesii et aliorum) non differt ab aliis corporibus nisi in formâ materiæ, posset idem per mutationem formæ gradatim transmutari in corpus ejusdem conditionis cum iis, quæ pro quantitate materiæ quam maximè gravitant, et vicissim corpora maximè gravia, formam illius gradatim induendo, possent gravitatem suam gradatim amittere. Ac proinde pondera penderent a formis corporum, possentque cum formis variari, contra quam probatum est in Corollario superiore.

Corol. 3. Spatia omnia non sunt æqualiter plena. Nam si spatia omnia æqualiter plena essent, gravitas specifica fluidi quo regio aëris impleretur, ob summam densitatem materiæ, nil cederet gravitati specificæ argenti vivi, vel auri, vel corporis alterius cujuscunque densissimi; et propterea nec aurum neque aliud quodcunque corpus in aëre descendere posset. Nam corpora in fluidis, nisi specificè graviora sint, minimè descendunt. Quod si quantitas materiæ in spatio dato per rarefactionem quamcunque diminui possit, quidni diminui possit in infinitum?

Corol. 4. Si omnes omnium corporum particulæ solidæ sint ejusdem densitatis, neque sine poris rarefieri possint, (z) vacuum datur. Ejusdem densitatis esse dico, (a) quarum vires inertiæ sunt ut magnitudines.

Corol. 5. (b) Vis gravitatis diversi est generis a vi magneticâ. Nam attractio magnetica non est ut materia attracta. Corpora aliqua magis

(z) * *Vacuum datur.* Quibus responsionibus hoc Newtoni ratiocinium effugiant Cartesiani, jam diximus (Lib. II. num. 187).

(a) * *Quarum vires inertiæ.* Cùm enim vis inertiæ sit quantitati materiæ proportionalis, si vires inertiæ sunt ut magnitudines, magnitudines sunt ut quantitates materiæ, hoc est, sunt ejusdem densitatis.

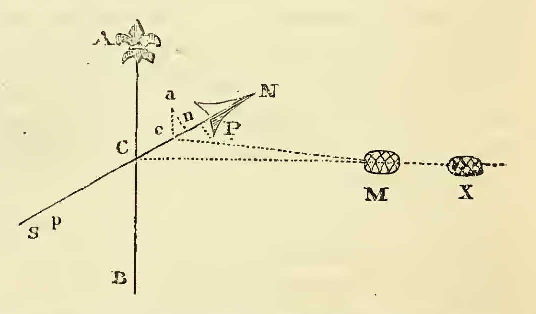
(b) * *Vis gravitatis diversi est generis.* Clariss. Muschenbroek in Dissertatione de Magnete plurima atque accuratissima de hujusce lapidis actione refert experimenta. Ex descriptâ a diligentissimo viro experimentorum serie palam quidem fit æqualem non esse magnetis in varia corpora actionem, eamque tempestatum vicissitudinibus obnoxiam, et modò remitti modò intendi. At vim magneticam in ratione multò minori quàm triplicatâ distantiarum decrescere, eadem

ostendunt experimenta. Hinc post transcriptum hoc ipsum Corollarium 5., subdit Muschenbroek: "Utinam memoriæ prodita fuissent experimenta ex quibus Newtonus hæc collegit; forsitan enim vir stupendæ subtilitatis in mathematicis disciplinis methodum invenit separandi attractiones a repulsionibus quarum proportionem in distantiæ ratione triplicatâ decrescere deprehendit, sed quia nihil de hâc re ulterius determinavit, nec amplecti ejus sententiam possumus." Ut intelligantur hæc Clariss. Muschenbrokii verba, sciendum est, virum doctissimum suis experimentis in eam inductum fuisse suspicionem, quod scilicet magnes constaret partibus valdè heterogeneis, quarum quædam attraherent, quædam repellerent, ità ut duæ illæ vires oppositæ vel simplicis repulsionis vel attractionis proportionem turbent. Idque non caret verisimilitudine, cùm experimentis notissimum sit, magnetes non solùm sese mutuò attrahere, sed etiam alterutro magnete in contrariam partem converso, unum ab altero repelli. Uterque magnetis polus vim repellentem atque attrahentem æquè ostendit, et idcircò ex eodem polo vis attrahens et repellens emanat. Si amici magnetum poli sibi obvertantur, attractio præpollet repulsioni, si e contrà inimici poli sese invicem respiciant, prævalet repulsio. Quamobrem qui solam attractionem vult cognoscere; perspectam habere debet eorumdem polorum vim repulsivam, eamque addere vi attrahenti experimento cognitæ, summa indicabit vim totam attrahentem. Hinc forsan fieri posset ut separatis ab invicem attractionis repulsionisque viribus, constans quam Newtonus deprehendit inter attractiones et distantias proportio obtineret. At verò cùm ex crassis observationibus duntaxat id se animadvertisse fateatur Newtonus, non ità longè quærenda videtur mens nostri autoris.

* Vim magneticam decrescere in ratione triplicatâ distantiarum, ab experimentis statuit Wisthonus in egregio opusculo, *De Acûs Magneticæ Inclinatione*: ipse autem Muschenbroekius in Tomo Primo Physices Suæ, rationem diminutionis vis magneticæ esse fere quadruplicatam distantiarum deducit ingeniosissimis experimentis, scilicet magnetem unum alteri lanci bilancis appendit, ponderibus in alterâ lance ad æquilibrium instituendum impositis, tum admovet magnetem sub eo qui suspensus est, sic vis attractionis magnetum æquilibrium tollit, quod adjectis ponderibus restituitur, et pondera illa addenda varia sunt pro variâ distantiâ magnetum inter se, ita ut videantur sequi rationem quadruplicatam inversam spatii vacui inter magnetes intercepti, quod spatium vacuum non est cylindricum aut prismaticum, quia magnetes quibus utebatur Cl. Muschenbroekius, erant sphærici; unde hæc ratio non est accuratè ratio quadruplicata inversa distantiarum.

Aliâ ratione hæc experimenta possunt institui, nempe considerando actionem magnetis in acum magneticam, quantum nempe pro variâ magnetis distantiâ a magnetico meridiano acum detorqueat, atque hâc ratione, experimenta a Wisthono instituta fuisse (nisi memoria fallit) puto, quæ forte methodus ea est etiam quâ Newtonus usus fuerat, et sane omnibus probe notatis quæ ad æstimationem virium requiruntur, vis magneticæ diminutionem secundum triplicatam rationem procedere experimentis quàm accuratissimè potui institutis deprehendi, quæ quidem experimenta (cùm non sint ad manum ea quæ Wisthonus hâc de re tradidit) referre nostri puto esse instituti.

Sit ergo A C B, meridianus magneticus, N C S acus magnetica actione magnetis M, extra meridianum magneticum tracta, sitque linea C M a centro acus ad centrum magnetis ducta meridiano magnetico perpendicularis, et statim supponatur distantiam C M a centro



acus ad centrum magnetis esse physicè infinitam.

Vis magnetica Terræ retrahit acum a situ S C N ad B C A, sed quia illi situi est obliqua, resolvenda est in duas vires, unam lineæ S C N perpendicularem, alteram ipsi parallelam; hæc frustra agit obnitente centro C, illa verò gyrationem acûs efficit, itaque si in puncto quovis c, a c repræsentet vim magneticam totam, a n repræsentabit vim quâ convertitur acus, quæ ideo est ad vim magneticam totam in eo puncto ut sinus anguli a c n (declinationis acus a meridiano magnetico) ad radium; in omnibus punctis C N vim æqualem exerceri supponi potest, sed in parte C S vis ea repulsivè agit, ideóque consentit cum vi quæ convertit partem C N, et ejus efficaciam geminat: notum est verò quod si vires æquales in omnibus punctis C N agant æqualiter et perpendiculariter ut eam lineam convertant, earum omnium efficacia eadem erit ac si summa omnium virium perpendiculariter ageret in puncto P duabus tertiis partibus acus C N a centro C remoto: hic ergo collecta censeri potest tota vis magnetica convertens partem C N, et eodem ratiocinio vis repulsiva convertens partem C S, in puncto p, duabus tertiis arcûs C S a centro C remoto, collecta censeri potest; et propter

trahuntur, alia minus, plurima non trahuntur. Et vis magnetica in uno et eodem corpore intendi potest et remitti, estque nonnunquam longè major pro quantitate materiæ quàm vis gravitatis, et in recessu a magnete decrescit in ratione distantiæ non duplicatâ, sed ferè triplicatâ, quantum ex crassis quibusdam observationibus animadvertere potui.

æqualitatem linearum C N, C S, ideóque partium C P ac C p, tota vis magnetica tam attractiva quàm repulsiva acum convertens puncto P applicata censeri potest.

Si magnes M ab acu infinitè distaret, pari ratiocinio ostenderetur vim totam quâ convertit acum in puncto P esse collectam, et per resolutionem virium, vim quâ convertit acum, esse ad vim totam ejus magnetis M ut sinus anguli N C M (deviationis nempe acûs a magnete) ad radium.

Hinc in casu, in quo acus quiescit, vis magnetica Terræ convertens acum est æqualis vi magnetis convertenti acum, siquidem manet acus in æquilibrio in situ N C S, cùm ergo sit vis magnetica Terræ tota, ad vim magneticam Terræ convertentem acum ut radius ad sinum declinationis acûs a meridiano magnetico; et sit vis magnetis convertens acum (æqualis illi vi magneticæ Terræ convertenti acum) ad vim totam magnetis ut sinus deviationis acûs a magnete ad radium ; ex æquo et per compositionem rationum habebitur vis tota magnetica Terræ ad vim totam magnetis M ut sinus deviationis acûs a magnete, ad sinum declinationis acûs a meridiano magnetico, quod etiam per compositionem virium demonstrari potuisset.

Itaque si idem magnes ad aliam distantiam ponatur, ut in X, ita ut in alio situ acum constituat, habebitur etiam vis magnetis in X, ad vim totam magneticam Terræ, ut sinus declinationis acûs a meridiano magnetico ad sinum deviationis acûs a magnete. Quare per compositionem rationum erit vis magnetis in X, ad vim magnetis in M, ut sinus declinationis acûs a meridiano magnetico cùm magnes est in X divisus per sinum deviationis ab eo magnete in X posito, ad sinum declinationis acûs a meridiano magnetico cùm magnes est in M divisum per sinum deviationis a magnete, in M posito, hoc est, vis magnetis in diversis distantiis, (infinitis, respectu magnitudinis acûs) est ut sinus declinationis acûs a magnetico meridiano divisus per sinum deviationis ejus a magnete.

Equidem quando magnes satis est vicinus ab acu ut diversa censeri possit ejus distantia a diversis punctis acûs, et fortior sit ejus vis in puncta viciniora quàm in remotiora, simulque actio magnetis ad diversa puncta acûs diversâ cum obliquitate applicetur, centrum actionis vis magnetis fiet vicinius extremitati N, attamen ob figuram vulgarem acûs magneticæ quæ spiculi instar formata circa punctum P latior est, centrum rotationis acûs in puncto P manere censeri potest nisi nimia sit magnetis vicinia.

Ideóque distantia magnetis ab acu et angulus deviationis acûs a magnete determinabuntur ducendo lineam a centro magnetis ad id punctum P atque his Principiis per experimenta mox recensenda vires magnetum in diversis distantiis positorum fuerunt æstimatæ.

In his experimentis adhibita fuit acus magnetica trium pollicum, quæ ut solet, attingebat utrâque extremitate circulum divisum in suos gradus, ductâque lineâ perpendiculari in centrum acûs cùm sponte in meridiano magnetico jacebat, applicabatur magnes parallelepipedon super eam lineam, ita ut ejus facies polares perpendiculares essent ei lineæ, polusque ejus meridionalis acum spectaret, Borealemque ejus extremum ad se traheret, mensurabantur distantiæ a centro acûs ad centrum magnetis in pollicibus lineisque Parisiensibus, et observabatur quantùm in singulis magnetis distantiis discederet acus a meridiano magnetico, tum, primò graphice, postea calculo trigonometrico, distantia centri magnetis, a centro rotationis acûs, ut et angulus ejus lineæ cum acu, determinabantur: diviso itaque sinu declinationis acûs per sinum istius anguli quotiens exprimit rationem vis magneticæ in distantia singula inventa, sive logarithmis utendo, differentia logarithmorum sinuum angulorum deviationis a meridiano magnetico et a magnete erit logarithmus vis magneticæ, in distantia in quâ anguli illi habentur, et tertia pars ejus differentiæ erit logarithmus radicis cubicæ vis magneticæ, et assumptis iis radicibus cubicis in numeris, si per eas dividatur numerus aliquis constans (qui hic est $57\frac{3}{4}$) quotientes erunt ipsæ distantiæ; unde liquet quod radices cubicæ virium magnetis sunt inversè ut distantiæ, sive quod vis magnetica sit inversè in ratione triplicatâ distantiarum: sequenti verò Tabellâ exhibentur hæc experimenta magnâ curâ instituta, cum calculo inde deducto; prima columna designat distantias a centro acûs ad centrum magnetis; secunda columna designat distantiam a centro rotationis acûs ad centrum magnetis; tertia declinationem acûs a meridiano magnetico cum suo logarithmo et tertiâ ejus parte; quarta, declinationem acûs a lineâ ductâ a centro rotationis acûs ad centrum magnetis cum suo logarithmo et tertiâ parte; quinta, differentias earum tertiarum partium, cum suis numeris qui rationem exprimunt radicum cubicarum virium magnetis in diversis distantiis; sexta denique quotientes numeri $57\frac{3}{4}$ per istos numeros divisi, qui quotientes ipsas distantias quamproximè æquant.

PROPOSITIO VII. THEOREMA VII.

Gravitatem in corpora universa fieri, eamque proportionalem esse quantitati materiæ in singulis.

Planetas omnes in se mutuò graves esse jam ante probavimus, ut et gravitatem in unumquemque seorsim spectatum esse reciprocè ut qua-

Distantia a centr. magn. ad centrum acûs.	Distantia a centr. magn. ad cent. rotat. acus.	Declin. a merid. magnetico cum logar. et ejus tertiâ parte observata.	Declin. a magnete cum logarith. et ejus tert. parte.	Differentia tertiar. part. logar. cum suis numeris.	Quotientes numeri $57\frac{3}{4}$ per numer. qui radices. cubicas virium magneticarum exhibent, divisi.
51.46	40	75^d.	19^d. 27		
		9.9849438	9.5224235	0.1541734	
		3.3283146	3.1741412	n. 1.426	40.4
60.16	50	61	35.41		
		9.9418193	9.7658957	0.2586412	
		3.3139398	3.2552986	n. 1.144	50.4
67.49	60	44^d. 30′.	53^d. 42′		
		9.8456618	9.9062964	—1.9797885	
		3.2818873	3.3020988	n. 0.9545	60.5
83	80	21	77°. 6′		
		9.5543292	9.9888982	—1.8541437	
		3.1837764	3.3296327	n. 0.7147	80.8
101	100	11^d.	85^d. 46′		
		9.2805988	9.9988135	—1.7605951	
		3.0935329	3.3329378	n. 0.5762	100.2
120.7	120	6. 20′	89′ 22.		
		9.0426249	9.9999735	—1.6809838	
		3.0143083	3.3333245	n. 0.4797	120.3
150.2	150	3. 20	91. 15		
		8.7645111	9.9998966	—1.5882049	
		2.9215037	3.3332988	n. 0.3874	149.
160.1	160	2^d. 40′	91^d. 38′		
		8.6676893	9.9998235	—1.5559553	
		2.8892298	3.3332745	n. 0.3597	160.5

Eodem modo experimenta instituta sunt, lineâ a centro magnetis ad centrum acûs angulum 45 graduum cum meridiano magnetico constituente.

Repetita fuêre ea experimenta cum duobus diversis magnetibus, et vires quidem diversæ sunt repertæ, sed decrescere secundum eamdem distantiarum rationem deprehensæ sunt.

Repetita fuêre cum magnetibus iisdem et armatis et armaturâ spoliatis, et quod omninò observabile est, idem magnes eamdem declinationem acûs magneticæ produxit, sive armatus foret, sive non armatus, in eadem nempe centri magnetis a centro acûs distantiâ ac directione; quod quidem paradoxon videbitur, cùm vis quâ magnes armatus ferrum sustinet, multum differat a vi quâ idem magnes non armatus ferrum trahit. Idem tamen phænomenon in utroque magnete deprehendi in quâlibet distantiâ ac directione, ita ut cùm tutius mensurarentur distantiæ centri acûs et centri magnetis, magnete non armato sum usus in experimentis præcedentibus, ex quibus satis probari credo; *In recessu a magnete vim magneticam decrescere in ratione ferè triplicatâ quantum saltem crassis illis observationibus animadverti potest.*

dratum distantiæ locorum a centro planetæ. Et inde consequens est (per Prop. LXIX. Lib. I. et ejus Corollaria) gravitatem in omnes proportionalem esse materiæ in iisdem.

Porro cùm planetæ cujusvis A partes omnes graves sint in planetam quemvis B, et gravitas partis cujusque sit ad gravitatem totius, ut materia partis ad materiam totius; et actioni omni reactio (per motûs legem tertiam) æqualis sit; planeta B in partes omnes planetæ A vicissim gravitabit, et erit gravitas sua in partem unamquamque ad gravitatem suam in totum, ut materia partis ad materiam totius. Q. e. d.

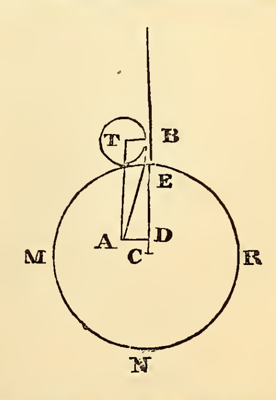
Corol. 1. Oritur igitur et componitur gravitas in planetam totum ex gravitate in partes singulas. Cujus rei exempla habemus (c) in attractionibus magneticis et electricis. Oritur enim attractio omnis in totum ex attractionibus in partes singulas. (d) Res intelligetur in gravitate, concipiendo planetas plures minores in unum globum coire et planetam majorem componere. Nam vis totius ex viribus partium componentium oriri debebit. (e) Si quis objiciat quod corpora omnia, quæ apud nos sunt,

(c) * *In attractionibus magneticis et electricis,* ubi ut plurimùm quò majus est attrahens, eò, cæteris paribus, major est attractio.

(d) * *Res intelligetur in gravitate.* Vires quæ sunt ut materia in omnium formarum corporibus atquè ideò non mutantur cum formis, reperiri debent in corporibus universis singulisque corporum partibus, et esse proportionales quantitati materiæ, hinc vis corporis totius ex viribus partium componentium oriri debebit. Si itaque concipiamus Jovem et satellites ejus ad se invicem accedere ut globum unicum componant, pergent singuli sese mutuò trahere, et viceversâ si corpus Jovis resolveretur in globos plures, hi quoque globi, satellitum instar, sese mutuò traherent.

67. Globi cujusque vis absoluta est ut quantitas materiæ in eodem globo; vis autem motrix quâ globus unusquisque trahitur in alterum, et quæ ponderis nomine vulgò designatur, est ut contentum sub quantitatibus materiæ in globis duobus applicatum ad quadratum distantiæ inter centra (per Cor. 4. Prop. LXXVI. Lib. I.) et huic vi proportionalis est quantitas motûs quâ globus uterque dato tempore movebitur in alterum (Def. VIII. Lib. I.) vis autem acceleratrix quâ globus unusquisque pro ratione materiæ quæ attrahitur in alterum est ut quantitas materiæ in globo altero applicata ad quadratum distantiæ inter centra (per Cor. 2. Prop. LXXVI. Lib. I.) et huic vi proportionalis est velocitas quâ globus attractus dato tempore movebitur in alterum (Def. VII. Lib. I.). Hinc corporum cœlestium motus inter se possunt facile determinari. Quia verò respectu Terræ totius exigua admodum sunt corpora terrestria, patet minimam quoque esse mutuam horum corporum attractionem respectu attractionis in Terram totam. Sic sphæra Terræ homogenea diametroque pedis unius descripta minus trahet corpusculum juxtà superficiem suam quàm Terra juxtà suam in ratione diametri sphæræ ad diametrum Terræ (Prop. LXXII. Lib. I.) hoc est in ratione 1 ad 39231566 sive 1 ad 40000000 circiter, quæ tantilla vis sentiri non potest.

(e) * *Si quis objiciat,* &c. Majora etiam quæ in Terrâ concipi possunt corpora haud magnos



effectus producent. Sit enim E M N R Tellus, cujus centrum C, eaque ponatur sphærica et homogenea. Sit corpus ubicumque putà in loco B, sublato omni impedimento, ad Telluris

hâc lege gravitare deberent in se mutuò, cùm tamen ejusmodi gravitas neutiquam sentiatur: respondeo quod gravitas in hæc corpora, cùm sit ad gravitatem in Terram totam ut sunt hæc corpora ad Terram totam, longè minor est quàm quæ sentiri possit.

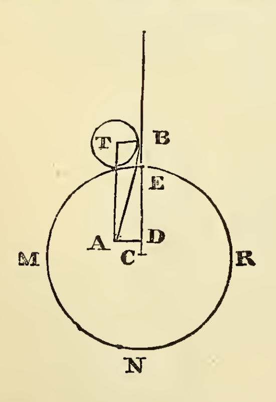
Corol. 2. Gravitatio in singulas corporis particulas æquales est reciprocè ut quadratum distantiæ locorum a particulis. Patet per Corol. 3. Prop. LXXIV. Lib. I.

PROPOSITIO VIII. THEOREMA VIII.

Si globorum duorum in se mutuò gravitantium materia undique in regionibus, quæ a centris æqualiter distant, homogenea sit: erit pondus globi alterutrius in alterum reciprocè ut quadratum distantiæ inter centra.

Postquam invenissem gravitatem in planetam totum oriri et componi ex gravitatibus in partes; et esse in partes singulas reciprocè proportionalem quadratis distantiarum a partibus: dubitabam an reciproca illa proportio duplicata obtineret accuratè in vi totâ ex viribus pluribus compositâ, an verò quam proximè. Nam fieri posset ut proportio, quæ in

superficiem perpendiculariter dirigeretur per rectam B E C; in ipsâ Telluris superficie addatur sphæra T, Telluri homogenea triumque



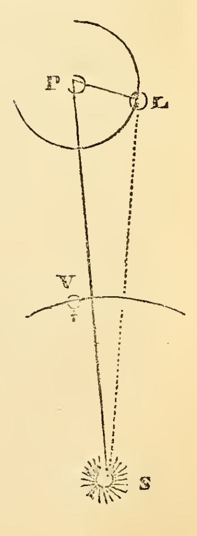
milliarium sive leucæ unius marinæ diametro descripta quam tangat recta B E C; designet E C vim gravitatis in ipsa superficie Terræ, et designabit T B gravitatem in ipsa superficie sphæræ T (Prop. LXXII. Lib. I.) gravitas in E, in Tellurem erit ad gravitatem in B in eandem, ut $B C^{2}$ ad $E C^{2}$ (Prop. LXXIV. Lib. I.). Quarè ponendo $B C^{2}$ ad $E C^{2}$ ut E C ad B D, recta B D exhibebit gravitatem in Terram in loco B, ac proindè completo rectangulo T B D A, gravitatis directio erit per diagonalem B A (41. Lib. I.). Jam in triangulo rectangulo B A D, est B D ad A D ut radius ad tangentem anguli D B A. Quia verò Telluris semidiameter mediocris est ferè 1145 leucarum marinarum (quarum nempe viginti gradum complent, uno marino milliari singulo gradus minuto respondenti) poni etiam potest recta B D æqualis E C, ideóque erit ad T B, sive B D ad A D ut 2290 ad 1, unde prodit angulus A B D, minuti primi cum dimidio. Si itaque loco sphæræ T, intelligatur mons aliquis cujuscumque figuræ cujus attractio æquipolleat attractioni ipsiusmet sphæræ, pendulum ad radicem hujusce montis constitutum vi montis attractum deviabit a perpendiculo magis quàm minuti unius primi intervallo. Hæc autem aberratio minor fiet, si pendulum in partes contrarias ab aliis montibus circumpositis trahitur, si densitas partium internarum Terræ, major sit quàm densitas partium montis, denique ex piramidali montium figurâ, aliisque forte causis, hinc admodum difficile ut perturbationes illæ sensibiles fiant nisi in maximis montibus; ut etiam D^{mus}. Bouguer attractionem montis Chimboraco in Peruvio sensibilem deprehendit.

majoribus distantiis accuratè obtineret, prope superficiem planetæ ob inæquales particularum distantias et situs dissimiles, notabiliter erraret. Tandem verò, (f) per Prop. LXXV. et LXXVI. Libri primi et ipsarum Corollaria, intellexi veritatem Propositionis de quâ hic agitur.

Corol. 1. Hinc inveniri et inter se comparari possunt pondera corporum in diversos planetas. Nam pondera corporum æqualium circum planetas in circulis revolventium sunt (per Corol. 2. Prop. IV. Lib. I.) ut diametri circulorum directè et quadrata temporum periodicorum inversè; et pondera ad superficies planetarum, aliasve quasvis a centro distantias, majora sunt vel minora (per hanc Propositionem) in duplicatâ ratione distantiarum inversâ. Sic ex temporibus periodicis Veneris circum Solem dierum 224 et horarum $16\frac{3}{4}$, satellitis extimi circumjovialis circum Jovem dierum 16 et horarum $16\frac{8}{15}$, satellitis Hugeniani circum Saturnum dierum 15 et horarum $22\frac{2}{3}$, et Lunæ circum Terram dierum 27. hor. 7. min. 43, collatis cum distantiâ mediocri Veneris a Sole et cum elongationibus maximis heliocentricis satellitis extimi circumjovialis a centro Jovis 8′. 16″. satellitis Hugeniani a centro Saturni 3′. 4″. et Lunæ a centro Terræ 10′. 33″. (g) computum ineundo inveni quod corporum

(f) * *Per Prop. LXXV. et LXXVI. Lib. I.* Ex singularum particularum viribus componitur vis planetæ totius (Cor. 1. Prop. VII.) et gravitatio in singulas corporis particulas æquales, est reciprocè ut quadratum distantiæ locorum a particulis (per Cor. 2. Prop. ejusdem). Hinc vis planetæ totius decrescit in duplicatâ ratione distantiarum a centro, modò tamen planetæ ex uniformi materiâ constare ponantur (Prop. LXXV. Lib. I.) et hujusmodi planetæ duo se mutuò trahent vi decrescente in duplicatâ ratione distantiæ inter centra (per Corollaria ejusdem Prop.). Quamvis autem planetæ in progressu a centro ad circumferentiam non sint uniformes, obtinebit idem decrementum in ratione duplicatâ distantiæ (Prop. LXXVI. Lib. I.) si secundùm quamcumque legem crescat vel decrescat densitas in progressu a centro ad circumferentiam, et similiter hujusmodi planetæ duo sese invicem trahent viribus in ratione duplicatâ distantiarum inter centra decrescentibus.

(g) 68. * *Computum ineundo.* * Ut hæc omnia ad algebrica signa revocentur; sit S centrum Solis, V centrum Veneris, P centrum alterius planetæ primarii, L satelles in maximâ suâ elongatione heliocentricâ quam metitur angulus L S P, unde angulus S L P est rectus. Dicatur tempus periodicum Veneris t; tempus periodicum satellitis L circa primarium P dicatur θ. Distantia S P qualiscumque sit, dicatur z; ratio S P ad S V quæ datur per Phænom. IV. exprimatur per rationem a ad b, inde erit $SV = \frac{bz}{a}$;

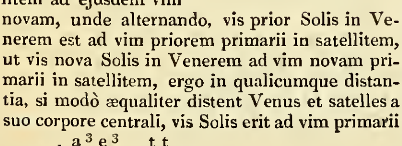


et radio existente 1 sinus elongationis maximæ heliocentricæ satellitis L, sive sinus anguli L S P dicatur e; Hinc in triangulo S L P rectangulo, erit sinus totus anguli S L P (1) ad sinum anguli L S P (e) ut latus S P (z) ad latus P L quod erit ergo e z; Quoniam vis Solis in Venerem et vis primarii in satellitem, sunt per Cor. 2. Prop. IV. Lib. I. ut distantiæ Veneris et satellitis a centro Solis et primarii divisæ per quadrata temporum periodicorum, sive ut $\frac{bz}{att}$ ad $\frac{ez}{\theta\theta}$, sive, si vis Solis dicatur 1, erit vis primarii $\frac{aett}{b\theta\theta}$. Sed vis primarii in satellitem in distantiâ

æqualium et a centro Solis, Jovis, Saturni ac Terræ æqualiter distantium pondera sint in Solem, Jovem, Saturnum ac Terram ut 1, $\frac{1}{1067}$, $\frac{1}{3021}$, $\frac{1}{169282}$ (h) respectivè, et auctis vel diminutis distantiis, pondera diminu-

P L, est ad vim quâ in ipsum ageret si tantumdem distaret quantùm distat Venus a Sole, inversè ut quadrata distantiarum, fiat ergo $\frac{1}{e^2 z^2}$ ad $\frac{a^2}{b^2 z^2}$ ut $\frac{a e t t}{b \theta \theta}$ ad $\frac{a^3 e^3}{b^3} \times \frac{t t}{\theta \theta}$ et habebitur tandem quod vis Solis in Venerem est ad vim primarii P in satellitem, si tantumdem distaret ab ipso quantum distat Venus a Sole ut 1 ad $\frac{a^3 e^3}{b^3} \times \frac{t t}{\theta \theta}$.

Jam verò transferantur Venus et satelles in aliâ quâcumque distantiâ, sed ita ut ambo iterum æquæliter distent a corpore suo centrali; vires quidem centralium corporum in ipsos mutabuntur, sed eodem modo utrinque mutabuntur; unde manebunt in eâdem ratione ac priùs, nam erit ut quadratum novæ distantiæ ad quadratum prioris distantiæ, ut vis prior Solis in Venerem ad vim novam; et in eadem ratione erit vis prior primarii in satellitem ad ejusdem vim novam, unde alternando, vis prior Solis in Venerem est ad vim priorem primarii in satellitem, ut vis nova Solis in Venerem ad vim novam primarii in satellitem, ergo in qualicumque distantia, si modò æqualiter distent Venus et satelles a suo corpore centrali, vis Solis erit ad vim primarii ut 1 ad $\frac{a^3 e^3}{b^3} \times \frac{t t}{\theta \theta}$.



Denique, cùm pondera corporum sint ut vires centrales et quantitates materiæ quæ per eas vires urgentur conjunctim, et in hoc Corollario Newtonus supponat *corpora æqualia et æqualiter a corporibus centralibus distantia:* pondera talium corporum erunt ut vires centrales, ideóque pondus in Solem erit ad pondus in primarium qualemcumque ut 1 ad $\frac{a^3 e^3}{b^3} \times \frac{t t}{\theta \theta}$.

Computus per logarithmos commodè initur, exempli gratiâ sit P centrum Jovis, et L hujus extimus satelles, est b ad a ut 72333 ad 520096 quorum logarithmi sunt 4.8593365 et 5.7160855; est e sinus anguli 8′ 16″ cujus logarithmus est —3.3810609 (radio existente 1) hinc logarithmus $\frac{a e}{b} = -2.2378099$, et logarithmus $\frac{a^3 e^3}{b^3}$ hujus triplus est — 6.7134297.

Præterea logarithmus t (sive 224d. horar. 16$\frac{3}{4}$, hoc est, horarum 5392$\frac{3}{4}$) est 3.7318103. logarithmus θ (sive 16d. 16$\frac{8}{15}$ horar. hoc est, horarum 400$\frac{8}{15}$) est 2.6026384 ideóque log. $\frac{t}{\theta}$ est 1.1291719 et log. $\frac{t t}{\theta \theta}$ hujus duplus est 2.2583438.

Unde tandem logarithmus $\frac{a^3 e^3}{b^3} \times \frac{t t}{\theta \theta}$ est — 4.9717735, quæ fractio in decimalibus potuisset exprimi, sed eam Newtonus exprimit unitate divisâ per denominatorem quemdam, cujus logarithmus obtinebitur hunc logarithmum — 4.9717735 ex logarithmo unitatis nempe 0. tollendo, erit ideo 3.0282265 cujus logarithmi numerus est 1067 ut eum Newtonus invenit.

(h) * *Respectivè*, &c. * In præcedentibus editionibus (ante Londinensem) indicabat Newtonus hic loci elementa ex quibus rationes verarum diametrorum Jovis, Saturni et Terræ determinaverit, quæ quidem elementa, ex novis observationibus, quibusdam minutiis immutavit, illa hæc esse nobis videntur.

Primò, diametrum Solis ex mediocri Terræ distantiâ visam, 32′ 8″ assumit, qualem etiam Cassinus in novissimis Astronomicis Tabulis eam constituit, cùm prius 32.′12″ statueretur; tum diametrum Jovis in mediocri ejus a Tellure distantiâ 37″ facit qualem eam prodiisse sub finem primi phænomeni dicit, cùm prius fieret 40″. Ex his, cùm distantia mediocris Solis (sive Telluris n. 53.) a Jove sit ad mediocrem distantiam Solis a Terrâ ut 520096 ad 100000 (per Phænom. IV.) et diametri veræ sphærarum sub parvis angulis visarum sint directè ut anguli sub quibus videntur, et ut distantiæ ex quibus spectantur, erit diameter vera Solis ad veram diametrum Jovis ut 1928″ × 100000 ad 37″ × 520096 sive 10.000 ad 997. ut calculo invenitur.

Secundò, diametrum Saturni in mediocri ejus a Sole sive Tellure distantiâ assumit 16″, quem 22″ in prioribus edit. faciebat: inde cùm distantia ejus mediocris a Sole sive Tellure, sit ad mediocrem distantiam Solis a Terrâ ut 954006 (Phæn. IV.) ad 100000 erit diameter vera Solis ad veram diametrum Saturni ut 1928″ × 100000 ad 16″ × 954006, sive 10000 ad 791.

Denique parallaxim Solis, in distantiâ ejus mediocri 10″. 30‴ constituit, parallaxis verò Solis est ipsa semi-diameter Terræ e Sole visa, ergo diametri veræ Solis et Terræ sunt ut diameter Solis apparens ad duplum parallaxeos So-

untur vel augentur in duplicatâ ratione: pondera æqualium corporum in Solem, Jovem, Saturnum ac Terram in distantiis 10000, 997, 791, et 109 ab eorum centris, atque ideò in eorum superficiebus, (i) erunt ut 10000, 943, 529, et 435 respectivè. Quanta sint pondera corporum in superficie Lunæ, dicetur in sequentibus.

Corol. 2. Innotescit etiam quantitas materiæ in planetis singulis. Nam quantitates materiæ in planetis sunt ut eorum vires in æqualibus distantiis ab eorum centris, id est, in Sole, Jove, Saturno ac Terrâ sunt ut 1, $\frac{1}{1067}$, $\frac{1}{3021}$, et $\frac{1}{169282}$ respectivè. Si parallaxis Solis statuatur major vel minor quàm 10″. 30‴, (k) debebit quantitas materiæ in Terrâ augeri vel diminui in triplicatâ ratione.

lis, hoc est, 1928, ad 21, sive ut 10000 ad 109 proximè.

(i) * *Erunt ut;* * Ut insistere pergamus ei analysi quâ Newtonus usus esse videtur, assumptis omnibus ut in nota 68.

Tangens semi-diametri apparentis Solis dicatur s, radio existente 1.

Sinus parallaxeos Solis (quæ est semi-diameter primarii P e Sole visi) dicatur p.

Vera semi-diameter primarii dicatur d.

Erit ex naturâ parallaxeôn p ad 1 sicut d ad P S quæ dicebatur z, quæque ideo dicenda erit $\frac{d}{p}$.

Pariter sicut 1 ad s, distantia z sive $\frac{d}{p}$ ad semi-diametrum veram Solis quæ erit $\frac{sd}{p}$.

Rursus parallaxis satellitis L dicatur q.

Ex naturâ parallaxeôn erit q ad 1 ut d ad P L, quæ ideo erit $\frac{d}{q}$ et numerus semi-diametrorum primarii P in ea linea P L contentus erit $\frac{1}{q}$, et cùm singula semi-diameter e Sole spectata, videatur sub angulo cujus sinus est p, propter istorum sinuum parvitatem, anguli erunt ut sinus, et sinus elongationis heliocentricæ qui dicebatur e continebit sinum p numero vicium qui dici poterit $\frac{1}{q}$ ideóque erit $e = \frac{p}{q}$.

Si autem fingatur corpus in Solis superficie positum, quod itaque ab ejus centro distet quantitate æquali ejus veræ semi-diametro $\frac{sd}{p}$, vis Solis in id corpus, erit ad vim P in corpus æquale ad eamdem distantiam a centro ejus primarii positi ut 1 ad $\frac{a^3 e^3}{b^3} \times \frac{tt}{\theta\theta}$ per not. 68. sive substitutione factâ $\frac{p^3}{q^3}$ loco e^3, ut $\frac{a^3 p^3}{b^3 q^3} \times \frac{tt}{\theta\theta}$.

Sed hæc vis primarii in id corpus, erit ad vim ejusdem corporis in superficie primarii positi inversè ut quadrata distantiarum, sive inversè ut quadrata diametrorum verarum Solis et primarii, sive erit $\frac{p^2}{s^2 d^2}$ ad $\frac{1}{d^2}$ sicut $\frac{a^3 p^3}{b^3 q^3} \times \frac{tt}{\theta\theta}$ ad $\frac{a^3 ps^2}{b^3 q^3} \times \frac{tt}{\theta\theta}$ quæ quantitas exprimet vim primarii in corpus in suâ superficie positum, dum vis Solis in corpus æquale in suâ superficie etiam positum erit 1: quæ quantitas $\frac{a^3 p s^2}{b^3 q^3} \times \frac{tt}{\theta\theta}$ est æqualis quantitati $\frac{a^3 p^3}{b^3 q^3} \times \frac{tt}{\theta\theta}$ (quæ vim in æqualibus distantiis exprimit) divisæ per $\frac{p^2}{s^2}$.

Sed ob æqualitatem corporum vires in corpora sunt ut pondera corporum; hinc ergo habetur ratio ponderis corporum æqualium in superficiebus Solis, Jovis, Saturni ac Terræ.

Quare si logarithmis utamur; ex logarithmo p tollatur logarithmus s, et residui duplum tollatur ex logarithmo numeri qui exprimebat vim primarii in æqualibus distantiis, residuum erit logarithmus vis primarii in corpora in ejus superficie posita.

Calculus iste respectu Terræ commodè fieri potest, quia datur ex observatione parallaxis Solis p, et apparens Solis semi-diameter: in Jove et Saturno parallaxis ipsorum est æqualis eorum semi-diametro apparenti in mediocri ipsorum distantiâ, et semi-diameter apparens Solis in ipsis est ad semi-diametrum Solis apparentem in Terrâ, inversè ut distantiæ eorum et Terræ a Sole.

(k) *Debebit quantitas materiæ in Terrâ augeri vel diminui in triplicatâ* parallaxeôn *ratione.* * Nam cùm quantitates materiæ in planetis singulis, sint ut eorum vires in æqualibus distantiis; quantitas materiæ in Sole est ad quantitatem materiæ in Terrâ ut 1 ad $\frac{a^3 p^3}{b^3 q^3} \times \frac{tt}{\theta\theta}$, manente ergo ratione a ad b distantiarum nempe Terræ et Veneris a Sole, manentibus temporibus periodicis Veneris et Lunæ t et θ, et sinu parallaxeos

Corol. 3. Innotescunt etiam densitates planetarum. Nam pondera corporum æqualium et homogeneorum in sphæras homogeneas sunt in superficiebus sphærarum ut sphærarum diametri, per Prop. LXXII. Lib. I. ideóque sphærarum heterogenearum densitates ([l]) sunt ut pondera illa applicata ad sphærarum diametros. Erant autem veræ Solis, Jovis, Saturni ac Terræ diametri ad invicem ut 10000, 997, 791 et 109, et pondera in eosdem ut 10000, 943, 529 et 435 respectivè, et propterea densitates sunt ut 100, 94½, 67 et 400. ([m]) Densitas Terræ quæ prodit ex hoc computo non pendet a parallaxi Solis, sed determinatur per parallaxin Lunæ, et propterea hic rectè definitur. Est igitur Sol paulò densior quàm Jupiter, et Jupiter quàm Saturnus, et Terra quadruplò densior quàm Sol. Nam per ingentem suum calorem Sol rarescit. Luna verò densior est quàm Terra, ut in sequentibus patebit.

Corol. 4. Densiores igitur sunt planetæ qui sunt minores, cæteris paribus. ([n]) Sic enim vis gravitatis in eorum superficiebus ad æqualitatem magis accedit. Sed et densiores sunt planetæ, cæteris paribus, qui sunt Soli propiores; ut Jupiter Saturno, et Terra Jove. In diversis utique

Lunæ q, liquet quod si varietur sinus parallaxeos Solis p et ex novis observationibus, putâ ex observatione transitus Veneris super discum Solis, alia parallaxis cujus sinus sit ϖ deprehendatur, eo casu invenietur quantitas materiæ in Sole ad quantitatem materiæ in Terrâ ut 1 ad $\frac{a^3 \varpi^3}{b^3 q^3} \times \frac{tt}{\theta\theta}$, itaque quantitas materiæ Terræ in præcedenti hypothesi parallaxeos p reperta, erit ad eam quæ tunc invenietur ut p^3 ad ϖ^3 sive (ob exiguitatem angulorum parallacticorum) ut cubi parallaxeôn.

([l]) * *Sunt ut pondera illa.* Nam pondera corporum æqualium et homogeneorum in sphæras homogeneas et inæquales sunt in superficiebus sphærarum ut sphærarum diametri (loco cit.), et pondera corporum æqualium et homogeneorum in sphæras heterogeneas et æquales in superficiebus sphærarum sunt ut quantitates materiæ in sphæris, hoc est, ut densitates sphærarum (2. Lib. 1.). Undè pondera corporum æqualium et homogeneorum in sphæras heterogeneas et inæquales in superficiebus sphærarum sunt in ratione compositâ ex ratione densitatum et diametrorum sphærarum, consequenter densitates sphærarum sunt pondera illa directè et sphærarum diametri inversè.

([m]) * *Densitas Terræ quæ prodit ex hoc computo non pendet a parallaxi Solis,* &c. * Ratio ponderum in ipsis superficiebus Solis et Terræ exprimebatur numeris 1 ad $\frac{a^3 p s^2}{b^3 q^2} \times \frac{tt}{\theta\theta}$ (denominationibus iisdem adhibitis quæ in notis ([g]) et ([i]) assignantur. Densitates verò sunt ut illa pondera applicata ad sphærarum diametros vel semi-diametros; semi-diameter vera Solis erat $\frac{sd}{p}$, et semi-diameter vera Terræ erat d; quare densitates Solis et Terræ erant ut $\frac{1}{\frac{sd}{p}}$ ad $\frac{a^3 p s^2}{b^3 q^2 d} \times \frac{tt}{\theta\theta}$ sive ut 1 ad $\frac{a^3 s^3}{b^3 q^2} \times \frac{tt}{\theta\theta}$, in quâ quantitate parallaxis Solis, quæ dubia est, non amplius adhibetur, sed tantum quantitates de quibus constat apud astronomos, parallaxis nempe Lunæ, semi-diameter apparens mediocris Solis, ratio distantiarum Terræ et Veneris a Sole, et ratio temporum periodicorum Veneris et Lunæ, quare ea *densitas Terræ hic rectè definitur.*

([n]) * *Sic enim vis gravitatis.* Quoniam sphærarum heterogenearum densitates sunt ut pondera in earum superficiebus ad sphærarum diametros applicata, ideóque pondera ut densitates et sphærarum diametri conjunctim, si densiores sint planetæ qui sunt minores, minor diameter in variis planetis per majorem densitatem quâdam ex parte compensabitur, ac proinde vis gravitatis in variorum planetarum superficiebus ad æqualitatem magis accedet quàm si planetæ omnes vel densitate æquales forent, vel planetæ majores forent minoribus densiores.

distantiis a Sole collocandi erant planetæ, ut quilibet pro gradu densitatis calore Solis majore vel minore frueretur. Aqua nostra, si Terra locaretur in orbe Saturni, rigesceret; si in orbe Mercurii, in vapores statim abiret. Nam lux Solis, cui calor proportionalis est, (°) septuplo densior est in orbe Mercurii quàm apud nos: et thermometro expertus sum quod septuplo Solis æstivi calore aqua ebullit. Dubium verò non est quin materia Mercurii ad calorem accommodetur, et propterea densior sit hâc nostrâ; cùm materia omnis densior ad operationes naturales obeundas majorem calorem requirat.

(°) * *Septuplo densior est.* Nam (14. Lib. I.) densitas lucis decrescit in ratione duplicatâ distantiarum a Sole, sed (Phæn. IV.) distantia Terræ est ad distantiam Mercurii ut 1000 ad 387. proximè. Est igitur densitas lucis in Mercurii ad densitatem lucis in Terrâ ut 1000000 ad 149769 seu ut 6,68 ad 1, hoc est ferè ut 7 ad 1.

* Addit Newtonus: *thermometro expertus sum quod septuplo Solis æstivi calore aqua ebullit:* hæc videntur referri ad n. 270. Transactionum Philosophicarum, qui continet scalam de caloris gradibus, ingeniosè sane constructam, cujus author non indicatur: " Constructa fuit " hæc Tabula ope thermometri et ferri candentis. Per thermometrum ex oleo lini construc- " tum inveni (inquit author) quod si oleum ubi " thermometer in nive liquescente locabatur " (computus enim in hac Tabula inchoatur a ca- " lore quo aqua incipit rigescere tanquam ab in- " fimo caloris gradu seu communi termino ca- " loris et frigoris) occupabat spatium partium " 10000 idem oleum calore corporis humani " rarefactum occupabat spatium 10256 et calore " aquæ jamjam ebullire incipientis spatium " 10705 et calore aquæ vehementer ebullientis " 10725, et calore stanni liquefacti ubi incipit " rigescere 11516, &c.; rarefactio aëris æquali " calore fuit decuplo major quàm rarefactio olei " quasi quindecim vicibus major quàm rarefactio " spiritus vini. Et ex his inventis ponendo ca- " lores olei ipsius rarefactioni proportionales et " pro calore corporis humani scribendo partes 12 " prodiit calor aquæ ubi vehementer ebullit par- " tium 34." In eâdem autem Tabulâ ponendo calorem corporis humani 12, ponit calorem aëris æstivi 4, 5, vel 6. Quare medium assumendo, est ut quinque ad 34 sive proximè ut 1 ad 7, ita calor aëris æstivi ad calorem aquæ ebullientis: qui ergo septuplus est caloris aëris æstivi secundum assertum Newtonianum.

Disputari autem posset, quod calor rarefactioni olei proportionalis supponatur absque sufficienti ratione, et quod terminus a quo rarefactio ea numerari incipit (is nempe gradus frigoris quo aqua incipit rigescere) sit ad arbitrium assumptus; cùm ea rarefactio numerari debuisset ab absoluto frigore, eo nempe frigoris et gradu quo partes olei nullam ulteriorem compressionem per vim frigoris pati possent, qui gradus est ignotus; at hujus Tabellæ constructio, ingeniosè demonstratur ab eodem Autore per ferri candentis refrigerationem; locavit enim ferrum candens in vento uniformiter spirante, ut aër a ferro calefactus semper abriperetur a vento, et aër frigidus in locum ejus uniformi cum motu succederet, sic enim aëris partes æquales æqualibus temporis calefactæ sunt et concipiebant calorem calori ferri proportionatam; hinc si dividatur tempus refrigerii ferri in instantia æqualia, erit, ut totus calor ferri initio primi instantis, ad calorem durante eo instanti amissum: sic calor ferri initio secundi instantis ad calorem durante eo secundo instanti amissum, &c. ideóque fingatur lineam rectam duci cujus abscissæ designent tempora; ordinatæ in extremis abscissis erigantur, quæ calores ferri singulis momentis designent; differentiæ earum ordinatarum erunt iis ipsis ordinatis proportionales geometricè, ideóque curva per earum ordinatarum vertices transiens erit logarithmica, crescentibus ergo temporibus arithmeticè, calor ferri geometricè decrescit et propterea calorum eorum geometrica ratio per logarithmorum Tabulam haberi poterit.

Quo supposito, imponebat Autor candenti ferro particulas diversorum metallorum, et aliorum corporum liquabilium, et notavit tempora refrigerii donec particulæ omnes amissâ fluiditate rigescerent, et tandem calor ferri æquaretur calori corporis humani; hinc calores omnes quibus cera, bismuthum, stamnum, plumbum, regulus stibii, eorumque variæ miscelæ liquescunt, innotuêre, sive eorum geometricæ rationes, cùmque calores ita inventi eamdem habuerint inter se rationem cum caloribus per thermometrum inventis, propterea rectè assumptum fuit, rarefactiones olei ipsis caloribus esse proportionales.

PROPOSITIO IX. THEOREMA IX.

Gravitatem pergendo a superficiebus planetarum deorsum decrescere in ratione distantiarum a centro quam proximè.

Si materia planetæ quoad densitatem uniformis esset, obtineret hæc Propositio accuratè: per Prop. LXXIII. Lib. I. Error igitur tantus est, quantus ab inæquabili densitate oriri possit.

PROPOSITIO X. THEOREMA X.

Motus planetarum in cœlis diutissimè conservari posse.

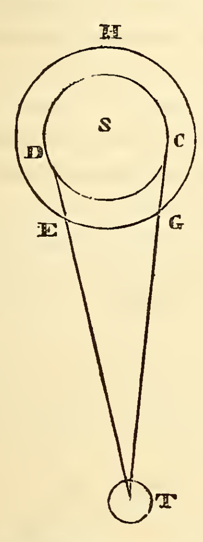
In scholio Propositionis XL. Lib. II. ostensum est quod globus aquæ congelatæ, in aëre nostro liberè movendo et longitudinem semi-diametri suæ describendo, ex resistentiâ aëris amitteret motûs sui partem $\frac{1}{4586}$. Obtinet autem eadem proportio quam proximè in globis utcunque magnis et velocibus. Jam vero globum Terræ nostræ densiorem esse, quàm si totus ex aquâ constaret, sic colligo. Si globus hicce totus esset aqueus, quæcunque rariora essent quàm aqua, ob minorem specificam gravitatem emergerent et supernatarent. Eâque de causâ globus terreus aquis undique coopertus, si rarior esset quàm aqua, emergeret alicubi, et aqua omnis inde defluens congregaretur in regione oppositâ. Et par est ratio Terræ nostræ maribus magnâ ex parte circumdatæ. Hæc si densior non esset, emergeret ex maribus, et parte sui pro gradu levitatis extaret ex aquâ, maribus omnibus in regionem oppositam confluentibus.

Eodem argumento (p) maculæ solares leviores sunt quàm materia lucida solaris cui supernatant. Et in formatione qualicunque planetarum

(p) 69. *Maculæ solares.* Si radii solares telescopio duobus vitris instructo excipiantur, locusque circumpositus obscuretur, inversa Solis imago suprà chartam ad axem telescopii normalem pingitur, et maculæ conspiciuntur, quæ nunc emergere, nunc evanescere observantur. Maculas illas in materiâ solari supernatare vel saltem Soli quàm proximas esse certum est.

Sit enim Sol in S, ex Tellure T visus sub angulo D T C 32′. Si macula orbitam aliquam H E G H extrà Solis superficiem describeret, non videretur Solis discum ingredi antequam ad E pervenisset ubi recta T E D ex Terrâ ducta discumque Solis tangens, maculæ orbitam secat, et ductâ T G C Solem quoque tangente, per Solis superficiem tantummodò progredi videretur, quandiù describeret arcum E G qui semi-peripheriâ minor est, ideóque arcus ille tempore quod semi-periodo minus est, percurreretur. Sed ex observationibus notum est quamplures maculas duas aut tres integras periodos absolvisse 27 dierum spatio atquè $13\frac{1}{2}$ dies impendisse ut a limbo occidentali Solis ad limbum orientalem pervenirent; illarum ergò macularum orbitæ vel in ipsâ superficie solari extiterunt, vel Soli fuerunt proximæ.

* Newtonus hic loci receptam opinionem sequitur, maculas solares ipsi solari superficiei inhærere; quæ opinio his tribus argumentis nititur; 1°. Quod illæ maculæ in medio Solis



disco latiores videantur quàm juxta ejus limbum ubi angustissimæ apparent; et quidem hoc demonstrat maculas eas non esse planetas rotundos, ut quidam volebant, sed esse corpora lata, non verò spissa, et a Sole non multum distare: nullomodo tamen exinde probatur eas esse in ipsâ superficie Solis: 2um. Argumentum est, quòd spatium quod maculæ emetiuntur in medio disco Solis diurno spatio, sit proportionatum revolutioni ipsarum, quod majus esse debuisset si forent cis Solem, sed rursus hoc argumentum proximitatem macularum superficiei Solis, non verò earum ipsi superficiei Solis adhærentiam probat.

Denique asserit Keillius (Lection. Ast. V.) observationibus constare, maculas quæ integram revolutionem 27 dierum absolvunt, tredecim cum semisse dies impendere ut a limbo occidentali Solis ad orientalem perveniant, unde meritò concludit quod cùm dimidium tempus periodi suæ in transcurrendo Solis disco impendant, ipsarum orbita in ipsâ superficie solari extet. At Wolfius (Ast. n°. 413.). Quoniam, inquit, maculæ solares tribus circiter diebus diutius post Solem latent quàm hemisphærium nobis conspicuum peragrantes consumunt, Soli quidem proximæ sunt, non ipsi tamen superficiei solari inhærent, sed aliquam ab eâ distantiam habent.

Et quidem in astronomorum fastis quæ in manibus venerunt, nunquam deprehendi, maculam per tredecim super discum Solis actu visam fuisse, nullam reducem ante decimum quintum diem observatam; et quidem cùm anno 1739 plurimæ maculæ Solis discum percurrerent, multasque ab ingressu ad egressum usque persequerer, nulla integros tredecim dies in disco perstare mibi visa est; cùm autem quæstio hæc tota, sit de facto, referam observationes duas quæ accuratissimè institutæ videntur; desumetur altera e Transactionibus Philosophicis Anglicanis n. 294, altera e Diario Eruditorum ad annos 1676. 1677.

"15. Maii anni 1703 septempedali telescopio circa centrum Solis maculam detexit $D^{nus.}$ Stannyan: eamdem observavit diebus sequentibus, et 22. Maii mane jam admodum vicinam limbo Solis eam vidit; 23^{a}. Maii horâ sextâ matutinâ appulerat ad ipsum limbum Solis, angusta et tenuis, similis aristæ, et ejus distantia a limbo Solis non excedebat ipsius maculæ parvam diametrum. Octava, decima, duodecimaque hora illam adhuc videbat; secunda hora ipsi circumferentiæ applicata erat, nec visibilis ipsi fuisset nisi totâ die oculos in ipsam intentos habuisset; quarta denique hora nullum ejus vestigium telescopio decem et octo pedum optimo apparebat, unde statuendum illam omninò e Sole exivisse hora $3^{a\cdot}$ post meridiem $23^{æ\cdot}$ diei Maii.

Tertiâ Junii et sequentibus diebus ad observationes rediit noster, usus telescopio decem et octo pedum; tandem die septimâ Junii, horâ tertiâ pomeridianâ, eamdem maculam (ut postea certior ejus factus est) Solis discum subeuntem vidit; horâ quartâ decem et octo pedum telescopio Sole lucidissimo eam distinctè vidit, sed tenuem admodum et ellipticâ atmosphærâ cinctam, sequentibus verò diebus ex via cui institit, eamdem esse quam prius viderat agnovit, et eam est persecutus sequentibus diebus, donec tandem 18. Junii tenuis apparere incepit, die verò decimâ nonâ ab horâ $5^{ta\cdot}$ matutinâ eam observare cæpit telescopio decem et octo pedum ferè singulis semi-horis; horâ duodecimâ atmosphærâ et sensibili latitudine spoliatam vidit, et adeo vicinam Solis limbo, ut vix inter ipsam et limbum Solis lucis radius perciperetur; horâ secundâ evanescebat, ita ut horâ secundâ cum semisse evanuisse censenda sit.

Ergo a 23. Maii horâ tertiâ pomeridianâ ad septimam Junii eâdem horâ latuit macula, per integros scilicet quindecim dies: ab eo tempore ad 19 discum pertransivit, per duodecim nempe dies."

Altera observatio $Ill^{mi\cdot}$ Cassini huic omninò congrua exstat in primo Eruditorum Diario anni 1677., illic exhibet Cassinus figuram maculæ quæ 30. Octobris 1676. observari cæpit, evanuit Novembris 3^{a}. Iterum conspicua facta est quindecim post dies, nempe $18^{a\cdot}$ Novembris; evanuit verò post duodecim dies, nempe horâ quartâ diei $30^{æ\cdot}$ Novembris, observationibus magnâ curâ institutis ad singulas ferè horas, postea verò $15^{a\cdot}$ Decembris horâ meridianâ cum semisse, telescopio 35. pedum in limbo orientali Solis visa est, ut instar lineæ obscuræ nec aliis telescopiis observari poterat, sequentibus verò diebus facile videri potuit; hinc per quindecim dies maculas latere, per duodecim dies Solis discum transcurrere liquet.

ex aquâ, materia omnis gravior, quo tempore massa fluida erat, centrum petebat. Unde cùm Terra communis suprema quasi duplo gravior sit quàm aqua, et paulò inferiùs in fodinis quasi triplo vel quadruplo aut etiam quintuplo gravior reperiatur: verisimile est quòd copia materiæ totius in Terrâ quasi quintuplo vel sextuplo major sit quàm si tota ex aquâ constaret; præsertim cùm Terram quasi quadruplo densiorem esse quàm Jovem jam ante ostensum sit. Quare si Jupiter paulo densior sit quàm aqua, hic (q) spatio dierum triginta, quibus longitudinem 459 semi-diametrorum suarum describit, (r) amitteret in medio ejusdem densitatis cum aëre nostro motûs sui partem ferè decimam. Verùm cùm resistentia mediorum minuatur in ratione ponderis ac densitatis, sic ut aqua, quæ partibus $13\frac{2}{3}$ levior est quàm argentum vivum, minus resistat in eâdem ratione; et aër, qui partibus 860 levior est quàm aqua, minus resistat in eâdem ratione: si ascendatur in cœlos ubi pondus medii, in quo planetæ moventur, diminuitur in immensum, resistentia prope cessabit. Ostendimus utique in scholio ad Prop. XXII. Lib. II. quod si ascenderetur ad altitudinem milliarium ducentorum supra Terram, (s) aër ibi rarior foret quàm ad superficiem Terræ in ratione 30 ad

Ex quibus sequitur, æqualitatem temporum occultationis et apparentiæ macularum, observationibus non constare; quinimò rectius inæqualitatem eorum temporum exinde deduci. Ut quâdam quantitate a Solis disco distare maculas deducatur, et quidem cùm differentia temporum eorum sit circiter dierum trium, in singulo quadrante erit horarum decem et octo, quo tempore decem gradus circa Solis centrum maculæ percurrunt; sed sinus versus decem graduum sunt 15. centesimæ radii; hinc tandem deducetur quod semi-diameter Solis sit ad semi-diametrum circuli quem describunt maculæ ut 85 ad 100 sive ut 17 ad 20, et maculæ quindecim circiter semi-diametris Terræ supra Solis superficiem emineant: Hinc idem Wolfius eas esse nubes in Solis atmosphærâ elatas, conjectatur; quæ quidem fuerat Kepleri sententia.

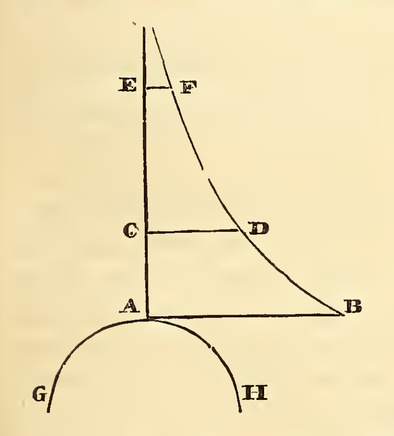
(q) * *Spatio dierum triginta.* Si arcus quem Jupiter motu diurno medio circà Solem describit, multiplicetur per 30 et factum dividatur per semi-diametrum apparentem Jovis in mediocri ejus distantiâ a Terrâ, quotus erit numerus semi-diametrorum Jovis quas intervallo 30 dierum describit. Potest etiam idem inveniri dicendo: ut tempus periodicum Jovis ad 360 gradus, ità 30 dies ad arcum hoc tempore descriptum, hic arcus dividatur per semi-diametrum apparentem Jovis, et quotus erit numerus semi-diametrorum quas Jupiter 30 diebus describit.

(r) * *Amitteret in medio ejusdem densitatis.* (per schol. Prop. XL. Lib. II. circa finem.) Si diameter Jovis dicatur D, V velocitas ejus sub initio motûs, et T tempus quo velocitate V in vacuo describet spatium S quod sit ad spatium $\frac{8}{3}$ D ut densitas Jovis ad densitatem aëris nostri, hoc est, ut 860 ad 1 circiter Jupiter in aëre nostro projectus cum velocitate V tempore quovis alio t amittet velocitatis suæ partem $\frac{tV}{T+t}$. Quoniam igitur Jupiter intervallo 30 dier. longitudine $459\frac{D}{2}$ describit, et densitas Jovis est ad densitatem aëris nostri ut 860 ad 1 circiter, erit $1 : 860 = \frac{8}{3}D : S = \frac{6880}{3}D$, et $459\frac{D}{2}$: 30 dies, $= \frac{6880}{3}D : T = \frac{137600}{459}$. Unde si ponatur t = 30 dieb. erit $T + t = \frac{151370}{459}$, et $\frac{t}{T+t} = \frac{1377}{15137} = 0{,}09096 = \frac{1}{10}$ ferè. Cùm autem Jupiter supponatur paulò densior quàm aqua, minorem adhuc velocitatis suæ partem amitteret in aëre nostro.

(s) 70. * *Aër ibi rarior foret.* Si gravitas particularum aëris in omnibus a Terrâ distantiis eadem sit, sintque distantiæ in progressione arithmeticâ, demonstratum est (in schol. Prop. XXII. Lib. II.) densitates fore in progressione geometricâ. Hinc patet in variis a Terrâ distantiis per logarithmicam exhiberi posse varias

0,0000000000003998, seu 75000000000000 ad 1 circiter. Et (t) hinc stella Jovis in medio ejusdem densitatis cum aëre illo superiore revolvendo, tempore annorum 1000000, ex resistentiâ medii non amitteret motûs sui partem decimam centesimam millesimam. In spatiis utique Terræ proximis, nihil invenitur quod resistentiam creet præter aërem, exhalationes et vapores. His ex vitro cavo cylindrico diligentissimè exhaustis gravia intra vitrum liberrimè et sine omni resistentiâ sensibili cadunt; ipsum aurum et pluma tenuissima simul demissa æquali cum velocitate cadunt, et casu suo describendo altitudinem pedum quatuor, sex vel octo, simul incidunt in fundum, ut experientiâ compertum est. Et propterea si in cœlos ascendatur aëre et exhalationibus vacuos, planetæ et cometæ sine omni resistentiâ sensibili per spatia illa diutissimè movebuntur.

aëris densitates. Sit enim F D B logarithmica, sumptis abscissis A C, A E, in progressione arithmeticâ, ordinatæ A B, C D, E F densitates



aëris in locis A, C, E, repræsentabunt (33. Lib. II.). Quarè datis altitudinibus A C, A E, et ratione $\frac{AB}{CD}$, innotescet ratio $\frac{AB}{EF}$. Nam (ex naturâ logarithmicæ, per Cor. 2. Theor. II. de logarithmicâ) A C : A E = L. $\frac{AB}{CD}$: L. $\frac{AB}{EF}$, ideóque $\frac{AE}{AC}$ L. $\frac{AB}{CD}$ = L. $\frac{AB}{EF}$.

Jam quia altitudines Mercurii in barometro sunt ut pressiones atmosphæræ in diversis ab horizonte distantiis (Prop. XX. Lib. II.). Si aëris densitas compressioni ponatur proportionalis, datis altitudinibus Mercurii in barometro in locis A, C, datâque altitudine A E, dabitur altitudo Mercurii in barometro in loco E, ideóque nota erit densitas aëris in E. Ut autem hæc omnia ad præsentem casum transferamus, sit G A H pars superficiei terrestris, altitudo Mercurii in barometro in A = 30 poll. distantia A C = 2280 ped. Anglicis et altitudo Mercurii in barometro in C = 28 poll. quemadmodum Newtonus experimento cognitum supponit. Sit altitudo A E = 200 milliaribus hoc est = 1056000 ped. Anglicis, si milliare sit mensura ped. 5280, erit $\frac{AE}{AC}$ L. $\frac{AB}{CD} = \frac{1056000}{2280}$ L. $\frac{30}{28}$ = 13.8750613 circiter cui logarithmo in tabulis respondet numerus 75000000000000 erit ergò densitas aëris in A, hoc est, in superficie Terræ ad ejusdem densitatem in distantiâ 200 milliarium seu ped. 1056000 ut 75000000000000 ad 1, circiter.

(t) * *Hinc stella Jovis.* Densitas Jovis est ad densitatem aëris illius superioris ut 860 × 75000000000000 ad 1. Hinc 1 : 860 × 75000000000000 = $\frac{8}{3}$ D : S = 172000000000000000 : D, et 459 $\frac{D}{2}$ est ad 172000000000000000, ut anni pars duodecima seu $\frac{1}{12}$ ad T = $\frac{8600000000000000}{1367}$, annis = 6300000000000 ferè. Ponatur t = 1000000 annis, et erit pars motûs amissa tempore t = $\frac{t}{T+t} = \frac{1000000}{6300000000000+1000000} = \frac{1}{6300000+1} = \frac{1}{6300000}$ ferè.

HYPOTHESIS I.

Centrum systematis mundani quiescere.

Hoc ab omnibus concessum est, dum aliqui Terram, alii Solem in centro systematis quiescere contendant. Videamus quid inde sequatur.

PROPOSITIO XI. THEOREMA XI.

Commune centrum gravitatis Terræ, Solis et planetarum omnium quiescere.

Nam centrum illud (per legum Corol. 4.) vel quiescet vel progredietur uniformiter in directum. Sed centro illo semper progrediente, centrum mundi quoque movebitur contra hypothesin.

PROPOSITIO XII. THEOREMA XII.

Solem motu perpetuo agitari, sed nunquam longè recedere a communi gravitatis centro planetarum omnium.

Nam cùm (per Cor. 2. Prop. VIII.) materia in Sole sit ad materiam in Jove ut 1067 ad 1, et distantia Jovis a Sole fit ad semi-diametrum Solis in ratione paulò majore (†); incidet commune centrum gravitatis Jovis et Solis in punctum (u) paulo supra superficiem Solis. Eodem argumento cùm materia in Sole sit ad materiam in Saturno ut 3021 ad 1, et distantia Saturni a Sole sit ad semi-diametrum Solis in ratione paulò minore: incidet commune centrum gravitatis Saturni et Solis in punctum (x) paulò infra superficiem Solis. (y) Et ejusdem calculi vestigiis insistendo, si Terra et planetæ omnes ex unâ Solis parte consisterent, commune omnium centrum gravitatis vix integrâ Solis diametro a centro Solis distaret.

(†) * *Et distantia Jovis a Sole sit ad semi-diametrum Solis in ratione paulo majore,* * cum semi-diameter Solis e Tellure visa sit 16′ 4″ et distantia Terræ a Sole sit ad distantiam Jovis a Sole ut 10 ad 52 circiter, sintque anguli sub quo idem objectum videtur e diversis distantiis, reciprocè ut illæ distantiæ fere, erit 52 : 10 = 16′ 4″ : ad semi-diametrum Solis e Jove visam, quæ itaque erit 3′ 5″ circiter: fingatur ergo triangulum rectangulum cujus vertex sit in Jove et basis sit Solis semi-diameter, angulus verticis erit 3′ 5″; ideóque (per Tabulas Tangentium,) basis ejus continebitur in ejus altitudine 1115 vicibus; hinc distantia Jovis a Sole est ad semi-diametrum Solis, ut 1115 ad 1, ideóque in ratione paulò majore quàm ratio 1067 ad 1, hoc est, quàm ratio materiæ in Sole ad materiam in Jove.

(u) * *Paulò suprà superficiem Solis* (60. Lib. I.).

(x) * *Paulò infrà superficiem Solis* (ibid.).

(y) * *Et ejusdem calculi vestigiis* (61. Lib. I.).

([z]) Aliis in casibus distantia centrorum semper minor est. Et propterea cùm centrum illud gravitatis perpetuò quiescit, Sol pro vario planetarum situ in omnes partes movebitur, sed a centro illo nunquam longè recedet.

Corol. Hinc commune gravitatis centrum Terræ, Solis et planetarum omnium pro centro mundi habendum est. Nam cùm Terra, Sol et planetæ omnes gravitent in se mutuò, et propterea, pro vi gravitatis suæ, secundum leges motûs perpetuò agitentur: perspicuum est quod horum centra mobilia pro mundi centro quiescente haberi nequeunt. Si corpus illud in centro locandum esset, in quod corpora omnia maximè gravitant (uti vulgi est opinio) privilegium istud concedendum esset Soli. Cùm autem Sol moveatur, eligendum erit punctum quiescens, a quo centrum Solis quam minimè discedit, et a quo idem adhuc minus discederet, si modò Sol densior esset et major, ut minus moveretur.

PROPOSITIO XIII. THEOREMA XIII.

Planetæ moventur in ellipsibus umbilicum habentibus in centro Solis, et radiis ad centrum illud ductis areas describunt temporibus proportionales.

Disputavimus supra de his motibus ex phænomenis. Jam cognitis motuum principiis, ex his colligimus motus cœlestes a priori. Quoniam pondera planetarum in Solem sunt reciprocè ut quadrata distantiarum a centro Solis; si Sol quiesceret et planetæ reliqui non agerent in se mutuò, forent orbes eorum elliptici, Solem in umbilico communi habentes, et areæ describerentur temporibus proportionales (per Prop. I. et XI. et Corol. 1. Prop. XIII. Lib. I.) actiones autem planetarum in se mutuo perexiguæ sunt (ut possint contemni) et motus planetarum in ellipsibus circa Solem mobilem minùs perturbant (per Prop. LXVI. Lib. I.) quàm si motus isti circa Solem quiescentem peragerentur.

Actio quidem Jovis in Saturnum non est omnino contemnenda. Nam gravitas in Jovem est ad gravitatem in Solem (paribus distantiis) ([a]) ut 1

([z]) * *Aliis in casibus.* Si nempè ad diversas Solis partes planetæ consistant, centrum gravitatis modò versùs unam partem, modò versùs alteram incidit; hinc centrum gravitatis quasi medio loco iis casibus poni debet, minor itaque fit centrorum distantia.

71. Quoniam Sol pro diverso planetarum situ diversimodè agitatur, motu quodam libratorio lentè semper errabit, nunquam tamen integrâ sui diametro a centro quiescente systematis totius recedet. Quia verò Solis et planetarum ponderibus (per Cor. 1. Prop. VIII.) inventis, datoque situ omnium ad invicem, datur commune gravitatis centrum (61. Lib. I.) patet quoque dato communi gravitatis centro haberi locum Solis ad tempus propositum.

([a]) * *Ut* 1 *ad* 1067 (Cor. 2. Prop. VIII.).

ad 1067; ideóque in conjunctione Jovis et Saturni, quoniam distantia Saturni a Jove est ad distantiam Saturni a Sole ferè ut 4 ad 9, (b) erit gravitas Saturni in Jovem ad gravitatem Saturni in Solem ut 81 ad 16×1067 seu 1 ad 211 circiter. Et hinc oritur perturbatio orbis Saturni in singulis planetæ hujus cum Jove conjunctionibus adeo sensibilis ut ad eandem astronomi hæreant. (c) Pro vario situ planetæ in his conjunctionibus, eccentricitas ejus nunc augetur, nunc diminuitur, aphelium nunc promovetur, nunc fortè retrahitur, et medius motus per vices acceleratur et retardatur. (d) Error tamen omnis in motu ejus circùm Solem a tantâ vi oriundus (præterquam in motu medio) evitari ferè potest constituendo umbilicum inferiorem orbis ejus in communi centro gravitatis Jovis et Solis (per Prop. LXVII. Lib. I.) et propterea ubi maximus est, vix superat minuta duo prima. Et error maximus in motu medio vix superat minuta duo prima annuatim. (e) In conjunctione autem Jovis et Saturni gravitates acceleratrices Solis in Saturnum, Jovis in Saturnum et Jovis in Solem sunt fere ut 16, 81 et $\frac{16 \times 81 \times 3021}{25}$ seu 156609, ideóque differentia gravitatum Solis in Saturnum et Jovis in Saturnum est ad gravitatem Jovis in Solem ut 65 ad 156609 seu 1 ad 2409. Huic autem differentiæ proportionalis est maxima Saturni efficacia ad perturbandum motum Jovis, et propterea perturbatio orbis Jovialis longè minor est quàm ea Saturnii. Reliquorum orbium perturbationes sunt adhuc longè minores (f) præterquam quod orbis Terræ sensibiliter perturbatur a Lunâ. (g) Commune centrum gravitatis Terræ et Lunæ, ellipsin circum Solem in umbilico positum percurrit, et radio ad Solem ducto areas in eâdem temporibus proportionales describit, Terra verò circum hoc centrum commune motu menstruo revolvitur.

(b) * *Erit gravitas Saturni in Jovem* (Prop. VIII.).

(c) * *Pro vario situ planetæ.* Saturnum his perturbationibus obnoxium esse patet (per Cor. 6. 7. 8. 9. Prop. LXVI. Lib. I.).

(d) * *Error tamen omnis.* Si ad evitandum omnem ferè errorem, orbis Saturni umbilicus (per Prop. LXVII. Lib. I.) locetur in communi centro gravitatis Jovis et Solis, theoria Saturni juxtà hanc hypothesim constituta satis accuratè congruit cum phænomenis, ità ut error qui ex hâc hypothesi oritur, ubi maximus est, vix superet minuta duo prima, et error maximus in motu medio vix minutis duobus primis annuatim major observetur. Hinc non parum confirmantur ea quæ de mutuâ planetarum perturbatione hactenus dicta sunt.

(e) * *In conjunctione autem Jovis.* Quoniam in conjunctione Jovis et Saturni, distantia Saturni a Sole, Saturni a Jove, et Jovis a Sole sunt inter se ut 9, 4 et 5, circiter, gravitates acceleratrices Solis in Saturnum, Jovis in Saturnum et Jovis in Solem erunt ut $\frac{1}{81}$, $\frac{1}{16}$ et $\frac{3021}{25}$ (per Cor. 1. Prop. VIII.) hoc est, ut 16, 81 et $\frac{16 \times 81 \times 3021}{25}$.

(f) * *Præterquam quod orbis Terræ.* Orbem Terræ sensibiliter perturbari a Lunâ ostendetur deinceps ubi vis Lunæ definietur.

(g) * *Commune centrum gravitatis Terræ et Lunæ.* (Prop. LXV. Lib. I.)

PROPOSITIO XIV. THEOREMA XIV.

Orbium aphelia et nodi quiescunt.

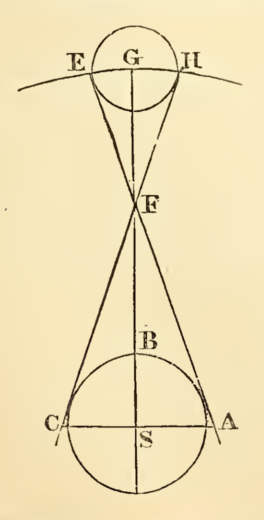
Aphelia quiescunt, per Prop. XI. Lib. I. ut et orbium plana, per ejusdem Libri Prop. I. et quiescentibus planis quiescunt nodi. Attamen a planetarum revolventium ([h]) et cometarum actionibus in se invicem orientur inæqualitates aliquæ, sed quæ ob parvitatem hic contemni possunt.

Corol. 1. Quiescunt etiam stellæ fixæ, propterea quod datas ad aphelia modosque positiones servant.

Corol. 2. Ideóque ([i]) cùm nulla sit earum parallaxis sensibilis ex Terræ motu annuo oriunda, vires earum ob immensam corporum distantiam

([h]) * *Et cometarum actionibus.* Eodem prorsus modo quo planetæ in se invicem agunt; patet quoque cometas in alios planetas agere similesque effectus producere, sed cùm observationes astronomicæ ostendant apheliorum nodorumque motum esse tardissimum, ob parvitatem contemni possunt inæqualitates quæ ex planetarum et cometarum actionibus in se invicem oriuntur.

([i]) * 72. *Cùm nulla sit earum parallaxis.* In hypothesi Terræ motæ, quiescentibus Sole et stellis, Tellus integram revolutionem absolvit



spatio 23. hor. 56′. 4″. circiter, et circa Solem revolvitur unius anni intervallo; circulumque describit qui ecliptica vel orbis annuus appellatur Referat S Solem, sit F stella fixa in eclipticæ plano ad distantiam quamlibet constituta; sit A B C D orbis annuus, ponaturque Tellus primùm in loco A, deindè post sex menses perveniat ad locum C in quo distet a loco A totâ diametro orbis annui; hoc est, 20000 Terræ diametris circiter, ità ut anguli F S A, F S C sint recti, stella F ex Tellure A visa respondebit puncto E, quod ad distantiam infinitam a Terrâ removeri supponitur. Deindè eadem stella ob motum Terræ ab A versùs B, progredi videbitur ab E versùs G, donec Tellure perveniente ad C stella videatur in H, distans scilicet e loco in quo ante sex menses versabatur, toto arcu E H, cujus mensura est angulus E F H vel A F C. Hujus anguli semissis A F S, est parallaxis orbis annui ex Terræ motu annuo oriunda. Dato autem angulo A F S, facilè invenitur distantia stellæ fixæ a Terrâ A F, si fiat, ut sinus anguli A F S, ad sinum totum, ità A S semi-diameter orbis annui, quæ est 10000 diametrorum Terræ circiter ad A F. Jam verò patet ex Telluris annuo motu oriri debere translationem fixarum inter se parallaxi duplicatæ circiter æqualem. At stellæ majores et propiores respectu remotiorum quæ telescopiorum ope duntaxat conspici possunt, moveri non observantur. Nulla est itaque fixarum parallaxis sensibilis ex Terræ motu annuo oriunda, ideóque immensa est fixarum a Tellure distantia. Sivè autem Terra moveatur, sivè quiescat, stellas fixas immensis intervallis a Terrâ distare certissimum est, nam parallaxim annuam minuto primo longe minorem esse consentiunt omnes astronomi. Fingamus verò annuam fixæ alicujus proximioris parallaxim esse uniùs minuti primi, a Tellure distabit stella illa 3437 semi-diametris orbitæ quam describit Terra, siquidem sinus unius minuti est ad radium ut 1 ad 3437, et si semi-diameter orbitæ sit 20000 semi-diametrorum Terræ, ad minimum 68740000 Terræ ipsius semi-diametris distabit fixa a Tellure.

73. Christianus Hugenius in Cosmotheoriæ Lib.

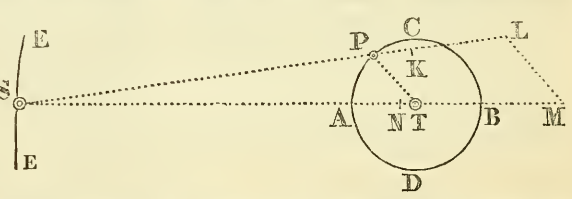
nullos edent sensibiles effectus in regione systematis nostri. Quinimo fixæ in omnes cœli partes æqualiter dispersæ contrariis attractionibus vires mutuas destruunt, per Prop. LXX. Lib. I.

Scholium.

Cùm planetæ Soli propiores (nempe Mercurius, Venus, Terra, et Mars) ob corporum parvitatem parum agant in se invicem; horum aphelia et nodi quiescent, nisi quâtenus a viribus Jovis, Saturni et corporum superiorum turbentur. ([a]) Et inde colligi potest per theoriam gravitatis, quod

II. aliam excogitavit methodum quâ rationem distantiæ fixarum ad distantiam Solis conjectantando investigaret. Supponit itaque Sirium, quæ stella est inter alias fulgentissima, Soli circiter æqualem esse. Deindè tentavit quâ ratione Solis diametrum ità imminuere posset ut non major aut splendidior Sirio appareret. Quod ut assequeretur, tubi vacui duodecim circiter pedes longi aperturam alteram occlusit lamellâ tenuissimâ in cujus medio tam exiguum erat foramen ut lineæ partem duodecimam non excederet; oculoque alteri aperturæ admoto, ea videretur Solis particula cujus diameter erat ad diametrum totius ut 1 ad 182. Cùm verò particula illa Sirio splendidior adhuc appareret, foramine globulum vitreum ejusdem cum foramine diametri objecit, talisque foci globulum selegit ut lux Solis ad oculum transmissa non major aut splendidior videretur eâ quam a Sirio emissam nudis oculis intuemur. Quo facto, hujus particulæ Solis diametrum invenit partem $\frac{1}{27664}$ diametri totius. Quarè Sol instar Sirii appareret, si conspicua foret pars diametri totius solaris tantùm $\frac{1}{27664}$, distantia autem Solis a Terrâ, in quâ tantillus videretur, foret ad distantiam in quâ ejus diametrum apparentem intuemur ut 27664 ad 1, divisâque apparente Solis diametro mediocri per 27664, foret diameter Solis 4‴ circiter. Hinc Sirii quoque distantia a Terrâ est ad distantiam Solis ab eâdem ut 27664 ad 1 et diameter apparens Sirii 4‴. Jam distantia Solis a Terrâ, si parallaxis Solis ponatur 10″ 30‴ est ferè 20000 semid. terrestrium, erit ergo distantia Sirii 553280000 semid. terrestr. Si verò distantiam mediam Saturni a Terrâ constituamus 190800 semid. terrestr. prodit distantia inter Saturnum et Sirium 553089200 semid. terrestr.

([a]) 74. * *Et indè colligi potest.* Designet S planetam aliquem superiorem, puta Jovem, cujus orbita E S E; sit T Sol, P planeta aliquis inferior; ponaturque corporum S, P, aliorumve plurium systema revolvi circà corpus T manentibus orbium E S E et P A B formâ, proportionibus et inclinatione ad invicem, mutentur verò utcumque magnitudines, et per Theoriam gravitatis colligitur (Cor. 15. et 16. Prop. LXVI. et not. in eadem Corollaria) errores an-



gulares corporis P in quâvis revolutione genitos, ideóque et motus aphelii in quâlibet revolutione corporis P esse ut quadratum temporis periodici quàm proximè. Si itaque numerentur illi errores, in variis planetis P durante eodem determinato tempore, per centum v. gr. annos, ut hic assumit Newtonus, errores integri eo tempore descripti erunt ut errores singulâ revolutione commissi et ut numerus revolutionum sæculo integro peractarum, ille numerus revolutionum est inversè ut tempus periodicum, et errores (qui sunt, ut dictum est, directè ut quadratum temporis periodici) ergo errores apheliorum durantibus centum annis erunt in simplici temporum periodicorum ratione. Sed tempora periodica planetarum P sunt in ratione sesquiplicatâ distantiarum a centro T (per Phæn. 4.). Sunt ergò errores planetarum inferiorum in hâc ratione sesquiplicatâ distantiarum a centro Solis. Quare si ponatur eum esse aphelii Martis progressum ut in annis centum conficiat 33′ 20″ in consequentia respectu fixarum, invenietur motus aphelii aliorum planetarum qualis a Newtono definitur, dicendo: ut radix quadrata cubi distantiæ Martis ad radicem quadratam cubi distantiæ Terræ a Sole, ita 33′ 20″ ad motum aphelii Terræ annis centum.

horum aphelia moventur aliquantulum in consequentia respectu fixarum, idque in proportione sesquiplicatâ distantiarum horum planetarum a Sole.

Quamvis autem ex ipsâ gravitatis thêoriâ colligatur planetarum inferiorum aphelia nunc promoveri, nunc retrahi, medios tamen apheliorum motus notabili aliquo tempore in consequentia fieri, patet ratiocinio simili illi quod de Lunâ factum est in notâ ([c]) pag. 18. hujusce, unde facile constabit reverâ medium motum resultantem post centum annos esse ut ipsa tempora periodica, ideóque in ratione sesquiplicatâ distantiarum a Sole, secundùm ea quæ dicuntur in Cor. 16. Prop. LXVI. Lib. 1., &c. De præsenti scholio hæc dicta sint. Sed prætermittenda non sunt verba doctissimi viri Joannis Bernoullii cujus authoritatem maximè veneramur. Sic ferè habet clariss. autor in Dissertatione de Systemate Cartesiano quæ anno 1730. ab Academiâ Regiâ Scientiarum præmio condecorata fuit, Paragrapho XLI. "(Newtonus supponit motum aphelii Martis in consequentia eum esse ut centum annorum spatio 33′ 20″. conficiat. Hinc colligit per theoriam gravitatis quod aliorum planetarum inferiorum aphelia moventur in consequentia respectu fixarum, idque in proportione sesquiplicatâ distantiarum horum planetarum a Sole. Nullo fundamento merâque apparentiâ nixus videtur Newtonus in constituendâ hâc ratione sesquiplicatâ. Neque enim intelligo, neque ut arbitror, plures alii me ipso perspicaciores intelligunt, quare mutua planetarum gravitatio, etiamsi concederetur, hanc proportionem postulet. Et certè hæc eadem gravitatio planè irregularem effectum et suæ regulæ contrarium producit respectu aphelii Saturni, cùm Newtonus ipse statuat in conjunctione Jovis et Saturni aphelium illud nunc promoveri, nunc retrahi. Numquid de singulis planetis inferioribus idem quoque statuendum videretur. Nam si talis admittenda foret attractio, Tellus v. gr. ubi in aphelio versatur, Jovemque respectu zodiaci præcedit, retraheretur, et contra promoveretur ubi Jupiter Tellurem præcederet. Unde hæc gravitatio contrarios omninò effectus ante et post conjunctionem Telluris et Jovis produceret. Sed nil tale observatur, idque ex suâ hypothesi Newtonus minime colligit, sicut facere deberet.")

* Ex prædictis autem facile responderi posse videtur viri doctissimi quæsitis.

1°. Enim concessâ planetarum gravitatione, motum apheliorum planetarum inferiorum secundùm proportionem sesquiplicatam distantiarum fieri debere, mathematicè sequitur ex Corol. 16. Prop. LXVI. Lib. I. ut supra ostensum est, illud autem Corollarium 16. tam ex sectione notâ Lib. I. quàm ex ipsâ Prop. LXVI. legitimè deduci, ex ipso Newtono notisque illis locis adjectis probatum credimus.

2°. Quod queritur V. D. eamdem gravitationem contrarium effectum regulæ suæ producere respectu aphelii Saturni, id vitio vertendum non est systemati Newtoniano, quin e contra egregia procul dubio est ejus confirmatio. Quippe eo ipso quod Saturnus cæteris planetis sit exterior, ex systemate Newtoniano fluit vim Solis in Saturnum agentem augeri per vim planetarum interiorum in conjunctione, unde aphelium ejus debet regredi per Prop. XLV. (quod in Saturno observari, ex ipso Cassino didicimus, ut superius notâ ([a]) pag. 17. retulimus) dum e contra aphelia planetarum interiorum per vim exteriorum in conjunctione positorum progredi debeant.

3°. Queritur denique quod aphelia planetarum inferiorum nunc retrahi, nunc promoveri debeant, quod tamen non observatur; scilicet Newtonus statuit quidem aphelia planetarum inferiorum in syzygiis promoveri, in quadraturis retardari, plus promoveri verò quàm retardari, unde in totum progredi videntur; aphelii autem ea veluti libratio observabilis non est; etenim qui praxi astronomicæ operam dant, facilè sentiunt loca apheliorum ita non determinari, ut nutatio aphelii in singulis orbitæ partibus observatione obtineatur; imo post plures duntaxat revolutiones satis tutò aphelii progressum inveniri, ipsæ methodi ad eas observationes adhibitæ docent; hinc, ad observationes provocare non licet ut illam nutationem vel veram vel fictitiam esse probetur, siquidem observationes hâc de re nihil docere nos possunt.

Addit verò, *Tellus ubi in aphelio versatur Jovemque respectu zodiaci præcedit, retraheretur, et contra promoveretur ubi Jupiter Tellurem præcederet, unde gravitas contrarios effectus produceret ante et post conjunctionem Telluris et Jovis;* si in hoc exemplo agatur de motu Telluris in longum, hæc revera fluunt ex gravitationis systemate, et reverâ in Lunâ inde producitur ea inæqualitas quæ *variatio* dicitur, astronomis notissima; similem inæqualitatem in Terrâ non quidem observarunt astronomi quia minima esse debet per ipsam gravitationis naturam, et cùm sese utrinque compenset, nullum sui relinquit vestigium; quod si in hoc exemplo de motu aphelii Terræ agatur ut ex sermonis serie quis forte suspicaretur, res fieri non debet ut hic indicatur, nam in tota syzygia aphelium Telluris progredi debere, et in quadraturâ duntaxat regredi, liquet per Prop. XLV. et XLVI. Primi Libri.

Quas quidem adnotationes eâ mente non adjungimus ut quidquam derogetur summæ viri illustrissimi apud omnes φιλομαθηματίκους authoritati. Sed cùm Newtonus brevitate suâ occasionem dederit V. Ill. dicendi, eum nullo fundamento merâque apparentiâ proportionem motûs apheliorum statuisse, hâc notâ ipsi inustâ eum purgare et veritas et Commentatoris officium postulabant.

Ut si aphelium Martis in annis centum conficiat 33′. 20″ in consequentia respectu fixarum, aphelia Terræ, Veneris, et Mercurii in annis centum conficient 17′. 40″, 10′, 53″, et 4′. 16″ respectivè. Et hi motus, ob parvitatem, negliguntur in hâc Propositione.

PROPOSITIO XV. PROBLEMA I.

Invenire orbium principales diametros.

Capiendæ sunt hæ in ratione subsesquiplicatâ temporum periodicorum, per Prop. XV. Lib. I. ([b]) Deinde sigillatim augendæ in ratione summæ massarum Solis et planetæ cujusque revolventis ad primam duarum mediè proportionalium inter summam illam et Solem, per Prop. LX. Lib. I.

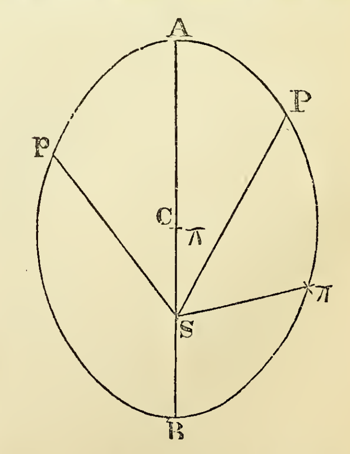
PROPOSITIO XVI. PROBLEMA II.

Invenire orbium eccentricitates et aphelia.

([c]) Problema confit per Prop. XVIII. Lib. I.

([b]) *Deindè sigillatim.* Jam capti sunt orbium axes majores in ratione subsesquiplicatâ temporum periodicorum, nempè nullâ habitâ ratione massarum, planetæ spectati sunt tanquam totidem puncta in ellipsibus circà immotum in umbilico Solis centrum revolventia. Quoniam verò fit ut propter Solis et planetæ actiones mutuas, planeta ellipsim describat cujus focus est commune gravitatis centrum planetæ et Solis, major axis ellipseos quàm planeta describit circà Solem qui ipse simul revolvitur circà commune centrum gravitatis, est ad axem majorem ellipseos quam idem planeta circà Solem quiescentem eodem tempore periodico describere posset, in ratione summæ massarum Solis et planetæ ad primam duarum medie proportionalium inter summam illam et Solem (Prop. LX. Lib. I.) ideóque ut axis major orbitæ corrigatur, augendus est in dictâ ratione. Datur autem ratio inter massas Solis et planetarum, ac proindè datur ratio in quâ orbitarum axes majores sunt augendi. Vide de his not. 64. hujus Libri.

([c]) 75. * *Problema confit.* Sit S Sol, sintque planetæ loca tria P, p, ϖ e Sole visa, et data sit recta B A axis major ellipseos, describatur (per Prop. XVIII. Lib. I.) ellipsis cujus umbilicus est S et axis major A B, quod fit, si ex axe B A demantur longitudines S P, S p, S ϖ et cùm residuis arcus ex punctis P, p, ϖ describantur, intersectio horum trium arcuum erit alter focus ellipseos, quo invento orbita planetæ determinabitur, simulque dabitur distantia Solis a centro



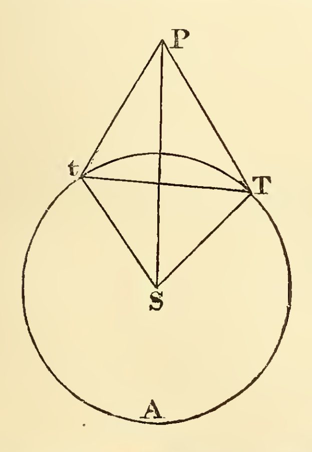
ellipseos, hoc est, excentricitas, notumque erit ellipseos punctum a Sole remotissimum, id est, aphelium.

PROPOSITIO XVII. THEOREMA XV.

Planetarum motus diurnos uniformes esse, et librationem Lunæ ex ipsius motu diurno oriri.

Patet per motûs legem 1. et Corol. 22. Prop. LXVI. Lib. I. Jupiter utique respectu fixarum revolvitur horis 9. 56′, Mars horis 24. 39′. Venus horis 23. circiter, Terra horis 23. 56′, Sol diebus $25\frac{1}{2}$ et Luna diebus 27. 7. hor. 43′. Hæc ita se habere, ex phænomenis manifestum est. (d) Maculæ in corpore Solis ad eundem situm in disco Solis redeunt

Quia verò problema illud supponit data esse tria planetæ loca centrica, hoc est, ex Sole visa, datasque eorum a Sole distantias, hic adjungemus methodum quâ clariss. Halleius ex dato tempore periodico, planetæ locum centricum ejusque a Sole distantias invenire docuit. Referat T t A orbitam Telluris, S Solem, sitque P



planeta seu potiùs locus planetæ ad eclipticam reductus, sivè punctum ubi perpendicularis ex planetâ in planam eclipticæ demissâ incidit. Ponatur Tellus in T, observeturque planetæ longitudo geocentrica, ex datâ theoriâ Telluris, dabitur longitudo apparens Solis, ideóque dabitur angulus P T S. Post integram planetæ revolutionem, planeta rursùs erit in P, quo tempore Tellus sit in t, ex eo puncto iterum observetur planeta, inveniaturque angulus P t S elongatio planetæ a Sole. Ex datis observationum momentis, dantur loca Telluris in ecliptica e Sole visa ejusque a Sole distantiæ, ac proindè in triangulo t S T, dantur latera t S, S T et angulus t S T, quarè invenientur anguli S t T, S T t et latus t T. Si itaque ab angulis datis P T S et P t S, auferantur anguli noti t T S, T t S, dabuntur anguli P T t et P t T; undè in triangulo P t T ex datis angulis unà cum latere T t, innotescet P T. Deindè in triangulo P T S, dantur latera P T, T S cum angulo intercepto P T S, ideóque dabitur S P, quæ distantia planetæ a Sole curtata appellatur, et notus fiet angulus T S P, ex quo dabitur locus planetæ heliocentricus. Est autem (ex trigon.) tangens latitudinis geocentricæ planetæ ad tangentem latitudinis heliocentricæ ut distantia planetæ a Sole curtata ad distantiam ejusdem a Tellure curtatam, sed per observationem, nota est latitudo geocentrica planetæ, quarè innotescet planetæ latitudo heliocentrica ex quâ simul et distantiâ a Sole curtatâ elicietur planetæ a Sole vera distantia, et simili modo vera distantia planetæ a Terrâ, unde tandem in triangulo cujus tria puncta sunt Sol, Terra et planeta, omnia latera sunt cognita. Hâc ratione obtineri possunt varia loca centrica planetæ, variæque a Sole distantiæ.

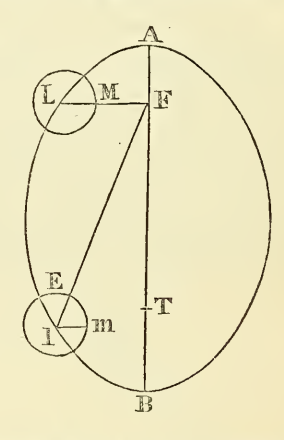
Cæterùm hæc fusè variisque adhibitis methodis, explicata reperiuntur in Introductione ad Veram Physicam Joannis Keill, in Astronomiâ Physicâ Davidis Gregorii, et potissimum in Elementis Astronomicis a clariss. Cassino nuper editis.

(d) * *Maculæ in corpore Solis.* Cùm revolutio macularum circà Solem sit admodum regularis, et maculæ ipsæ vel Soli supernatent vel a Sole parum distent (69) non maculæ circà Solem, sed Sol ipse $25\frac{1}{2}$ dierum spatio circiter, circà proprium axem motu vertiginis movetur. Jovem, Venerem et Martem circà axem suum gyrare ex maculis quoque in horumce planetarum corporibus per vices in conspectum redeuntibus colligitur. In Mercurio autem qui Soli proximus est, ob nimium luminis splendorem, et in Saturno ob maximam ejus a Terrâ distantiam maculæ nullæ hactenus deprehendi potuerunt quibus determinaretur eorum vertigo. Attamen nil obstat quominus ex analogiæ lege colligamus Mercurium quoque et Saturnum circà axem

diebus $27\frac{1}{2}$ circiter, respectu Terræ; ideóque respectu fixarum Sol revolvitur diebus $25\frac{1}{2}$ circiter. Quoniam verò Lunæ circa axem suum uniformiter revolventis dies menstruus est, hujus facies eadem ulteriorem umbilicum orbis ejus (e) semper respiciet quamproximè, et propterea pro

suum gyrare. Macularum solarium theoriam elegantissimè exposuerunt clariss. D. De Lisle in Libro cui titulus, Monumenta quæ ad Astronomiæ Physicæ et Geographiæ progressum conducunt, sæpeque laudatus D. Cassinus in Elementis Astronomicis. De maculis Veneris, ejusque circà axem revolutione, quædam inter astronomos est lis; a Cassino parte 23 horis et 20′ absolvi, ex macula sive potius splendore quodam in disco Veneris notabili annis 1666, 1667 compertum fuerat, non ita tamen tutò, ipse enim scribebat de motu Veneris, referente ipsius filio; *debiles adeò et confusas esse Veneris maculas ut earum terminos accuratè notare non liceat, unde utrum aliquis sit Veneris motus, per eas determinare frustra quæritur.* Anno verò 1726. D^nus^. Bianchinus maculas Veneris lunaribus similes diu est persecutus, earumque revolutionem 24 diebus 8. horis absolvi deduxit, circa axem admodum obliquum eclipticæ; in suam autem sententiam D^num^. Cassinum filium non adduxit, quia apparentiæ a D^no^. Bianchino observatæ per motum 23 horarum explicari poterant, dum parentis observationes, cum hypothesi revolutionis 24 dierum et 8. horarum consentire non possent; hinc quæstio in medio remansit non facilè solvenda, maculæ enim Veneris nonnisi cœlo purissimo observari possunt, et Lutetiæ nequidem cum maximis telescopiis videri potuisse narrat idem ill. Cassinus filius.

(e) 76. *Semper respiciet quamproximè.* Sit orbita Lunæ ellipsis A L B A, in cujus umbilico T locatur Terra, ductus ex umbilico radius vector areas ellipticas temporibus proportionales describit (Prop. I. Lib. I.); demissis autem a duobus quibusvis in ellipseos peripheriâ punctis ad alterum umbilicum F rectis L F, l F, angulus L F l erit quamproximè ad quatuor rectos sicut tempus quo arcus L l a Lunâ describitur ad integrum tempus periodicum Lunæ, si ellipsis sit parum excentrica. Jam referat L M meridiani lunaris, hoc est, circuli per axem conversionis Lunæ planum, quod productum transeat per F, idem planum in quocumque orbitæ ellipticæ puncto locetur Luna, productum quoque per F transibit. Quoniam enim Luna circà axem suum uniformiter revolvit eodem tempore quo circà Tellurem periodum suam absolvit, patet meridiani planum quod Lunâ existente in L situm L M obtinebat, dum Lunæ centrum aliud quodvis punctum l attigit, ad talem situm l E pervenisse, ut positâ l m parallelâ ad L M, angulus m l E sit ad quatuor rectos sicut tempus quo Luna arcum L l percurrit ad integrum tempus periodicum Lunæ, ideóque (Prop. XI. Lib. V. Elem.) angulus m l E est ad quatuor rectos sicut L F l ad quatuor rectos, ac proindè angulus m l E æqualis est angulo L F l, et ob rectas L F, l m parallelas jacebit l E in directum ipsi l F, hoc est, ubi Luna in l versatur,



ejusdem meridiani planum quod in priori situ L productum etiamnum transit per F. Quarè in quocumque lunaris orbitæ puncto centrum Lunæ occurrat, productum ejusdem meridiani planum transit per F.

His præmissis patet eandem ferè Lunæ faciem semper ad Terram converti easdemque ferè lunares maculas observatori terrestri apparere. Cùm enim productum ejusdem meridiani planum per alterum orbitæ lunaris focum F transeat, sitque lunaris orbita parum excentrica, hoc est, non multum distent umbilici F et T, eadem quamproximè Lunæ facies Terræ obvertitur. Si verò accuratè observatis lunaribus maculis, Lunæ facies ad Terram conversa diligentiùs consideretur, non eadem præcisè facies a nobis videbitur. Quoniam enim ejusdem meridiani planum L M non ad Terram T, sed ad alterum focum F dirigitur, patet Lunæ in L existentis hemisphærium e Tellure T visum, aliquantulum esse diversum ab illo quod videtur, dum Luna reperitur in l; nam pars hemisphærii lunaris versus plagam B quæ anteà occultabatur fit conspicua, et contrà pars hemisphærii alterius versùs R quæ anteà apparebat, oculis evanescit; motus hic Lunæ e Terrâ apparens, quo fit ut quædam maculæ in partem a Terrâ aversam se recipiant, dum aliæ ex parte aversâ in conspectum prodeunt, libratio Lunæ in longitudinem appellatur. Librationem hanc bis in quolibet

situ umbilici illius deviabit hinc inde a Terrâ. Hæc est libratio Lunæ in longitudinem: Nam (f) libratio in latitudinem orta est ex latitudine Lunæ et inclinatione axis ejus ad planum eclipticæ. Hanc librationis lunaris theoriam (g) D. N. Mercator in Astronomiâ Suâ, initio anni 1676 editâ,

mense periodico restitui manifestum est, quandò nempè Luna in apogæo A aut perigæo B versatur; in utroque enim situ ejusdem meridiani planum quod protensum in F incidit, transit etiam per T. Cæterum hæc libratio omnibus inæqualitatibus obnoxia est quibus afficitur motus in longitudinem. (Vid. Corollaria Prop. LXVI. Lib. I.)

(f) 77. * *Libratio in latitudinem.* Quoniam axis circà quem Luna revolvitur, non est ad lunarem orbitam normalis, sed ad illam inclinatus, manifestum est Lunæ polos per vices ad Terram vergere; ideóque Lunæ maculas nunc huic nunc illi polo vicinas e Terrâ spectari. Quia verò axis Lunæ est ferè ad planum eclipticæ normalis, patet hanc librationem pendere a situ Lunæ respectu nodorum orbitæ lunaris cum eclipticâ, seu ab ipsâ latitudine Lunæ. Ex illâ libratione oritur, ut dum Luna versùs austrum ab eclipticâ maximè recedit, hoc est, dum in limite australi versatur, Lunæ polus borealis et aliquæ ultrà polum lunaris globi partes a Sole illustrentur, intereadum polus australis et aliquæ citrà hunc polum regiones lunares in tenebris immerguntur; si ergò in hoc situ contingat Solem in eâdem plagâ cum limite australi versari, Luna a conjunctione cum Sole ad nodum ascendentem, hoc est, versùs boream progrediens, has regiones maculasque polo boreali vicinas oculis subducet, dum interim ab oppositâ plagâ aliæ cum polo australi regiones e tenebris emergunt; contrariumque accidet descendente Lunâ novâ a limite boreali; borealiores nempè Lunæ partes paulatim in lucem e tenebris prorepent, dum australiores evanescunt.

(g) 78. *D. N. Mercator.* Hic transcribemus N. Mercatoris verba. "Harum tamen variarum atquè implicitarum librationum (Lunæ scilicet) causas, hypothesi elegantissimâ explicavit nobis vir cl. Isaac. Newton cujus humanitati hoc et aliis nominibus plurimum debere me lubens profiteor. Hanc igitur hypothesim lectori gratificaturus, exponam verbis, ut potero, nam delineationes in plano vix sufficiunt huic negotio. Itaque reversus ad globum, cogita nunc illum repræsentare sphæram in quâ movetur Luna cujus centrum occupet Tellus, ipsum verò Lunæ globum credito polis et axe suo instructum circà quem revolvatur motu æquabili semel mense sydereo, dum a fixâ aliquâ digressa ad eandem revertitur, et æquator lunaris ad firmamentum continuatus intelligatur congruere plano horizontis lignei, et polus æquatoris lunaris in firmamento immineat polo Boreo globi ad zenith elevato. Orbitam verò Lunæ concipito partim suprà horizontem ligneum attolli, partim verò infrà eundem deprimi, quemadmodum in hoc situ globi conspicitur ecliptica, licet angulus æquatoris lunaris et ejus orbitæ non sit fortè æquè magnus atque hic quem globus exhibet. Deindè finge tibi globulos duos æquales quorum uterque polis, æquatore et meridiano unico primario insigniatur et uterque filo suspendatur alterutri polorum alligato. Horum alter referat Lunam fictitiam motu æquabili secundum horizontis lignei circumlatam, atque eodem tempore circà axem suum revolutam respectu firmamenti, ità ut planum meridiani primarii lunaris perpetuò transeat per centrum Terræ. Alter verò globulus veram Lunam imitatus in orbita sua feratur motu inæquali, nunc suprà horizontem ligneum emergens, nunc infrà eundem descendens, ità ut planum æquatoris hujus Lunæ veræ semper parallelum maneat plano horizontis lignei, et planum meridiani primarii ejusdem Lunæ veræ semper parallelum plano meridiani primarii Lunæ fictæ. Ità fit ut Luna ficta eandem nobis faciem obvertens semper nulli prorsùs librationi sit obnoxia. At Luna vera, dum a perigæo pergit ad apogæon præcedens Lunam fictam, meridianum suum primarium ostendit in medietate sinistrâ sui disci tot gradibus abeuntem a medio quot sunt inter longitudinem Lunæ veræ et fictæ. Ab apogæo verò ad perigæon descendens Luna vera sequitur fictam, atquè tum meridianus primus veræ Lunæ recedit ab ejus medio ad dextram, hoc est, maculæ omnes vergunt in occasum, et cùm differentia inter mediam et veram Lunæ longitudinem in quadraturis evadat major, propter evectionem systematis lunaris a centro Telluris, hinc est quod in quadraturis librationes in longum cernuntur majores. Similiter intelligitur causa librationis in latum, quando Luna superato nodo ascendente, sivè sectione horizonti lignei et orbitæ suæ, tendit ad limitem boreum, tum enim nobis in centro sphæræ positis, polus Lunæ boreus et quæ sunt circà eum maculæ absconduntur, et polus australis cum suis maculis in conspectum venit, undè maculæ omnes conspicuæ in boream tendere videntur; contrarium accidit, Lunâ ad limitem australem accedente. Ab iisdem causis procedit macularum ex parte lucidâ in obscuram transitus et vicissim. Nam in limite australi polus Lunæ boreus a Sole illustratur, et quidquid est zonæ frigidæ arctico lunari inclusum, dum frigida australis in tenebris versatur. Quod si igitur Solem concipias in eâdem plagâ cum limite australi et Lunam

ex literis meis plenius exposuit. Simili motu ([h]) extimus Saturni satelles circa axem suum revolvi videtur, eâdem sui facie Saturnum perpetuò respiciens. Nam circum Saturnum revolvendo, quoties ad orbis sui partem orientalem accedit, ægerrimè videtur, et plerumque videri cessat: id quod evenire potest per maculas quasdam in eâ corporis parte quæ Terræ tunc obvertitur, ut Cassinus notavit. Simili etiam motu satelles extimus Jovialis circa axem suum revolvi videtur, propterea quod in parte corporis Jovi aversâ maculam habeat quæ tanquam in corpore Jovis cernitur ubicumque satelles inter Jovem et oculos nostros transit.

PROPOSITIO XVIII. THEOREMA XVI.

Axes planetarum diametris quæ ad eosdem axes normaliter ducuntur minores esse.

([i]) Planetæ sublato omni motu circulari diurno figuram sphæricam, ob æqualem undique partium gravitatem, affectare deberent. ([k]) Per motum illum circularem fit ut partes ab axe recedentes juxta æquatorem ascendere conentur. Ideóque materia si fluida sit, ascensu suo ad æquatorem

" post conjunctionem indè procedere ad nodum " ascendentem, tum maculæ superiores apud " polum boreum sitæ, paulatim cum suo polo a " luce in tenebras concedunt, dum inferiores " maculæ cum polo australi ex tenebris in lu- " cem prorepunt. Contrarium evenit semestri " post, cùm Sol accessit ad limitem Lunæ bo- " reum." Hactenus N. Mercator: sed plenior librationum lunarium expositio habetur in Elementis Astronomicis clariss. Cassini, ubi vir doctiss. varias harumce librationum apparentias respectu fixarum et Solis determinat, docetque methodum quâ ad quodlibet tempus datum possit definiri apparens macularum lunarium situs.

([h]) * *Extimus Saturni satelles*, tertio satellite sæpè major apparet, posteaque decrescit ac tandem juxtà periodum nondum probe notam evanescit; id tamen ut plurimum contingit dum satelles in orbitæ suæ orientali parte respectu Saturni versatur, rursùs deinde in conspectum redit. Causa hæc esse videtur, quod scilicet hemisphærii satellitis pars quæ ad nos conversa est, maculis obscurata præ luminis tenuitate cerni non possit, revolvente autem circà axem satellite, ad hemisphærium oppositum transeunt maculæ, iterumque satelles fit conspicuus. Cùmque in eâ orbis sui parte quæ orientem spectat, obscuratus satelles semper observetur, in alterâ verò parte nunquam, valdè probabile est eandem hujus satellitis faciem planetæ primario semper obverti. Idem quoque simili argumento patet in extimo Jovis satellite, nisi dicatur illas satellitum maculas fuliginum instar modò nasci, modò dissipari; sed ubi apparentiæ aliquæ ex duplici causâ ortum habere possunt, anteponendæ sunt explicationes quæ a motu locali repetuntur. Alios Saturni Jovisque satellites, Lunæ instar, planetis primariis invariatam manifestare faciem ex analogiæ lege colligunt multi. Rem aliter se habere censet clariss. Daniel Bernoullius in Disquisitionibus Physico-Astronomicis an. 1734. ab Academiâ Regiâ Scientiarum præmio condecoratis. Has consulat lector.

([i]) * *Planetæ sublato omni motu circulari.* Patet (per not. 172. Lib. II.). Si planetarum materia ponatur fluida, visque gravitatis ad unum centrum dirigatur.

([k]) * *Per motum illum circularem.* Quoniam planetæ circà axem suum revolvuntur, planetarum partes a centris circulorum in quibus moventur, recedere conantur, eóque major est vis illa centrifuga quò majores sunt circulorum quas describunt peripheriæ (Cor. 3. Prop. IV. Lib. I.). Sed æquator est circulus maximus, circuli autem versùs polos continuò decrescunt, quarè planetarum partes magis a centro æquatoris quàm a centris parallelorum recedere conantur, ideóque si fluida sit planetarum materia, ascensu suo ad æquatorem diametros adaugebit, axem verò descensu suo ad polos diminuet.

diametros adaugebit, axem verò descensu suo ad polos diminuet. Sic Jovis diameter (consentientibus astronomorum observationibus) brevior deprehenditur inter polos quàm ab oriente in occidentem. Eodem argumento, nisi Terra nostra paulo altior esset sub æquatore quàm ad polos, maria ad polos subsiderent, et juxta æquatorem ascendendo, ibi omnia inundarent.

PROPOSITIO XIX. PROBLEMA III.

Invenire proportionem axis planetæ ad diametros eidem perpendiculares.

Norwoodus noster circa annum 1635 mensurando distantiam pedum Londinensium 905751 inter Londinum et Eboracum, ac observando differentiam latitudinum 2 gr. 28′. collegit mensuram gradûs unius esse pedum Londinensium 367196, id est hexapedarum Parisiensium 57300.

(†) Picartus mensurando arcum gradûs unius et 22′. 55″. in meridiano inter Ambianum et Malvoisinam, invenit arcum gradûs unius esse hexa-

(†) * *Picartus mensurando arcum .... invenit arcum gradûs unius esse hexap.* 57060. * Circa hanc Picarti mensuram observandum, ill. Cassinum juniorem distantiam terrestrem inter parallelos Malvoisinæ et Ambiani 42 hex. imminuendam statuisse, ipsum verò arcum cœlestem propter refractiones $1\frac{1}{2}''$ esse augendum; unde arcus gradûs unius evadit hexap. 57010. Novissimè verò D. de Maupertuis arcum cœlestem inter Lutetias et Ambianum metitus, multo minorem eum deprehendit quàm esse debuisset secundum observationes Picarti, quare servatis mensuris terrestribus Picarti, arcum unius gradûs 57183 hex. determinavit. Hæc paulo fusiùs sunt diducenda.

I. Cùm mensura Picarti a Malvoisina ad Sourdonem procedat, et hinc ad Ambianum; Picartus distantiam a Malvoisina ad Sourdonem per duas triangulorum series determinat; unam præcipuam vocat quoniam ea ipsa erat quâ uti primùm constituerat, sed cùm aliquid dubii in eâ observasset, alteram instituit, quam priori anteposuit quia observationum in eâ factarum certior sibi videbatur et accuratè consentiebat cum basi proximâ actu mensuratâ: Ill. verò Cassinus distantiam inter parallelos Malvoisinæ et Sourdonis ex priori serie determinat $68325\frac{2}{5}$ hex. dum eamdem distantiam Picartus, cui ill. de Maupertius suffragatur, facit hex. 68347.

Differunt iterum Picartus et illustrissimus Cassinus in distantiâ inter Sourdonem et Ambianum, eam enim distantiam Picartus ex suis mensuris hex. $11161\frac{2}{5}$ invenit, Cassinus verò hex. $11135\frac{1}{2}$: discriminis autem hujus ratio duplex est, nam cùm uterque triangulos formare incipiat in lineâ quæ intercipitur inter Sourdonem et Montem Desiderium, ill. Cassinus eam lineam assumit hex. $7116\frac{1}{2}$ juxta priorem seriem triangulorum Picarti, et Picartus alteram seriem verificatam per basim proximam actu mensuratam anteponens, eam lineam $7122\frac{1}{2}$ hex. facit: cùm verò diversis triangulis inde ad Ambianum usi sint, in iis triangulis occurrit sensibilis differentia quæ sese prodit in angulo Sourdoni facto inter lineas inde ad Ambianum et Montem Desiderium protensas, nam is Picarto est 137°. 56′. 10″. angulus autem idem a Cassino determinatur 137°. 53′. 30″, ex quâ differentiâ 2′. 40″. et ex baseos inter Sourdonem et Montem Desiderium diversitate, oriri potuit discrimen illud in distantiâ inter Sourdonem et Ambianum.

In arcu autem cœlesti a Picarto mensurato, refractionis correctionem adhibet Cassinus quam neglexerat Picartus; cùm ergo invenisset distantiam genu Cassiopeæ a zenith loci in quo observabat, et qui erat 18 hex. Malvoisinâ meridionalior 9°. 59′. 5″. versus septentrionem, et cùm ejus stellæ distantiam a zenith loci 75 hex. meridionaliori quàm ædes Ambiani 8°. 36′. 10″. invenisset, arcum inter zenith eorum locorum juxta Malvoisinam et Ambianum interceptum fecit Picartus 1°. 22′. 55″. ut refert Newtonus.

Verùm propter refractionem augendas esse has distantias a zenith statuit Cassinus, ita ut

pedarum Parisiensium 57060. (§) Cassinus senior mensuravit distantiam in meridiano a villâ Collioure in Roussillon ad observatorium Parisiense;

prima distantia 10″, altera $8\frac{3}{5}$″. fiat; cùm ergo

prior fiat	9° - 59 - 15
Altera	8 - 56 - $18\frac{3}{5}$
Arcus interceptus inter zenith locorum observationis fit	1 - 22 - $56\frac{2}{5}$

Ex his ergo correctionibus tam in arcu cœlesti quàm in mensuris terrestribus, a Picarto observatis, deducit ill. Cassinus arcum unius gradûs esse 57010 hex.

II. Ill. de Maupertuis mensuras terrestres, quas Picartus adoptavit, admittens, arcum cœlestem mensuravit instrumento, a solertissimo Graham accuratissimè constructo; cùm autem priores sectores circa axem immotum, ex quo filum verticale pendet, revolverentur, et divisiones subtiliores in sectoris limbo per lineas transversas signarentur, in hoc instrumento telescopium in suâ summitate duos cylindros adjunctos habet, circa quos cum sectore inferius adfixo revolvitur, et ex quorum centro pendet filum verticale quo notentur gradus in limbo sectoris; divisiones in eo limbo gradus et eorum partes octavas tenuissimis punctis indicant, nihilque præterea, et ad observationem faciendam ita constituitur instrumentum, ut filum pendulum alicui e divisionibus accuratè applicetur, idque microscopio cum lumine juxta limbum collocato agnoscitur; tum cochleâ pellitur instrumentum donec objectum in axe telescopii cernatur, et numerus gyrorum cochleæ, partesque singuli gyri numerantur in limbo circuli horologii instar cochleæ adnexi, ita ut minimi cochleæ progressus maximè sensibiles fiant. Tali itaque instrumento cujus radius est octo pedum unâ unciâ demptâ, observationes instituit ill. de Maupertuis Lutetiæ in loco 1105 hex. magis septentrionali quàm ædes B. Virginis, et Ambiani in loco $98\frac{1}{2}$ meridionaliori æde ejus urbis. Inde ex stellis et Persei, et Draconis, arcum cœlestem inter zenith eorum locorum interceptum 1°. 1′. 12″. determinavit, correctionibus præcessionis æquinoxiorum et aberrationis lucis adhibitis. Hinc cùm juxta Picartum inter parallelos Malvoisinæ et Ambiani sint 78907 hex. inter Malvoisinam et ædes B. Virginis Lutetiis sint $19376\frac{1}{2}$ hex. manent inter utramque ædem $59530\frac{1}{2}$ hex. ex quibus detractis $1203\frac{1}{2}$ hex. propter observationum loca, invenitur arcum 1°. 1′. 12″. respondere mensuræ 58327. hex. ideóque arcum unius gradûs hexapedas 57183. in eâ latitudine continere.

Verùm hic non dissimulandum qualis quantusque error observationi Picarti adscribatur, ex hac novissimâ ill. de Maupertuis observatione; et ut ille error rectè æstimetur, corrigendæ sunt ejus observationes cœlestes non tantum per refractionem, sed etiam per æquinoctiorum præcessionem et aberrationem lucis; etenim cùm eodem tempore factæ non fuerint observationes a Picarto Malvoisinæ et Ambiano, sed inter eas mensis intervallum effluxerit, interea per præcessionem æquinoctiorum augebatur stellæ genu Cassiopeæ declinatio $1\frac{1}{2}$″. ut ipse Picartus observat, simulque propter aberrationem lucis 8″. circiter augeri eam declinationem nunc constat, quare stella quæ Ambiani observabatur non erat in eodem cœli puncto quo fuerat cùm Malvoisinæ observaretur, sed erat 10 fere secundis ad septentrionem provectior; dum ergo observabatur eam stellam distare a zenith Ambiani 8°. 56′. $18\frac{3}{5}$″, (adhibitâ refractionis correctione) punctum fixum quod fuerat Malvoisinæ observatum 8°. 56′. $8\frac{3}{5}$″. a zenith duntaxat distabat, et cùm id punctum Malvoisinæ 9°. 59′. 15″. a zenith distasset, arcus inter duo zenith interceptus erat 1°. 23′. $6\frac{2}{5}$″. (non 1°. 23′. $56\frac{2}{5}$″.) qui respondet 78850. hex. unde gradûs unius mensura fiet duntaxat $56926\frac{5}{6}$ hexapedarum; sive ut conferatur hæc observatio cum observat. il. de Maupert. fiatque si $58515\frac{1}{6}$ hex. respondeant 1°. 1′. 12″. Quot gradibus respondebunt 78850. Invenietur 1°. 22′. $45\frac{1}{5}$″. loco 1°. 23′. $6\frac{2}{5}$″. ita ut error in observatione cœlesti Picarti sit 20″.

Singulare quid occurrit in ipsâ Picarti narratione; postquam enim differentias inter zenith Malvoisinæ et Sourdonis, Malvoisinæ et Ambiani dedit, addit: " Differentia temporis quod " effluxit inter observationes, requireret ut ex " priori differentia 1″. *demeretur*, ex posteriori " $1\frac{1}{2}$″. (propter æquinoctiorum præcessionem;) " sed hanc correctionem, ne minutias sectari " videamur, omisimus." Si mutatio declinationis per præcessionem æquinoctiorum orta ex iis differentiis *demenda* foret, mutatio declinationis propter aberrationem pariter foret demenda siquidem fit in eamdem partem, itaque cùm arcus inter Malvoisinam et Ambianum adhibitâ correctione refractionis, sit 1°. 22′. $56\frac{2}{5}$″. demptâ præcessionis et aberrationis variatione 10″. circiter, maneret is arcus 1°. 22′. $46\frac{2}{5}$″. ad unam secundam, qualis secundùm d^ni^. de Maupertius observationem inveniri debuisset.

Verùm ut correctio præcessionis et aberrationis *demenda* foret, ut vult Picartus, oporteret ut observationes primùm Ambiano, postea Malvoisinæ fuissent factæ, sed ita notantur illæ observationes, Septembri Malvoisinæ et Octobri Ambiano: si itaque rectè ratiocinatus sit, sed malè tempora notaverit, elegantissimè consentient ejus observationes cum accuratissimis postea factis; sin bene tempora notaverit, sed malè fuerit ratiocinatus, fatendum erit errorem circiter 20″. inter duas ejus observationes esse distribuendum, stantibus observationibus ill. de Maupertius 6″. aut 7″. secundis propiùs accederent ad has obser-

et filius ejus addidit distantiam ab observatorio ad turrem urbis Dunkirk. Distantia tota erat hexapedarum 486156½ et differentia latitudinum villæ

vationes illæ quas instituit Picartus a Malvoisinâ ad Sourdonem, ita ut error 12″. duntaxat, inter duas observationes distribuendus superesset.

(§) * *Cassinus senior mensuravit distantiam in meridiano a villâ Collioure ad observatorium Parisiense; et filius addidit distantiam ab observatorio ad turrim urbis Dunkirk.*

* Has duas mensuras in unam summam conjicit Newtonus, quia cùm Cassinus senior gradum majorem quàm Picartus invenerit, Cassinus filius minorem, conjunctis mensuris obtinetur gradus mediocris proximè æqualis mensuræ gradûs a Picarto assignatæ, quem ut gradum Telluris, ut sphæricæ consideratæ, assumit Newtonus, verùm hic duo sunt notando, 1°. utitur Newtonus isto gradu mediocri quasi foret æquatoris gradus, qui quidem isto major est, sed inde parum mutatur sequens calculus ut liquebit si eumdem instituamus assumpto gradu æquatoris isto majore, v. gr. 57226 hex. ut deduceretur ex theoriâ ipsius Newtoni; et gradum in 45. gradu faciendo 57100 hex.

2°. Distinguendæ sunt observationes Cassini senioris et filii; hæc enim propter aberrationem lucis correctione indiget, mensura verò ill. Cassini Patris a villâ Collioure ad observatorium, arcum cœlestem 6°. 18′. 57″. continet et respondet hexapedis 360614. (ad maris libellam reductis mensuris) unde gradus fit 57097 hex. verificatæ sunt mensuræ in utroque extremo, nec in iis gravis error est metuendus, cùm aptè consenserint triangulorum calculi cum ultimis lineis seu basibus actu mensuratis; error verò qui in observatione cœlesti occurrere potest, singuli gradûs mensuram parùm immutat, quia in sex gradus et ultra distribuitur; cùm verò iisdem anni temporibus tàm Lutetiæ quàm in villâ Collioure observationes institutæ fuerint, aberratio lucis calculum arcûs cœlestis non immutavit: hinc in numeris proximis rotundis gradus in latitudine graduum 45.57100 hexapedarum assumi potest satis tutò.

3°. Quoad observationes ill. Cassini filii, cùm inter 15. Julii et 4. Sept. factæ fuerint observationes cœlestes quibus determinaretur arcus inter zenith urbis Dunkirk et observatorii interceptus, aberrationis correctio illis est adhibenda quæ tunc temporis nondum erat cognita; verùm illam correctionem necessariam esse tantò minus dubium est, quod cùm is arcus per observationes stellæ γ Draconis fuerit determinatus, ejus ipsius stellæ aberratio ab ill. Bradleio fuerit observata (vid. Trans. Phil. Vol. XXXV. pag. 637.) et nuperrime a D. le Monnier.; immediatis ergo experimentis constat ejus stellæ declinationem augeri a mense Julio ad Septembrem, ita ut cùm Lutetiæ seriùs observata sit, 11½ secundis polo tunc vicinior esse potuit quàm cùm in urbe Dunkirk observata fuerat, ideóque totidem secundis zenith remotior apparebat quàm punctum fixum quod in urbe Dunkirk fuerat observatum, unde cùm ex distantiâ a zenith Lutetiæ detrahatur distantia ejusdem stellæ a zenith urbis Dunkirk, arcus residuus illis 11½ sec. est mutandus, et cùm residuum invenerit ill. Cassinus 2°. 12′. 9½″. est reducendus ad 2°. 11′. 58″, et cùm is arcus 125454 hexapedis respondere ab ill. Autore statuatur, arcus unius gradus fiet hex. 57038. 5 ped.

Verùm minor dissensus inter observationes ill. Cassini filii et d^{ni}. de Maupertuis apparebit si attendatur, partem illius dissensûs oriri ex eo quòd, dum mensuris Picarti uterentur, diversas ejus triangulorum series adoptaverint; quare ut conferantur eorum inventa, reducendæ sunt eorum supputationes quasi eâdem serie triangulorum Picarti uterentur ambo: v. gr. supponatur utrumque assumpsisse eam seriem triangulorum quam ipse Picartus admisit, sed ad Sourdonem usque, et inde (quia ill. Cassinus propriis suis triangulis distantiam a Sourdone ad Ambianum determinavit) assumatur ea distantia qualis ex triangulis ill. Cassini deduceretur si modo priori serie usus fuisset, et reliqua ejus triangula usque ad urbem Dunkirk in eadem proportione augeantur; hinc iste emerget calculus.

Primò tota distantia inter parallelos observatorii et Sourdonis erit ex Picarto - 49926 hex. 3 ped.

Secundò; distantia inter parallelos Sourdonis et Ambiani est ex Cassino 10539½ hex. assumptâ basi 7116½; sed in alterâ serie triangulorum eadem basis erat 7122⅓ hinc assumptâ hac mensurâ, distantia parall. inter Sourdonem et Ambianum ex triangulis ill. Cassini erit - - 10547 hex. 4 ped.

Tota ergo distantia inter parallelos Sourdonis et Ambiani erit - - - - - - - 60474 - 1

Tertiò distantia inter parallelos Ambiani et urbis Dunkirk est ex Cassino 65109 hex. 1 ped., suppositâ basi 7116½, si ergo supponatur ea linea 7122⅓ fiet distantia inter parallelos Ambiani et urbis Dunkirk ex triangulis ill. Cassini. - - 65162 hex. 3 ped

Tota ergo distantia inter Observatorium et parallelum urbis Dunkirk fiet 125636 - 4

et detractis 98. hex. pro locis observationum cœlestium et 2½ hex. pro libellâ supersunt 125536 hex. ⅙, quæ respondent 2°. 11′. 58″. unde arcus unius gradus invenitur 57076 : 2.

Pariter in observatione d^{ni}. de Maupertuis cùm sint inter parallelum observatorii et ædis Ambiani 60474 : 1. et propter observationum cœlestium loca 2159 hex. sint detrahendæ, arcus

Collioure et urbis Dunkirk erat graduum octo et 31′. $12\frac{5}{6}''$. Unde arcus gradûs unius prodit hexapedarum Parisiensium 57061. Et ex his mensuris colligitur ambitus Terræ pedum Parisiensium 123249600, et semidiameter ejus pedum 19615800, et hypothesi quod Terra sit sphærica.

In latitudine Lutetiæ Parisiorum corpus grave tempore minuti unius secundi cadendo describit pedes Parisienses 15. dig. 1. lin. $1\frac{7}{9}$ ut supra, (††) id est, lineas $2173\frac{7}{9}$. Pondus corporis diminuitur per pondus aëris ambientis. (l) Ponamus pondus amissum esse partem undecimam millesimam ponderis totius, et corpus illud grave cadendo in vacuo describet altitudinem linearum 2174 tempore minuti unius secundi.

Corpus in circulo ad distantiam pedum 19615800 a centro, singulis diebus sidereis horarum 23. 56′. 4″. uniformiter revolvens tempore minuti unius secundi (m) describet arcum pedum 1433,46, cujus sinus versus est pedum 0,0523656, seu linearum 7,54064. (n) Ideóque vis, quâ gravia

inter observationes dni. de Maupertuis observatus qui est 1°. 1′. 12″. respondebit hex. 58315 : 1. Unde gradus erit $57171\frac{2}{3}$.

Ut itaque verus dissensus inter observationem ill. Cassini et dni. de Maupertuis habeatur, fiat sicut $57171\frac{2}{3}$ ad $125536\frac{1}{6}$ ita unus gradus ad quartum, invenietur arcus 2°. 11′. 45″, qui 13″. duntaxat differt ab arcu 2°. 11′. 58″. quem ill. Cassinus observavit; quæ differentia inter quatuor observationes cœlestes et mensuras terrestres distributa, efficeret conclusiones uniformes: ergo illæ observationes nedum inter se pugnent, iis differentiolis tantùm discrepent, quæ inevitabilibus accidentibus debentur.

Interea satis liquet quod si in unam summam conjicerentur mensuræ ill. Cassini patris et filii, diminuendus esset arcus totalis 12″. propter correctionem aberrationis lucis, cui obnoxia est observatio ill. Cassini filii, et mensuræ terrestres forent augendæ, quia ex observatione dni. de Maupertuis additur pondus rationibus quibus inter duas series triangulorum dni. Picarti ea præponenda censeatur quam Picartus prætulerat, et quam ill. Cassinus neglexerat, imo et probabile fit errores minimos inevitabiles, eam in partem conspirasse ut arcus cœlestis major vero videretur ill. Cassino et mensuræ terrestres vero minores; quibus omnibus perpensis, magnitudinem unius gradus in 45°. lat. gradu, circa medium mensuræ a Cassino patre institutæ rotundis numeris satis tutò 27100. hex. assumi posse liquet.

(††) *Id est, lineas* $2173\frac{7}{9}$. Ex accuratissimis observationibus dni. de Mairan (Cap. VI. Lib. III. fig. Terræ determ. a D. de Maupertuis) longitudo penduli ad singulas secundas vibrans est linearum 440. 57. hinc, cùm juxta Prop. XXVI. Horol. Oscill. Hugh. sit circuli circumferentia ad diametrum ut 1″. ad tempus descensûs per dimidiam altitudinem penduli, sive per lineas 220. $28\frac{1}{2}$, sint verò quadrata temporum ut spatia descensu verticali iis temporibus descripta, erit 9.8696 ad 1 (Quadratum circumferentiæ ad quadratum diametri 1.) sicut spatium uno secundo descriptum ad 220.$28\frac{1}{2}$ lin. Ergo corpus grave in latitudine Lutetiæ tempore minuti unius secundi describit lineas 2173. 631356. paulò minus quàm Newtonus assignat, ejus undecima millesima pars foret .197602. Quare id grave in vacuo cadendo describeret altitudinem 2173. 828958.

(l) * *Ponamus pondus amissum.* Quoniam corpus quodlibet ponderis sui partem amittit in aëre æqualem ponderi paris voluminis aëris, et plumbum est ad aquæ gravitatem specificam ut 11,345 ad 1000; aqua verò ad aërem paulo minus quàm 1000 ad 1, hinc gravitas plumbi est ad gravitatem aëris ferè ut 11000 ad 1, hinc ergo plumbum amittit in aëre ponderis sui partem undecimam millesimam, itaque in vacuo augetur pondus plumbi parte undecimâ millesimâ ponderis totius, hoc est spatia eodem tempore descripta undecimâ millesimâ totius spatii descripti parte augeri debent: fiat ergo 11000 ad 11001 ut $2173\frac{7}{9}$ ad quartum, illud quartum erit 2173.966 ergo poni potest quàm proximè spatium tempore minuti unius secundi descriptum in vacuo a plumbo, ideóque a quovis alio corpore gravi (nam omnia gravia æquali celeritate in vacuo cadunt) linearum 2174.

(m) * *Describet arcum ped.* Computum initur eodem planè modo ac not. 63.

(n) * *Ideóque vis.* Vires uniformes sunt ut spatia dato tempore descripta, sed est spatium vi gravitatis tempore unius minuti secundi descriptum 2174. lin. spatium autem vi centrifugâ descriptum ut sinus versus, hoc est, lin. 7, 54064.

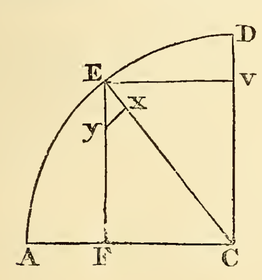
* Si gradus æquatoris sit major 57061 hex.,

descendunt in latitudine Lutetiæ, est ad vim centrifugam corporum in æquatore a Terræ motu diurno oriundam, ut 2174 ad 7,54064.

Vis centrifuga corporum in æquatore Terræ est ad vim centrifugam, quâ corpora directè tendunt a Terrâ in latitudine Lutetiæ graduum 48. 50′. 10″, (°) in duplicatâ ratione radii ad sinum complementi latitudinis illius, id est, ut 7,54064 ad 3,267. Addatur hæc vis ad vim quâ gravia descendunt in latitudine illâ Lutetiæ, et corpus in latitudine illâ vi totâ gravitatis cadendo, tempore minuti unius secundi describet lineas 2177,267, seu pedes Parisienses 15 dig. 1. et lin. 5.267. Et vis tota gravitatis in latitudine illâ erit ad vim centrifugam corporum in æquatore Terræ ut 2177,267 ad 7,54064 seu 289 ad 1.

v. gr. si 57226 hex. sumatur, erit iste sinus versus linearum 7. 56244, ideóque vis quâ gravia descendunt in latitudine Lutetiæ, est ad vim centrifugam corporum in æquatore ut 2173. 828958 ad 7. 56244.

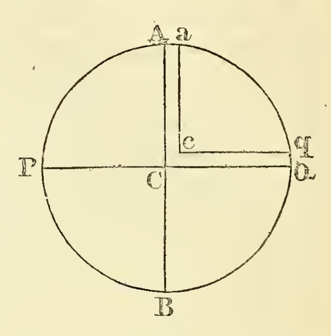
(°) 81. * *In duplicatâ ratione radii.* Quadrans circuli A E D revolvatur circà radium A C, ducatur radius C D ad A C normalis, ipsique parallela agatur ordinata E F, erit vis centrifuga in D secundum directionem D C sive E F, ad vim centrifugam in E secundum directionem C E, in ratione duplicata radii C D ad ordinatam E F quæ est sinus complementi arcûs seu latitudinis E D. Exprimat enim D v vim centrifugam in D secundum directionem D C, et recta E y, exprimat vim centrifugam in E secundum directionem E F, ductâ perpendiculari y x ad rectam E C, exprimet E x, vim centrifugam in E, secundum directionem E x, sed est, D v : E y = D C : E F (Cor. 3. Prop. IV. Lib. I.) et ob triangula rectangula E x y, E F C similia, E y : E x = E C vel D C : E F. Quarè, componendo D v : E x = D C², E F². Q. e. d.



* Verùm si meridianus Terræ sit alia curva quàm circulus v. gr. sit ellipsis, vis centrifuga corporum in æquatore Terræ est ad vim centrifugam quâ corpora perpendiculariter a Terrâ recedunt in latitudine datâ, in ratione compositâ ex ratione radii ad sinum complementi latitudinis illius, et ex ratione radii æquatoris, ad ordinatam ejus ellipseos in eâ latitudine datâ; hinc pro ellipsi ratio vis centrifugæ in æquatore ad vim centrifugam in latitudine datâ exprimetur hoc modo: sit m axis major, n axis minor, r radius, c sinus complementi latitudinis quæsitæ, erit vis in æquatore ad vim in eâ latitudine, ut $m\,r\sqrt{m^2 \times \overline{r^2 - c^2} + n^2 c^2}$ ad $n^2 c^2$ ut facile deducetur ex ellipseos naturâ; quare si fingatur m = 230 et n = 229 juxta Newtonum invenietur calculo eas vires esse inter se ut 7.56244 ad 3.09660, addatur hæc vis ad vim quâ gravia descendunt in latitudine Lutetiæ, et vis tota gravitatis (in Hyp. assumptis) efficeret ut gravia cadendo describerent lineas 2176. 92558. Unde vis tota gravitatis in latitudine Lutetiæ erit ad vim centrifugam corporum in æquatore Terræ ut 2176. 92558 ad 7.56244 sive ut 287. 86 ad 1.

Hæc autem vis gravitatis in latitudine Lutetiæ non est vis ipsa gravitatis in æquatore, de quâ agitur in reliquâ hâc Propositione, sed parum ab eâ differt, ita ut calculo quodam inito inveniatur quod hæc vis gravitatis in latitudine Lutetiæ sit ad vim gravitatis in æquatore (Terrâ uniformiter densâ suppositâ), ut 1532 ad 1531 ideóque sit vis gravitatis in æquatore ad vim ejus centrifugam ut 287.67 ad 1. Quas quidem varias correctiones, Newtonianis numeris adplicamus, ut inde liqueat, quod quamvis numeris ut ita dicam mediocribus sit usus Newtonus et sæpe ex hypothesi Terræ sphæricæ ductis, parùm mutationis tamen adfuturum sit, etsi assumantur alii numeri qui ex veriore Terræ figurâ deducerentur.

Unde si A P B Q figuram Terræ designet (p) jam non amplius sphæricam, sed revolutione ellipseos circum axem minorem P Q genitam; sitque A C Q q c a canalis aquæ plena, a polo Q q ad centrum C c, et inde ad æquatorem A a pergens: (q) debebit pondus aquæ in canalis crure A C c a, esse ad pondus aquæ in crure altero Q C c q ut 289 ad 288, eo quod vis centrifuga ex circulari motu orta partem unam e ponderis partibus 289 sustinebit ac detrahet, et pondus 288 in altero crure sustinebit reliquas. Porro (ex Propositionis XCI. Corol. 2. Lib. I.) computationem ineundo, invenio quod si Terra constaret ex uniformi materiâ, motuque omni privaretur, (r) et esset ejus axis P Q ad diametrum A B ut 100 ad 101: gravitas in loco Q in Terram foret ad



(p) * *Jam non amplius sphæricam, sed revolutione ellipseos circum axem minorem P Q genitam.* * Terram non multum a figurâ sphæricâ discedere ex eclipsibus Lunæ patet; magis adhuc ad formam ejus ellipseos accedere cujus axes forent æquales diametro æquatoris, et distantiæ polorum Terræ respectivè, satis liquet; utrum verò curva illa quæ singulum meridianum Terræ constituit et quæ convolutione arcûs P A Q circa axem minorem P Q generatur sit ellipsis Apolloniana, utrum tantùm curva ad eam accedens, non determinat Newtonus; paulò fusius de hujus curvæ naturâ inferius disseremus; hic enim ad calculum Newtonianum intelligendum, sufficit assumere eam curvam ad ellipsim satis accedere, ut ellipsis pro eâ assumi possit.

(q) * *Debebit pondus aquæ.* Si fluidum in canale contentum quiescere supponatur, fluidi partes in canalis crure A C debent esse in æquilibrio cum partibus fluidi in ejusdem canalis crure Q C. Cùm itaque vis centrifuga ex circulari motu orta partem unam ponderis detrahat e ponderis partibus 289, oportet ut pondus in altero crure sit 288 (sive ex inventis ut 288.67. ad 287.67), sic enim pondera in utroque canalis crure erunt æqualia.

(r) * *Et esset ejus axis P Q ad diametrum A B ut* 100 *ad* 101, *gravitas in loco Q in Terram foret ad gravitatem in sphæram centro C radio Q C descriptam, ut* 126 *ad* 125 *et eodem argumento gravitas in loco A in sphæroidem circa axem A B descriptam est ad gravitatem in sphæram centro C radio A C descriptam, ut* 125 *ad* 126.

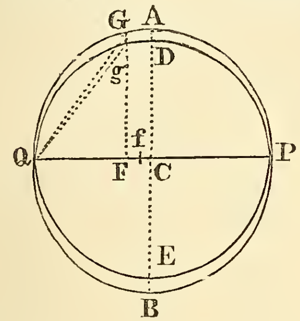
* Utrumque simul probari potest: sit P A Q B, in utrâque figurâ, Terræ meridianus; in primâ figurâ sit Q D P Q sphæra centro C radio Q C descripta et in secundâ figurâ P A Q B repræsentat sphæroidem quam revolutione meridiani Terræ circa æquatorem describi fingit Newtonus et A E D sphæram radio A C descriptam. Constat Corollario 2. Prop. XC. Lib. I. quod si ducantur circuli ad axes revolutionum perpendiculares quorum radii sunt F G, f g (in utrâque figurâ) attractio punctorum Q et A ab illis circulis erit $1 - \frac{QF}{QG}$, $1 - \frac{QF}{Qg}$, $1 - \frac{AF}{AG}$, $1 - \frac{AF}{Ag}$ respectivè. Quare si dicatur C Q sive C D, b, et A C sive C E, r, dicaturque abscissa Q F, A F, in utrâque figurâ, x; erit in primâ figurâ $\overline{FG}^2 = \frac{r^2}{b^2} \times \overline{2bx - xx}$; $\overline{Fg}^2 = 2bx - xx$, et in secundâ figurâ est $\overline{FG}^2 = \frac{b^2}{r^2} \times \overline{2rx - xx}$ et $\overline{Fg}^2 = 2rx - xx$, quibus quadratis si addatur quadratum $\overline{QF}^2$ vel $\overline{AF}^2$ sive xx, habebuntur quadrata linearum $\overline{QG}^2$, $\overline{Qg}^2$, $\overline{AG}^2$, $\overline{Ag}^2$, respectivè, quæ erunt $\frac{r^2}{b^2} \times 2bx - \frac{r^2 - b^2}{b^2} x^2$; $2bx$; $\frac{b^2}{r^2} \times 2rx + \frac{r^2 - b^2}{r^2} x^2$; et $2rx$; unde (si compendii gratiâ loco $r^2 - b^2$ scribatur m) attractiones istorum circulorum evadent

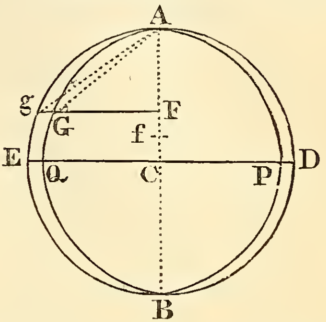
gravitatem in eodem loco Q in sphæram centro C radio P C vel Q C descriptam, ut 126 ad 125. Et eodem argumento gravitas in loco A in sphæroidem, convolutione ellipseos A P B Q circa axem A B descrip-

$1 - \frac{bx}{\sqrt{2r^2bx - mx^2}}$; $1 - \frac{x}{\sqrt{2bx}}$; $1 - \frac{rx}{\sqrt{2b^2rx + mx^2}}$, $1 - \frac{x}{\sqrt{2rx}}$:

Sit verò F f = d x et multiplicetur attractio singuli circuli per d x habebuntur elementa attractionis sphæroideôn et sphærarum, quæ elementa erunt

$dx - \frac{bxdx}{\sqrt{2r^2bx - mx^2}}$; $dx - \frac{xdx}{\sqrt{2bx}}$; $dx - \frac{rxdx}{\sqrt{2b^2rx + mx^2}}$; $dx - \frac{xdx}{\sqrt{2rx}}$.





Facilè revocabuntur ad fluentes suas ea elementa attractionis sphærarum, quippe fluentes quantitatum $dx - \frac{xdx}{\sqrt{2bx}}$ et $dx - \frac{xdx}{\sqrt{2rx}}$ sunt $x - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\sqrt{2b}}$ et $x - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\sqrt{2r}}$ et ubi Q F vel A F diametros Q P vel A B æquant, ideóque x fit æqualis 2 b, vel 2 r, evadunt illæ fluentes $2b - \frac{2b\sqrt{2b}}{\frac{3}{2}\sqrt{2b}}$ et $2r - \frac{2r\sqrt{2r}}{\frac{3}{2}\sqrt{2r}}$ sive $\frac{2}{3}$ b et $\frac{2}{3}$ r.

Ut obtineatur fluens quantitatis $dx - \frac{bxdx}{\sqrt{2r^2bx - mx^2}}$, quantitas $\frac{bxdx}{\sqrt{2r^2bx - mx^2}}$ resolvatur in seriem (eam considerando ut $bxdx \times \overline{2r^2bx - mx^2}|^{-\frac{1}{2}}$) sumatur juxta formulam Newtonianam quotiens secundi termini $- mx^2$ per primum $2r^2bx$ divisi, qui quotiens erit $- \frac{mx}{2b \times r^2}$; primi termini $2r^2bx$ sumatur dignitas $-\frac{1}{2}$, quæ est $\frac{1}{rx^{\frac{1}{2}} \times \overline{2b}|^{\frac{1}{2}}}$, tum adhibitis coëfficientibus secundum formulam; tota quantitas evadet

$$dx - \frac{bx^{\frac{1}{2}}dx}{rx \times \overline{2b}|^{\frac{1}{2}}} - \frac{1 \times bmx^{\frac{3}{2}}dx}{2 \times r^3 \times \overline{2b}|^{\frac{3}{2}}} - \frac{1 \times 3bm^2x^{\frac{5}{2}}dx}{2 \times 4r^5 \times \overline{2b}|^{\frac{5}{2}}} - \frac{1 \times 3 \times 5bm^3x^{\frac{7}{2}}dx}{2 \times 4 \times 6r^7 \times \overline{b2}|^{\frac{7}{2}}}, \text{ \&c.}$$

et integrando dabitur $x - \frac{2bx^{\frac{3}{2}}}{3r \times \overline{2b}|^{\frac{1}{2}}} - \frac{2bmx^{\frac{5}{2}}}{10r^3 \times \overline{2b}|^{\frac{3}{2}}} - \frac{1 \times 3 \times 2bm^2x^{\frac{7}{2}}}{2 \times 4 \times 7r^5 \times \overline{2b}|^{\frac{5}{2}}} - \frac{1.3.5.2\,bm^3x^{\frac{3}{2}}}{2.4.6.\,9r^7.\overline{2b}|^{\frac{7}{2}}}$, &c.

Quando verò x = 2 b, series fit $2b - \frac{2b^2}{3r} - \frac{2b^2m}{10r^3} - \frac{1 \times 3 \times 2b^2m^2}{2 \times 4 \times 7r^5} - \frac{1 \times 3 \times 5 \times 2b^2m^3}{2 \times 4 \times 6 \times 9r^7}$.

Sive dividendo per 2 b et ad terminos præcedentes revocando; attractio Terræ, in corpusculum Q in extremitate minoris axis positi circa quem revolvi censetur, exprimitur per hanc seriem

$$2b \times (1 - \frac{b}{3r} - \frac{1 \times 3m}{2.\,5r^2} B - \frac{3 \times 5m}{4 \times 7r^2} C - \frac{5 \times 7m}{6 \times 9r^2} D - \frac{7 \times 9m}{8 \times 11r^2} E, \text{ \&c.})$$

Simili modo obtinebitur fluens quantitatis $dx - \frac{rxdx}{\sqrt{2b^2rx + mx^2}}$, nempe secundam partem considerando ut $rxdx \times \overline{2b^2rx + mx^2}|^{-\frac{1}{2}}$, quæ in serie resolvatur, quotiens secundi termini

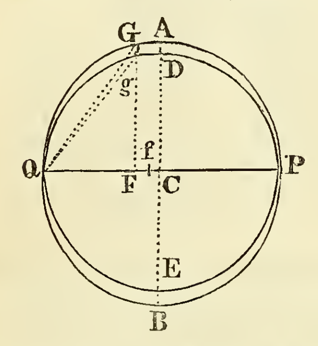
per primum divisi erit $+ \frac{m x}{2 r b^2}$; primi termini dignitas $- \frac{1}{2}$ erit $\frac{1}{b x^{\frac{1}{2}} \times \overline{2r}|^{\frac{1}{2}}}$ et calculando secundum formulam tota quantitas

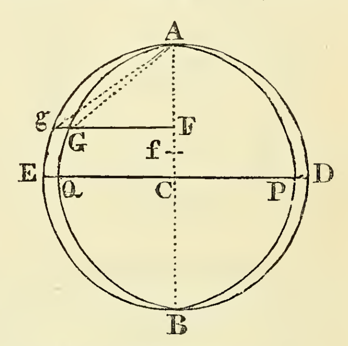
$$\text{evadet } d x - \frac{r x^{\frac{1}{2}} d x}{b \times \overline{2r}|^{-\frac{1}{2}}} + \frac{1 \times r m x^{\frac{3}{2}} dx}{2 \times b^3 \times \overline{2r}|^{-\frac{3}{2}}} - \frac{1 \times 3 r m^2 x^{\frac{5}{2}} dx}{2 \times 4 b^5 \times \overline{2r}|^{-\frac{5}{2}}} + \frac{1 \times 3 \times 5 r m^3 x^{\frac{7}{2}} dx}{2 \times 4 \times 6 b^7 \times \overline{2r}|^{-\frac{7}{2}}}, \text{ \&c.}$$

$$\text{Integrando habetur } x - \frac{2 r x^{\frac{3}{2}}}{3 b \times \overline{2r}|^{-\frac{1}{2}}} + \frac{1 \times 2 r m x^{\frac{5}{2}}}{2 \times 5 b^3 \times \overline{2r}|^{-\frac{3}{2}}} - \frac{2 \times 3 \times 2 r m^2 x^{\frac{7}{2}}}{2 \times 4 \times 7 b^5 \times \overline{2r}|^{-\frac{5}{2}}} + \frac{1 \times 3 \times 5 \times 2 r m^3 x^{\frac{9}{2}}}{2 \times 4 \times 6 \times 9 b^7 \times \overline{2r}|^{-\frac{7}{2}}}, \text{ \&c.}$$

$$\text{Quando } x = 2 r \text{ series fit, } 2 r - \frac{\overline{2r}|^2}{3 b} + \frac{\overline{2r}|^2 \times m}{2 \times 5 b^3} - \frac{1 \times 3 \times \overline{2r}|^2 \times m^2}{2 \times 4 \times 7 b^5} + \frac{1 \times 3 \times 5 \times \overline{2r}|^2 m^3}{2 \times 4 \times 6 \times 9 b^7}, \text{ \&c.}$$

$$\text{Sive } 2 r \times \left(1 - \frac{2 r}{3 b} + \frac{3 m}{2 \times 5 b^2} B - \frac{3 \times 5 m}{4 \times 7 b^2} C + \frac{5 \times 7 m}{6 \times 9 b^2} D - \frac{7 \times 9 m}{8 \times 11 b^2} E, \text{ \&c.}\right)$$





Cùm ergo sit $r = 101$, et $b = 100$ est $r^2 - b^2 = \overline{r + b} \times \overline{r - b} = 201 = m$, est $r^2 = 10201$.
Hinc substitutionibus factis prima series evadit

$$2 b \times 1 \begin{array}{l} -.66006600 \\ -.00390177 \\ -.00004118 \\ -.00000052 \\ -.00000001. \end{array}$$

hoc est, $2 b \times (1 - .66400948)$, sive $2 b \times .33599052$; sed sphæræ attractio erat $\frac{2 b}{3}$; ergo gravitas in loco Q in Terram foret ad gravitatem in sphæræ centro C radio Q C descriptam ut 1.00797156 ad 2 (multiplicando utrumque terminum per 3 et dividendo per 2 b) sive ut 1008 ferè ad 1000, qui numeri sunt accuratè ut 126 ad 125, ut liquet utrumque per 8 dividendo. Q. e. 1°. d.

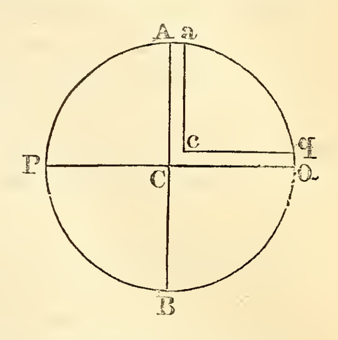
Pariter substitutionibus factis in serie secundâ, evadit

$$2 r \times 1 \begin{array}{l} -.67333333 + .00406020 \\ -.00004372 + .00000057 \\ .00000001. \end{array}$$

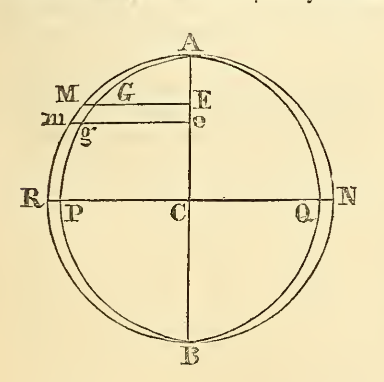
Sive $2 r \times (1 - .67337706 + .00406077)$ hoc est $2 r \times 33068371$, sed sphæræ attractio erat $\frac{2 r}{3}$, ergo utrumque terminum multiplicando per 3 et dividendo per 2 r; gravitas in loco A in ellipsoidem, convolutione circa majorem axem genitum, erit ad gravitatem in sphæram radio A C descriptam ut 99205113 ad 1; multiplicetur uterque terminus per 1008, et evadent 999.987589 et 1008; proximè 1000 et 1008 qui numeri sunt ut 125 ad 126. Q. e. 2°. d.

79. *Lemma.* Sphærois compressa convolutione ellipseos A P B Q circà axem minorem P C genita, est media proportionalis inter sphæram circumscriptam cujus radius est A C, et sphæroidem oblongatam convolutione ellipseos circà axem A C genitam. Nam ductis ordinatis M E, m e, infinitè propinquis, tum sphæra circumscripta tum sphærois oblongata dividi intelligantur in cylindrulos ordinatarum M E et m e, G E et g e convolutione descriptos, erit cylindrulus E G g e in sphæroide ad cylindrulum E M m e in sphærâ, ut altitudo E e ducta in circulum radio G E

tam, est ad gravitatem in eodem loco A in sphæram centro C radio A C descriptam, ut 125 ad 126. (s) Est autem gravitas in loco A in Terram media proportionalis inter gravitates in dictam sphæroidem et sphæram: propterea quod sphæra, diminuendo diametrum P Q in ratione 101 ad 100, vertitur in figuram Terræ; et hæc figura diminuendo in eâdem ratione diametrum tertiam, quæ diametris duabus A B, P Q perpendicularis est, vertitur in dictam sphæroidem; et gravitas in A, in casu utroque, diminuitur in eadem ratione quam proximè. (t) Est igitur gravitas in A in sphæram centro C radio A C descriptam, ad gravitatem in A in Terram ut 126 ad $125\frac{1}{2}$, et gravitas in loco Q in sphæram



rotando descriptum, ad altitudinem E e, ductam in circulum cujus est radius M E, sivè quia circuli sunt ut quadrata radiorum et utriusque cylindruli communis est altitudo, erit cylindrulus

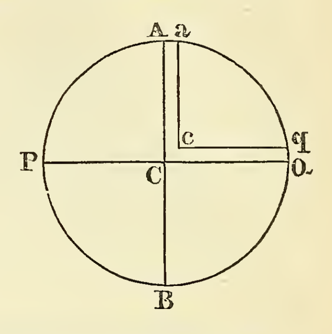


E G g e, ad cylindrulum E M m e, ut G E ^{2} ad M E ^{2}. Sed G E ^{2} ad M E ^{2} semper est ut P C ^{2} ad R C ^{2} vel A C ^{2}, ideóque in datâ ratione, erit itaque summa tota cylindrulorum in sphæroide ad summam totam cylindrulorum in sphærâ, hoc est, sphærois ipsa ad sphæram ut P C ^{2} ad A C ^{2}, jam verò sphæra radio R C descripta et sphærois compressa ellipseos A G P circà axem P C convolutione genita, simili modo dividi intelligantur in tubulos innumeros ordinatarum M E et m e, G E et g e, circà axem P C convolutione genitos, ob radiorum C E et rectarum E e æqualitatem, erunt tubul illi ut M E, G E, sivè ut A C ad P C, hoc est, in datâ ratione; ideóque sphæra est ad sphæroidem compressam ut A C ad P C. Quare si sphæra dicatur S sphærois compressa s, et sphærois oblongata σ, sitque A C = b, P C = a erit $S^2 : s^2 = b^2 : a^2$, ac proindè $S : \sigma = S^2 : s^2$ undè $s = \sqrt{S \times \sigma}$. Q. e. d.

(s) 80. *Est autem gravitas.* Diameter P Q, in figurâ Newtoni respondeat diametro R N, minuatur diameter illa R N in ratione 101 ad 100 ut fiat P Q = 100, tunc sphæra quæ centro C radio A C descripta erat, vertetur in figuram Terræ. Jam verò concipiatur tertia diameter quæ in revolutione sphæræ duabus diametris A B, P Q, fit perpendicularis, hæcque diameter diminuatur in eâdem ratione 101 ad 100, patet figuram Terræ verti in sphæroidem oblongatam. Quia verò utraque sphærois sivè compressa sive oblongata ad sphæram quam proximè accedit, sphæroides illæ pro sphæris quæ eandem respectivè contineant materiæ quantitatem, quam proxime haberi possunt. Sunt autem attractiones sphærarum in distantiis æqualibus ut quantitates materiæ (Cor. 1. Prop. LXXIV. Lib. I.) ideóque gravitas in utroque casu prædicto diminuitur in eâdem ratione materiæ detractæ quam proximè, ac proinde attractiones sphæræ sphæroidis compressæ et sphæroidis oblongatæ sunt respectivè ut quantitates materiæ in illis corporibus contentæ quàm proximè. Sed sphærois compressa convolutione ellipseos A P B Q, circa axem P C Q genita est media proportionalis inter sphæram circumscriptam cujus radius est A C, et sphæroidem oblongatam convolutione ellipseos circà axem A C B genitam (82.). Quarè gravitas in loco A, in Terram est media proportionalis inter gravitates in dictam sphæroidem, oblongatam scilicet, et sphæram.

(t) * *Est igitur gravitas.* Gravitas in loco A in Terram dicatur G, gravitas in loco Q, in Terram sit g, gravitas in loco Q, in sphæram radio P C, descriptam dicatur γ, gravitas in loco

centro C radio Q C descriptam, est ad gravitatem in loco A in sphæram centro C radio A C descriptam, in ratione diametrorum (per Prop. LXXII. Lib. I.) id est, ut 100 ad 101.



(u) Conjungantur jam hæ tres rationes, 126 ad 125, 126 ad $125\frac{1}{2}$, et 100 ad 101: et fiet gravitas in loco Q in Terram ad gravitatem in loco A in Terram, ut $126 \times 126 \times 100$ ad $125 \times 125\frac{1}{2} \times 101$, seu ut 501 ad 500.

Jam cùm (per Corol. 3. Prop. XCI. Lib. I.) gravitas in canalis crure utrovis A C c a vel Q C c q sit ut distantia locorum a centro Terræ; si crura illa superficiebus transversis et æquidistantibus distinguantur in partes totis proportionales, erunt pondera partium singularum in crure A C c a ad pondera partium totidem in crure altero, (x) ut magnitudines et gravitates acceleratrices conjunctim; id est, ut 101 ad 100 et 500 ad 501, hoc est, ut 505 ad 501. (y) Ac proinde si vis centrifuga partis cujusque in crure A C c a ex motu diurno oriunda, fuisset ad pondus partis ejusdem ut 4 ad 505, eo ut de pondere partis cujus-

A, in sphæroidem convolutione ellipseos APBQ, circa axem A B genitam dicatur V, ac tandem gravitas in loco A in sphæram radio A C descriptam sit Γ, erit (ex dem.).

$g : \gamma = 126 : 125$

$V : \Gamma = 125 : 126$ prætereà

$V : G = G : \Gamma$, ideóque inter V et Γ, hoc est, inter 125 et 126 sumpto medio termino proportionali erit

$V : G = G : \Gamma = 125 : 125\frac{1}{2} = 125\frac{1}{2} : 126.$

(u) * *Conjungantur jam hæ tres rationes*, scilicet

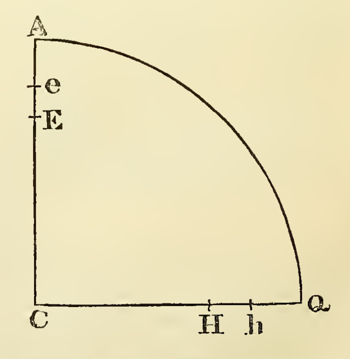
$g : \gamma = 126 : 125$

$\Gamma : G = 126 : 125\frac{1}{2}$

$\gamma : \Gamma = 100 : 101$ erit per compositionem rationum et ex æquo.

$g : G = 126 \times 126 \times 100 : 125 \times 125\frac{1}{2} \times 101$ vel $g : G = 1587600 : 1584437\frac{1}{2} = 501 : 500$ ideóque gravitas in loco Q, in Terram fiet ad gravitatem in loco A, in Terram ut 501 ad 500.

(x) 81. * *Ut magnitudines et gravitates.* Crura A C, Q C ità distinguantur superficiebus transversis et æquidistantibus ut crura illa æqualem contineant particularum E e, H h numerum, sintque singulæ particulæ in crure A C ad singulas particulas in crure C Q ut crus A C ad crus alterum C Q, sive ut 101 ad 100; quoniam gravitas in loco A est 500 et gravitas in loco Q, est 501 propter figuram sphæroidis et omnium particularum in cruribus A C et C Q similium et similiter positarum, gravitates acceleratrices erunt in eadem ratione; earum itaque pondera, (sive facta gravitatis acceleratricis per quantita-



tem materiæ) erunt in ratione compositâ 101 ad 100 et 500 ad 501 sive 505 ad 501, et totorum crurum A C et C Q gravitates erunt in eâ ratione 505 ad 501.

(y) 82. * *Ac proindè si vis centrifuga.* Ex motu diurno circà axem Q C, oritur vis centrifuga quâ fit ut partes quæ sunt in crure A C, versùs C, vi gravitatis attractæ, simul etiam vi centrifugâ repellantur, * illa autem vis centri-

que, in partes 505 diviso, partes quatuor detraheret; manerent pondera in utroque crure æqualia, et propterea fluidum consisteret in æquilibrio. Verùm vis centrifuga partis cujusque est ad pondus ejusdem ut 1 ad 289, hoc est, vis centrifuga, quæ deberet esse ponderis pars $\frac{4}{505}$, est tantùm pars $\frac{1}{289}$. (z) Et propterea dico, secundùm regulam auream, quod si vis

fuga in singulis punctis cruris A C est in ratione distantiæ eorum punctorum a centro C E (per Cor. 3. Prop. IV. Lib. I.) sed est etiam gravitas acceleratrix in ratione distantiæ a centro (per Cor. 3. Prop. XCI. Lib. I.) ergo si alicubi data sit ratio vis gravitatis ad vim centrifugam, eadem erit in omnibus punctis: sit ergo alicubi ut 505 ad 4 gravitas acceleratrix tota singularum et omnium partium cruris A C erit ad gravitatem residuam in singulis et omnibus partibus ejusdem cruris ut 505 ad 501, sed in eâdem ratione erat tota gravitas cruris A C (absque detractione vis centrifugæ ad gravitatem cruris C Q, quod cùm sit axis, vim centrifugam nullam habet) ergo residuum vis gravitatis in crure A C sublatâ vi centrifugâ in æquilibrio est cum gravitate cruris C Q.

(z) * *Et propterea dico secundùm regulam auream.* * Vix crediderim Newtonum ad applicandam regulam auream hic loci, alio nixum non fuisse fundamento quàm istâ confusâ notione, quod cùm excessus ponderum in longioribus cruribus sphæroideôn pendeant ex inæqualitate crurum, sive ab excessu unius cruris supra alterum, ideo rationes excessuum crurum majorum ad minora crura eædem esse debeant ac rationes excessuum ponderum ad pondera minorum crurum; quæ quidem ultimæ rationes (sive ipsis proximæ rationes excessuum ponderum ad pondera majorum crurum) æquantur rationibus virium centrifugarum ad gravitatem totam, quia illæ vires centrifugæ ex gravitate detractæ eos excessus ponderum accuratè compensant. Sed mihi videtur ipsum deduxisse hanc proportionem ex ipsâ serie ab ipso adhibitâ, et quam assequi sumus conati in nota (r) proximâ; quod ut concipiatur, resumantur quæ in eâ notâ dicta sunt, et ad ratiocinium Newtonianum applicentur, supponendo quæstionem esse de duobus sphæroidibus, quorum unus sit assumptitius ille cujus axes sunt ut 101 ad 100 alterum verò ipsa Terra, ita ut semi-diameter æquatoris quæ in sphæroide fictitio in notâ prædictâ per r designabatur, Terræ respectu designetur per ϱ, semi-axis verò P Q qui in serie assumptâ dictus fuerat b et applicatus fictitio sphæroidi, ubi verò ipsum semi-axem Terræ designat dicatur B. Assumptis ergo duobus primis terminis serierum, sed mutatis r in ϱ et b in B, ubi agetur de Terrâ, 1°. Gravitas in loco Q in sphæroidem erit ad gravitatem in eodem loco in sphæram radio b descriptam erit ut $\frac{6\,b\,r - 4\,b^2}{3\,r}$ ad $\frac{2\,b}{3}$ et si agatur de Terrâ, gravitas in loco Q in Terram erit ad gravitatem in eodem loco in sphæram quæ radio B describetur ut $\frac{6\,B\,\varrho - 4\,B^2}{3\,\varrho}$ ad $\frac{2\,B}{3}$; ideóque rationes gravitatis in loco Q in sphæroidem vel Terram ad gravitatem in sphæras radiis b et B descriptas erunt ut $\frac{3\,r - 2\,b}{r}$ ad $\frac{3\,\varrho - 2\,B}{\varrho}$. 2°. Gravitas in sphæras quarum sunt radii b et B est ad gravitatem in sphæras radiis A C descriptas ut radius b ad r, et B ad ϱ, ideóque rationes gravitatis in sphæras radiis P Q descriptas ad gravitates in sphæras radiis A C descriptas erunt ut $\frac{b}{r}$ ad $\frac{B}{\varrho}$.

3°. Gravitas in sphæras radiis A C descriptas est ad gravitatem in ellipsoides convolutione ellipsium A P B Q circa A C descriptas ut $\frac{2\,r}{3}$ ad $\frac{6\,r\,b - 4\,r\,r}{3\,b}$, si agatur de fictitio sphæroide, aut ut $\frac{2\,\varrho}{3}$ ad $\frac{6\,\varrho\,B - 4\,\varrho\,\varrho}{3\,B}$ ubi agitur de Terrâ: et quoniam attractio sphæroidis fictitii aut Terræ est media proportionalis inter has attractiones, erit gravitas in sphæram ad gravitatem in A in sphæroidem, ut $\sqrt{\frac{2\,r}{3}}$ ad $\sqrt{\frac{6\,r\,b - 4\,r^2}{3\,b}}$ et gravitas in sphæram ad gravitatem quæ est in A Terram ipsam ut $\sqrt{\frac{2\,\varrho}{3}}$ ad $\sqrt{\frac{6\,\varrho\,B - 4\,\varrho\,\varrho}{3\,B}}$, ideóque rationes gravitatum in sphæras ad gravitates in sphæroidem et in Terram erunt ut $\sqrt{\frac{b}{3\,b - 2\,r}}$ ad $\sqrt{\frac{B}{3\,B - 2\,\varrho}}$ reductis fractionibus ad minimos terminos.

Hinc tandem compositis omnibus rationibus, rationes gravitatum, in punctis Q tam sphæroideos fictitii quàm Terræ, ad gravitates in punctis A eorum erunt ut $\frac{3\,r - 2\,b}{\varrho} \times \frac{b}{r} \times \sqrt{\frac{b}{3\,b - 2\,r}}$ ad $\frac{3\,\varrho - 2\,B}{\varrho} \times \frac{B}{\varrho} \sqrt{\frac{B}{3\,B - 2\,\varrho}}$

Rursus in fictitio sphæroide ratio magnitudinis crurum exprimitur per $\frac{b}{r}$ et in Terrâ per $\frac{B}{\varrho}$; per quas quantitates ducantur rationes gravitatis, et habebuntur rationes ponderum quæ

centrifuga $\frac{4}{505}$ faciat ut altitudo aquæ in crure A C c a superet altitudinem aquæ in crure Q C c q parte centesimâ totius altitudinis: vis centrifuga $\frac{1}{289}$ faciet ut excessus altitudinis in crure A C c a sit altitudinis in crure altero Q C c q pars tantum $\frac{1}{229}$. Est igitur diameter Terræ secundùm æquatorem ad ipsius diametrum per polos ut 230 ad 229. Ideóque cùm Terræ semi-diameter mediocris, juxtà mensuram Picarti, sit pedum Parisiensium 19615800, seu milliarium 3923,16 (posito quod milliare sit mensura pedum 5000) Terra altior erit ad æquatorem quàm ad polos excessu pedum 85472, seu milliarium $17\frac{1}{10}$. Et altitudo ejus ad æquatorem erit 19658600 pedum circiter, et ad polos 19573000 pedum.

([a]) Si planeta major sit vel minor quàm Terra manente ejus densitate ac tempore periodico revolutionis diurnæ, manebit proportio vis centri-

ideo erunt ut $\frac{3\,r - 2\,b}{r} \times \frac{b^2}{r^2} \surd \frac{b}{3\,b - 2\,r}$ ad $\frac{3\,\varrho - 2\,B}{\varrho} \times \frac{B^2}{\varrho^2} \surd \frac{B}{3\,B - 2\,\varrho}$; inde cùm differentia quantitatum r et b, ϱ et B non sit magna, numeratores $3\,r - 2\,b$ aut $3\,\varrho - 2\,B$; pro r ac ϱ sumi possunt, et denominatores $3\,b - 2\,r$, $3\,B - 2\,\varrho$ pro b et B, ideóque rationes ponderum fiunt ut $\frac{r}{r} \times \frac{b^2}{r^2} \times \surd \frac{b}{b}$, ad $\frac{\varrho}{\varrho} \times \frac{B^2}{\varrho^2} \times \surd \frac{B}{B}$ sive ut $\frac{b^2}{r^2}$ ad $\frac{B^2}{\varrho^2}$. Vel, invertendo, rationes ponderum in crure C A ad pondus in crure C Q sunt in sphæroide fictitio et in Terrâ ut $\frac{r^2}{b^2}$ ad $\frac{\varrho^2}{B^2}$; quod si differentia diametri r et axis fictitii b dicatur f; differentia diametri ϱ et axis Terræ B dicatur g hoc modo exprimentur rationes ponderum crurum C A et C Q, $\frac{b^2 + 2\,b\,f + f\,f}{b\,b}$ et $\frac{B^2 + 2\,B\,g + g\,g}{B^2}$ erunt ergo rationes excessûs ponderis in crure A C ad pondus totum cruris C Q ut $\frac{+ 2\,b\,f + f\,f}{b\,b}$ ad $\frac{+ 2\,B\,g + g\,g}{B^2}$ sive deletis f f et g g quæ evanescunt respectu $2\,r\,f$ et $2\,\varrho\,g$; cùm differentiæ inter diametros et axes minimæ supponantur respectu earum diametrorum; erunt illæ rationes ut $\frac{2\,b\,f}{b^2}$ ad $\frac{2\,B\,g}{B^2}$, sive ut $\frac{2\,f}{b}$ ad $\frac{2\,g}{B}$, sed rationes excessûs ponderum ad pondus cruris C Q sive ad pondus cruris A C (quod perinde est ob magnitudinem crurum et parvitatem excessûs) æquales esse debent (ut jam dictum est) rationibus virium centrifugarum ad gravitatem ipsam: quare, rationes illæ virium centrifugarum ad gravitatem debent esse ut $\frac{2\,f}{b}$ ad $\frac{2\,g}{B}$, sive ut rationes excessuum diametri æquatoris supra axes ad axes, quæ quidem est proportio quam Newtonus assumit, cujus fundamentum ita deprehensum est: hinc vis centrifuga quæ est $\frac{4}{505}$ ponderis totius, est ad vim centrifugam quæ est $\frac{1}{289}$ ponderis totius ut $\frac{2\,f}{b}$ ad $\frac{2\,g}{B}$ sive ut $\frac{f}{b}$ ad $\frac{g}{B}$, sed dum b est 100 est f = 1, ergo est $\frac{g}{B} = \frac{\frac{1}{100} \times \frac{1}{289}}{\frac{4}{505}}$ sive $\frac{505}{115600} = \frac{1}{229}$.

([a]) 86. *Si planeta major sit vel minor quàm Terra manente ejus densitate ac tempore periodico revolutionis diurnæ, manet proportio vis centrifugæ ad gravitatem.* * Manere rationem vis centrifugæ ad gravitatem liquet ex notâ 85. sive ex Cor. 2. Prop. IV. Lib. I.; nam manente tempore periodico crescit vis centrifuga in ratione distantiarum, sed crescit etiam gravitas acceleratrix in ratione distantiarum (Cor. 3. Prop. XCI. Lib. I.) ergo in eâdem ratione crescunt vis centrifuga et gravitas, ideóque in eâdem ratione manent ac prius.

Propterea manebit proportio diametri inter polos ad diametrum secundùm æquatorem: quippe, per notam præcedentem z, ratio vis centrifugæ ad gravitatem est ut ratio excessûs diametri æquatoris super longitudinem axeos; manente ergo priori ratione per hypothesim manebit et ista.

Si acceleretur vel retardetur motus diurnus: ut tempus periodicum fit majus vel minus, vis centrifuga crescit reciprocè ut quadrata temporum periodicorum manentibus radiis (Cor. 2 Prop. IV. Lib. I.) inde manentibus gravitatibus et diametris majoribus vel minoribus, liquet (ex notâ illâ z.) numeratores fractionum $\frac{f}{b}$ et $\frac{g}{B}$, nempe excessûs diametrorum, crescere secundùm rationem virium centrifugarum, hoc est, ut quadrata

fugæ ad gravitatem, et propterea manebit etiam proportio diametri inter polos ad diametrum secundùm æquatorem. At si motus diurnus in ratione quâcunque acceleretur vel retardetur, augebitur vel minuetur vis centrifuga in duplicatâ illâ ratione, et propterea differentia diametrorum augebitur vel minuetur in eâdem duplicatâ ratione quamproximè. Et si densitas planetæ augeatur vel minuatur in ratione quâvis, gravitas etiam in ipsum tendens augebitur vel minuetur in eâdem ratione, et differentia diametrorum vicissim minuetur in ratione gravitatis auctæ, vel augebitur in ratione gravitatis diminutæ. Unde cùm Terra respectu fixarum revolvatur horis 23. 56′, Jupiter autem horis 9. 56′, sintque temporum quadrata ut 29 ad 5, (b) et revolventium densitates ut 400 ad $94\frac{1}{2}$: differentia diametrorum Jovis erit ad ipsius diametrum minorem ut $\frac{29}{5} \times \frac{400}{94\frac{1}{2}} \times \frac{1}{229}$ ad 1, seu 1 ad $9\frac{1}{3}$ quamproximè. Est igitur diameter Jovis ab oriente in occidentem ducta, ad ejus diametrum inter polos ut $10\frac{1}{3}$ ad $9\frac{1}{3}$ quamproximè. Unde cùm ejus diameter major sit 37″, ejus diameter minor quæ polis interjacet, erit 33″. 25‴. (c) Pro luce erraticâ addantur 3″. circiter, et hujus planetæ diametri apparentes evadent 40″ et 36″. 25‴: quæ sunt ad invicem ut $11\frac{1}{6}$ ad $10\frac{1}{6}$ quamproximè. Hoc ita se habet ex hypothesi quod corpus Jovis sit uniformiter densum. (d) At si

temporum periodicorum inversè, aut ut quadrata celeritatum directè: hinc ait Newtonus: *differentia diametrorum* (quæ differentiæ exprimuntur per f et g) *augebitur vel minuetur in eâ ratione duplicatâ celeritatum quamproximè.*

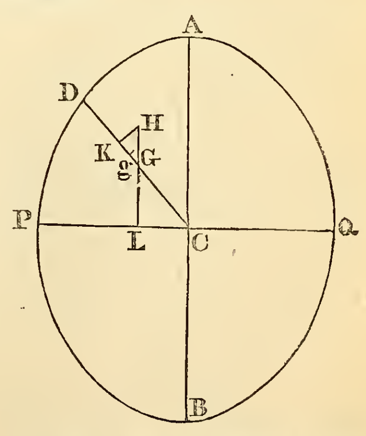
Et si densitas planetæ augeatur, gravitas augebitur in eâdem ratione: hinc ratio vis centrifugæ manente radio et celeritate manentis, ad gravitatem minuetur; ideóque minuetur ratio differentiæ diametrorum ad ipsas diametros.

Et in genere dicatur radius Terræ R, ejus densitas D, tempus periodicum T, in altero planeta litteris iisdem sed minoribus eadem exprimantur, erit $\frac{\frac{R}{TT}}{DR}$ ad $\frac{\frac{r}{tt}}{dr}$ sicut $\frac{1}{229}$ ad differentiam inter diametros æquatoris et axis planetæ, quæ itaque erit $\frac{1}{229} \times \frac{D \times TT}{d \times tt}$.

(b) * *Et revolventium densitates.* (Prop. VIII. Lib. hujus.).

(c) * *Pro luce erraticâ.* (55).

(d) * *At si corpus ejus.* Ille enim excessus densitatis in plano æquatoris facit ut ibi major sit gravitas, ac proindè ibi minor requiratur altitudo ad compensandam vim centrifugam, undè minuitur diametrorum differentia (ut patet ex notis præced.).



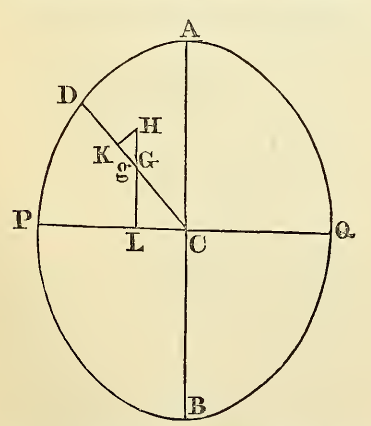
84. Lubet hic referre formulam quâ, in hypothesi gravitatis proportionalis cuilibet dignitati distantiarum a centro, simulque quod ejus actio ad id centrum dirigatur, diametrorum proportio

corpus ejus sit densius versùs planum æquatoris quàm versùs polos, diametri ejus possunt esse ad invicem ut 12 ad 11, vel 13 ad 12, vel forte 14 ad 13. Et Cassinus quidem anno 1691 observavit, quod Jovis diameter ab oriente in occidentem porrecta diametrum alteram superaret parte sui circiter decimâ quintâ: Poundus autem noster telescopio pedum 123 longitudinis et optimo micrometro, diametros Jovis anno 1719 mensuravit ut sequitur.

Tempora.	*Diam. max.*	*Diam. min.*	*Diametri ad invicem.*
dies hor.	*part.*	*part.*	
Jan. 28 6	13,40	12,28	*ut* 12 *ad* 11
Mar. 6 7	13,12	12,20	$13\frac{3}{4}$ $12\frac{3}{4}$
Mar. 9 7	13,12	12,08	$12\frac{2}{3}$ $11\frac{2}{3}$
Apr. 9 0	12,32	11,48	$14\frac{1}{2}$ $13\frac{1}{2}$

Congruit igitur theoria cum phænomenis. Nam planetæ magis incalescunt ad lucem Solis versùs æquatores suos, et propterea paulo magis ibi decoquuntur quàm versùs polos.

inveniri potest. Sit semi-diameter secundùm æquatorem A C = a, radius variabilis C D = r sinus anguli D C P = h, posito sinu toto = 1. Sit gravitas in loco A = p vis centrifuga in



eodem loco = f, ponaturque gravitas versùs centrum C tendens dignitati cuilibet n distantiarum a centro proportionalis, erit gravitas in A ad gravitatem in D ut a^n ad r^n, ideóque gravitas in D $= \frac{p r^n}{a^n}$. Quoniam vires centrifugæ in locis A et G, sunt in ratione distantiarum C A, L G, erit vis centrifuga in G $= \frac{f \times L G}{C A}$; sed L G : C G = h : 1 ideóque L G = C G $\times$ h, unde vis centrifuga in G, fit $= \frac{f h \times C G}{C A}$; sit autem vis illa = G H. Quoniam vis centrifuga quæ agit secundùm directionem G H, non minuit gravitatem versùs centrum C, nisi in quantùm agit secundùm directionem D C, resolvatur vis centrifuga G H in vires laterales K H, G K, est autem G H : G K vel 1 : h $= \frac{f h \times C G}{C A}$: G K, quarè G K $= \frac{f h h \times r}{a}$; ideóque pondus cylindruli G g $= \frac{p r^n d r}{a^n} - \frac{f h h r d r}{a}$. Sumptisque fluentibus, pondus totum fluidi in crure D C $= \frac{p r^{n+1}}{(n+1) a^n} - \frac{f h h \times r r}{2 a}$. Simili argumento, quia gravitas in A = p, erit gravitas in alio quolibet loco cruris C A $= \frac{p x^n}{a^n}$, si nempè distantia a centro dicatur x; vis autem centrifuga $= \frac{f x}{a}$, et pondus cylindruli manebit $\frac{p x^n d x}{a^n} - \frac{f x d x}{a}$ cujus fluens $\frac{p x^{n+1}}{(n+1) a^n} - \frac{f x^2}{2 a}$ undè pondus to-

Quinetiam gravitatem per rotationem diurnam Terræ nostræ minui sub æquatore, atque ideo Terram ibi altius surgere quàm ad polos (si materia ejus uniformiter densa sit) patebit per experimenta pendulorum quæ recensentur in Propositione sequente.

tum fluidi in crure C A, est $\frac{p\,a^{n+1}}{n+1)\,a^n} - \frac{f\,a^2}{2\,a}$ jam verò quia fluidum in utroque crure C A, C D consistere debet in æquilibrio, oportet ut pondera sint æqualia, ac proindè, $\frac{p\,a^{n+1}}{(n+1)\,a^n} - \frac{f\,a}{2} = \frac{p\,r^{n+1}}{(2+1)\,a^n} - \frac{f\,h\,h\,r\,r}{2\,a}$, undè eruitur $2\,p\,r^{n+1} - (n+1)\,f\,h\,h\,a^{n-1}\,r\,r = (2\,p - n\,f - f)\,a^{n+1}$. Ope hujus æquationis facilè invenitur diametrorum proportio; si enim fiat $h = o$, radius r abit in C P, habeturque $2\,p\,r^{n+1} = (2\,p - n\,f - f)\,a^{n+1}$, hoc est, $C\,A : C\,P = (2\,p)^{\frac{1}{n+1}} : (2\,p - n\,f - f)^{\frac{1}{n+1}}$.

In hypothesi gravitatis uniformis, fit $n = o$, ideóque $C\,A : C\,P = 2\,p : 2\,p - f$. Quoniam verò in Terrâ gravitas est ad vim centrifugam ut 289 ad 1, erit C A : C P = 578 : 577, prout Hugenius invenit. At in hypothesi gravitatis in ratione duplicatâ distantiarum a centro decrescentis, erit $n = -2$, ideóque $C\,A : C\,P = 2\,p + f : 2\,p = 579 : 578$.

* 85. Verùm hæ hypotheses in hâc formulâ inveniendâ assumptæ cum rei naturâ et Newtoniano systemate neutiquam quadrant, ideóque locum habere nequeunt: primùm enim gravitatem ad centrum Terræ dirigi verum non est si Terra sit sphærois qualiscumque, quippe ex ipso facto constat gravitatis directionem esse perpendicularem superficiei aquarum, sive esse perpendicularem curvæ quam meridianus quilibet affectat; sed perpendiculares ad curvam a circulo diversam ad ejus curvæ centrum neutiquam tendunt nisi in solâ axium extremitate.

2°. Gravitatis quantitas in variis punctis superficiei solidi ratione curvæ alicujus geniti non sequitur rationem ullius dignitatis distantiarum a centro, sed aliam omnino legem juxta formam solidi, hoc est, juxta naturam curvæ illius quam meridianus affectat, et locum in quo corpusculum attrahendum locatur, ut satis liquet ex eo artificio quo Newtonus usus est ad determinandam rationem gravitatis in puncto A ad gravitatem in puncto Q, unde gravitatis in variis locis proportio non per dignitatem aliquam distantiarum, sed per rationes serierum, quales eas in notâ (r) invenimus, sunt exhibendæ; quamvis ergo verum sit in systemate Newtoniano gravitatem decrescere ut quadrata distantiarum a quocumque corpore collecto in centro suæ gravitatis quasi in uno puncto, idem verum non erit si id corpus figurâ sphæricâ non donetur, et corpusculum attrahendum juxta diversas partes ejus solidi collocetur; hinc ubi in formandâ generali formulâ assumitur quod gravitas in A sit ad gravitatem in D ut a^n ad r^n ideóque gravitatem in D esse $\frac{p\,r^n}{a^n}$, id omninò adversus theoriam gravitatis Newtonianam deducitur; quod autem hæc formula non multum a vero aberret, oritur ex eo quod reverâ figura Terræ a sphærâ perparùm discrepet.

86. Vis centripeta vel centrifuga corporis circulum describentis est in ratione directâ radii et duplicatâ inversâ temporis periodici (Cor. 2. Prop. IV. Lib. I.). Quarè si distantia planetæ a centro Solis vel distantia satellitis a centro planetæ primarii dicatur D, tempus periodicum T, radius ipsius planetæ circà quem motu diurno revolvitur R, gravitas versùs centrum revolutionis erit $\frac{D}{T\,T}$; si autem hæc gravitas crescat in ratione duplicatâ inversâ distantiarum, erit gravitas planetæ in eo in quo nunc versari supponitur loco, ad illius gravitatem, si positus fingeretur in superficie corporis centralis circà quod revolvitur, ut R R ad D D, ideóque foret gravitas planetæ in superficie hujus corporis ut $\frac{D^3}{R\,R\,T\,T}$. Jam verò cùm vis centrifuga planetæ positi in æquatore corporis circà quod revolvitur, sit in ratione directâ radii hujus planetæ et inversâ duplicatâ temporis revolutionis circà axem, si tempus periodicum circà axem dicatur t vis centrifuga F, erit $F = \frac{R}{t\,t}$ undè si vis gravitatis in superficie corporis centralis dicatur P, erit $P : F = \frac{D^3}{R\,R\,T\,T} : \frac{R}{t\,t} = D^3 \times t\,t : R^3 \times T\,T$.

90. Distantia D, quarti satellitis Jovialis a centro planetæ primarii sit 26.63 semid. Jovis, prout a Newtono in fine Phænomeni II. determinantur, et tempus periodicum T = 16 dieb. 18^h. 5′. 7″. prout a Cassino in novis Elementis Astron. traduntur. Semi-diameter Jovis R = 1, tempus periodicum Jovis circà axem t = 9^h. 55′. 52″. posito in formulâ generali (87) $n = -2$, habetur $C\,A : C\,P = 2\,p + f : 2\,p$, vel $C\,A - C\,P : C\,P = f : 2\,p$, aut $C\,A - C\,P : C\,P = R^3\,T\,T : 2\,D^3\,t\,t$, erit itaque in hâc hypothesi gravitatis pro Jove $C\,A - C\,P : C\,P = 1 : \frac{2\,D^3 \times t\,t}{T\,T} = 1 : 11\frac{1}{2}$, quæ differentia inter semi-diametrum secundùm æquatorem Jovis et semi-diametrum inter polos quamproximè æqualis est differentiæ quam Newtonus ex suâ methodo derivavit.

Sit mediocris distantia Lunæ a Terrâ D = 60 semid. terrestr. tempus periodicum Lunæ = 27 dieb. 7 hor. 43′. semid. Terræ = 1, tempus revolutionis Terræ circà axem = 23 hor. 56′. 4″. erit gravitas ad vim centrifugam ut 288 ad 1. Undè pro Terrâ foret C A — C P : C P = 1 : 576: Terra itaque minùs compressa foret quàm a Newtono definitum est, magis tamen quàm determinatum est ab Hugenio, verùm ob actionem Solis in Lunam, tempus ejus periodicum non respondet accuratè vi centrifugæ Terræ; alias correctiones hujus calculi invenies Trans. Philos. Num. 438. quibus ad Newtonianum proportionem magis accuratè revocatur. De hâc quæstione nobilissimâ procul dubio legantur quæ de Telluris figurâ dederunt clarissimi viri D. de Mairan in Monumentis Paris. an. 1720. D. de Maupertuis ibid. an. 1733. 1734. 1735. 1736. et in duobus opusculis quorum unum de Figuris Corporum Cœlestium, alterum de Figurâ Telluris inscribitur. Præclara quoque de eodem argumento ediderunt D. Clairaut in Monumentis Parisiensibus an. 1735. et in Transactionibus Philosophicis Num. 445. et 449. D. Bouguer ibid. an. 1736. D. Eustachius Manfredius ibid. an. 1734. et D. Stirling in Transactionibus Anglicis an. 1735.

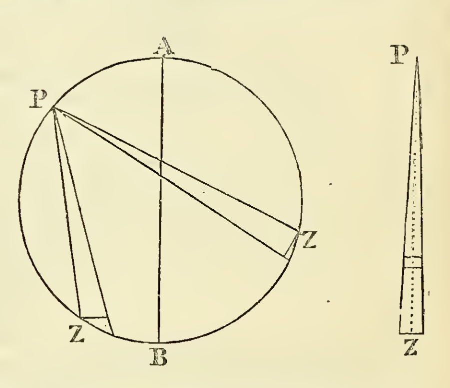
* Viam sternet ad determinandam figuram Terræ ortam ex necessitate æquilibrii vis centrifugæ et vis gravitatis singularum ejus partium, si generalissimè solvatur Probl. XLV. (Prop. XCI. Lib. I.) Newtoni, nempe, si inveniatur attractio corpusculi non solùm *siti in axe* solidi rotundi, sed siti ubivis in ejus superficie, cujus Problematis analysim hic in compendium tradēmus.

PROBLEMA.

Datâ æquatione curvæ cujuscumque quæ circa axim revolvendo solidum describat, invenire attractionem corpusculi siti in quocumque puncto superficiei ejus solidi.

Constructio. Fingatur planum tangens id solidum in P, et super eo plano, e puncto P ut centro descripta intelligatur sphæra radio infinitè parvo, dividatur tota superficies hemisphærii versus solidum conversi in portiunculas æquales; et concipiantur pyramides (quarum vertices sint in centro sphæræ) illis portiunculis insistentes et inde ad solidi ipsius oppositam superficiem continuatæ, puta in Z, Z, terminentur illæ pyramides in eo solido per bases parallelas basibus ipsarum sphæræ circumscriptis; corpusculi in puncto P siti attractio ab omnibus illis pyramidibus, concipi poterit ut attractio a toto solido; exiguæ enim ejus solidi portiones, quæ in extremitate unius cujusque pyramidis negliguntur, sunt ubique totius pyramidis respectu infinitè parvæ.

Attractio autem corpusculi P a singulâ pyramide erit ubique ut axis P Z ejus pyramidis; nam ducantur ubivis in axe, duo puncta infinitè proxima, ducanturque per ea superficies duæ, parallelæ basi pyramidis, sive, quod idem est, parallelæ superficiei sphæræ circa P descriptæ, exiguum solidum inter eas superficies contentum crescet ut illæ superficies, sive ut quadratum portionis axeos abscissæ, sed cùm attractio singulæ particulæ decrescat ut quadratum distantiæ a puncto P, sive decrescat ut quadratum ab-



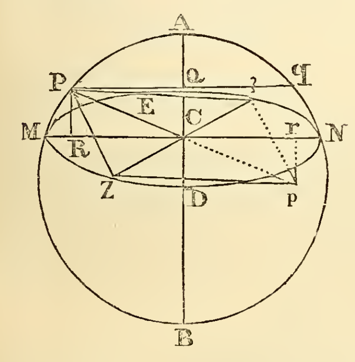
scissæ; ideóque crescat particularum quantitas ut decrescit singulæ particulæ vis, evenit ut attractio ejus solidi ubivis in axe P Z sumpti eadem semper sit; æqualis erit v. gr. attractioni solidi cujus basis foret portio superficiei sphæræ intra pyramidem contentæ, et altitudo illa quam minima axeos P Z portio assumpta. Hinc attractio totius pyramidis erit attractio ejus parvi solidi, toties repetita quot sunt axeos P Z portiunculæ; cùm itaque portio superficiei sphæræ intra pyramides contenta, sit ubivis eadem, ex const., attractiones singularum pyramidum erunt ut numerus particularum æqualium in singulo axe P Z assumendarum, sive quod idem est, ut singuli axes P Z.

His positis: sit M D N E unus e circulis genitis in solido proposito per revolutionem ordinatæ C M circa axim A B. Dico quod attractio puncti P ab omnibus pyramidibus quarum axes in circumferentiâ circuli M D N E terminantur, (quæ est ut summa omnium axium P Z ad eam circumferentiam terminatorum) est ut linea P C a puncto P ad centrum ejus circuli C ductæ, multiplicata per numerum axium P Z ad circumferentiam M D N E pervenientium, (missis nempe singularum P Z longitudinibus).

Assumatur enim in circumferentiâ M D N E punctum quodlibet Z, et ductâ per centrum C lineâ Z C ζ, ducatur P ζ, ex demonstratis attractiones pyramidum ad Z et ζ pervenientium erunt ut P Z ad P ζ; ducatur ex P in circulum M D N E perpendiculum P R et per R et centrum C ducatur diameter M R N, sumptaque N r = M R demittatur perpendiculum r p, sitque r p = R P, linea M N, P R et r p sunt in

eodem plano (per 6. XI. Elem.) ideóque linea P p secabit lineam M N, et cùm triangula P R C, p r C sint æqualia propter r p = R P, angulos rectos, et angulos per verticem oppositos, sitque N r = M R linea P p transibit per centrum C; erit etiam linea P p in plano trianguli Z P ζ cùm habeat puncta P et C in eo plano; inde si jungantur lineæ Z p, ζ p, tota figura P Z p ζ erit in eodem plano, et propter æquales P C, p C, Z C, C ζ et angulos interceptos per verticem oppositos lineæ P Z, p ζ erunt æquales, ut et lineæ P ζ, p Z, hinc figura P Z p ζ est parallelogramma cujus P p sive 2 P C est diagonalis; quare cùm pyramides trahant secundum directiones P Z, P ζ, viribus quæ sunt ut P Z ad P ζ, vis indè resultans dirigetur secundùm diagonalem P p, sive 2 P C, eique erit proportionalis.

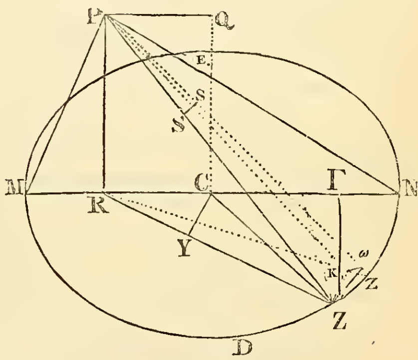
Quod cùm ita sit de omnibus punctis Z in circumferentiâ M D N E sumendis, attractio puncti P ab omnibus paribus pyramidum in circumferentiâ ejus circuli terminatarum, erit ut



2 P C multiplicata per numerum parium earum pyramidum; sive erit ut P C ipsa multiplicata per numerum omnium P Z ad circumferentiam M D N E terminatarum.

Denique ut obtineatur numerus earum linearum P Z ad circumferentiam quamlibet M D N E terminatarum, observandum est, eas lineas egredientes ab hemisphærio circa P descripto, in ejus superficie signare lineam curvam (duplicis quidem curvaturæ quando P non imminet perpendiculariter centro C, isto enim in casu signarent circulum) et propter æqualitatem distantiæ concursus eorum axium cum superficie hemisphærii (ex constructione) numerus earum linearum erit ut longitudo ejus lineæ curvæ in superficie hemisphærii signatæ; huc ergo redit tota quæstio, ut, dato puncto P ejusque ordinata P Q ad axem solidi rotundi, sumptâque ut libet abscissâ A C, ejus ordinata C M, et circulo M D N E ejus ordinatæ convolutione descripto, inveniatur longitudo curvæ descriptæ in superficie sphæræ (cujus radius P S ad lubitum assumitur) per intersectionem coni inclinati cujus vertex est P, basis verò M D N E.

Ut longitudo seu rectificatio ejus curvæ obtineatur, ducantur a puncto P ad duo puncta proxima peripheriæ M D N E lineæ P Z, P z; abscissa circuli secundum diametrum a puncto N remotiori a puncto P sumatur, sintque N Γ et Γ Z abscissa et ordinata circuli respondentes puncto Z, dicatur N Γ, x, Γ Z, y; Z z, d v; tota diameter M N, f, duplum ordinatæ P Q sit g, denique si centro P radio P S describatur arcus S s, ille arcus S s erit elementum curvæ quæsitæ respondens elemento circuli d v. Ex P, ut prius, demittatur in circulum M D N E perpendiculum P R, erit R C = P Q = $\frac{g}{2}$, ex R ducantur lineæ R Z et R z, et centro C radio R Z describatur arcus Z K ut sit R K = R Z, ex centro C ducatur ad Z radius C Z, et perpendiculum C Y in lineam R Z, dico 1°. quod triangulus R C Y est similis triangulo R Z Γ, ob angulum in R communem, et rectos Γ et Y, unde est R Z ad Z Γ (y) sicut R C $\left(\frac{g}{2}\right)$ ad C Y



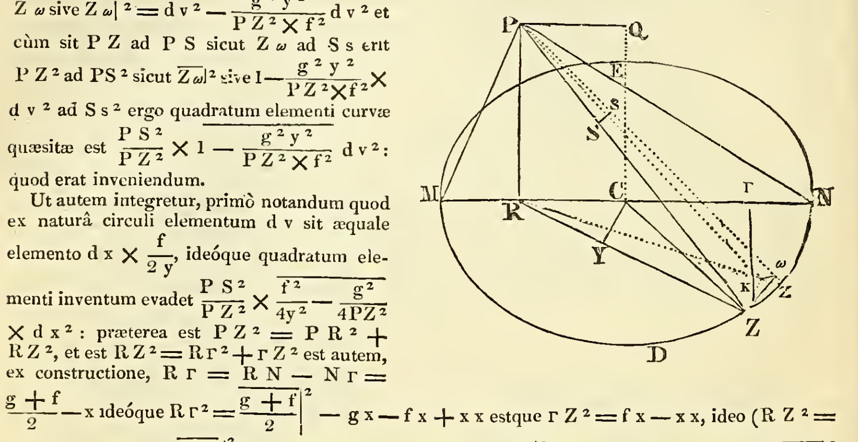
quod erit ergo $\frac{g y}{2 R Z}$; 2°. triangulus C Z Y est similis triangulo Z K z; nam angulus R Z K est rectus per constr. quoniam triangulus R Z K est isosceles, angulus verò C Z z est etiam rectus per naturam circuli, unde dempto communi C Z K manent æquales anguli C Z Y et K Z z, præterea anguli in Y et K sunt recti: erit ergo radius C Z $\left(\frac{f}{2}\right)$ ad C Y $\left(\frac{g y}{2 R Z}\right)$ sicut Z z (d v) ad K Z quod erit ergo $\frac{g y}{R Z \times f}$ d v.

3°. Ducatur ex P linea P K, ea erit æqualis lineæ P Z, nam trianguli P R Z, P R K erunt æquales ob communem P R, æquales per constr. R Z et R K, et angulos in R rectos (per 4. XI. Elem.); hinc si radio P K, centro P describatur arcus K ω, erit P ω = P Z et arcus Z ω similis erit elemento quæsito S s, et triangulus Z z ω rectangulus erit in ω.

Porro, triangulus K ω z erit similis triangulo P R z ob angulum communem in z, et rectos in

R et ω, sive similis erit triangulo P R Z, ideóque fiat ut P Z ad R Z ita K Z sive $\frac{g\,y}{RZ \times f}$ d v ad ω z quod erit itaque $\frac{g\,y}{PZ \times f}$ d v.

4°. In triangulo Z z ω, rectangulo in ω cùm Z z sit d v et ω z sit $\frac{g\,y}{PZ \times f}$ d v erit quadratum Z ω sive $\overline{Z\omega}|^2 = dv^2 - \frac{g^2 y^2}{PZ^2 \times f^2} dv^2$ et cùm sit P Z ad P S sicut Z ω ad S s erit PZ^2 ad PS^2 sicut $\overline{Z\omega}|^2$ sive $1 - \frac{g^2 y^2}{PZ^2 \times f^2} \times dv^2$ ad Ss^2 ergo quadratum elementi curvæ quæsitæ est $\frac{PS^2}{PZ^2} \times \overline{1 - \frac{g^2 y^2}{PZ^2 \times f^2}}\, dv^2$: quod erat inveniendum.



Ut autem integretur, primò notandum quod ex naturâ circuli elementum d v sit æquale elemento $dx \times \frac{f}{2y}$, ideóque quadratum elementi inventum evadet $\frac{PS^2}{PZ^2} \times \overline{\frac{f^2}{4y^2} - \frac{g^2}{4PZ^2}} \times dx^2$: præterea est $PZ^2 = PR^2 + RZ^2$, et est $RZ^2 = Rr^2 + rZ^2$ est autem, ex constructione, $Rr = RN - Nr = \frac{g+f}{2} - x$ ideóque $Rr^2 = \overline{\frac{g+f}{2}}\Big|^2 - gx - fx + xx$ estque $rZ^2 = fx - xx$, ideo ($RZ^2 = Rr^2 + rZ^2$) $= \overline{\frac{g+f}{2}}\Big|^2 - gx$ et $PZ^2 = PR^2 + \overline{\frac{g+f}{2}}\Big|^2 - gx$; sed est $PR^2 + \overline{\frac{g+f}{2}}\Big|^2 = PR^2 + RN^2 = PN^2$, ergo $PZ^2 = PN^2 - gx$, et si ad compendium tertia proportionalis ad 2 P Q (sive g) et P N dicatur l ut sit $PN^2 = gl$ fiet $PZ^2 = gl - gx$ sicque, quadratum elementi quæsiti evadet $\frac{PS^2}{gl - gx} \times \left(\frac{f^2}{4y^2} - \frac{g}{4 \times \overline{l - x}}\right) \times dx^2$, sive cùm y^2 fit $fx - xx$, erit illud quadratum $\frac{PS^2}{4g \times \overline{l-x}} dx^2 \times \left(\frac{f^2}{x \times \overline{f-x}} - \frac{g}{\overline{l-x}}.\right)$

Dividatur autem f^2 per $x \times f - x$ fit $\frac{f}{x} + 1 + \frac{x}{f} + \frac{x^2}{f^2} + \frac{x^3}{f^3}$, &c.

Dividatur g per l — x fit - - - $\frac{g}{l} - \frac{gx}{l^2} - \frac{gx^2}{l^3} + \frac{gx^3}{l^4}$, &c.

Differentia serierum fiet $\frac{f}{x} + \frac{l-g}{l} + \frac{l^2 - fg}{l^2 f} x + \frac{l^3 - f^2 g}{l^3 f^2} x^2 + \frac{l^4 - f^3 g}{l^4 f^3} x^3$, &c.

Divid. ea differ. per l — x fit $\frac{f}{lx} + \frac{l+f-g}{l^2} + \frac{l^2+lf+f^2-2fg}{l^3 f} x + \frac{l^3+l^2f+lf^2+f^3-3fg}{l^4 f^2} x^2$, &c.

Unde quadratum elementi S s

st $dx^2 \times \frac{PS^2 \times f}{4gl} \times \left(\frac{1}{x} + \frac{l+f-g}{lf} + \frac{l^2+lf+f^2-2fg}{l^2 f^2} x + \frac{l^3+l^2f+lf^2+f^3-3fg}{l^3 f^3} x^2,\right)$ &c.

quæ series ad lubitum continuari potest.

Exprimatur autem curvæ quæsitæ longitudo per hanc seriem cujus coëfficientes sunt indeterminati $Ax^{\frac{1}{2}} + Bx^{\frac{3}{2}} + Cx^{\frac{5}{2}} + Dx^{\frac{7}{2}} + Ex^{\frac{9}{2}} +$, &c.

ejus fluxio erit $dx \times (\frac{1}{2} Ax^{-\frac{1}{2}} + \frac{2}{3} Bx^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{2} Cx^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{2} Dx^{\frac{5}{2}} + \frac{9}{2} Ex^{\frac{7}{2}} +$, &c.) cujus quadratum erit

$$dx^2 \times (\tfrac{1}{4} A^2 x^{-1} + \tfrac{3}{2} AB + \tfrac{5}{2} ACx + \tfrac{7}{2} ADx^2 + \tfrac{9}{2} AEx^3 + \tfrac{11}{2} AFx^4,$$
$$+ \tfrac{9}{4} B^2 x + \tfrac{15}{2} BCx^2 + \tfrac{21}{2} BDx^3 + \tfrac{27}{2} BEx^4, \text{ \&c.}$$
$$+ \tfrac{25}{4} CCx^3 + \tfrac{35}{3} CDx^4,)$$

Collatis verò terminis seriei inventæ cum terminis correspondentibus hujus seriei fictitiæ, invenietur $A = \frac{PS\sqrt{f}}{\sqrt{gl}}$

$$B = A \times \frac{l + f - g}{6lf}$$

$$C = A \times \frac{\begin{matrix} 3l^2 + 2lf + 3f^2 \\ + 2lg - 6fg \\ - g^2 \end{matrix}}{2.\ 4.\ 5l^2f^2}$$

$$D = A \times \frac{\begin{matrix} 10l^3 + 6fl^2 + 6f^2l + 10f^3 \\ + 2gl^2 + 12fgl - 30f^2g \\ + 6g^2l - 10fg^2 \\ - 2g^3 \end{matrix}}{2.\ 4.\ 4.\ 7l^3f^3}$$

$$E = A \times \frac{\begin{matrix} 35l^4 + 20fl^3 + 18f^2l^2 + 20f^3l + 35f^4, \\ + 4gl^3 + 12fgl^2 + 60f^2gl - 140f^3g, \\ - 6g^2l^2 + 60fg^2l - 70f^2g^2, \\ + 20g^3l - 28fg^3, \\ - 5g^4, \end{matrix}}{2.\ 4.\ 4.\ 4.\ 9l^4f^4.} \ \&c.$$

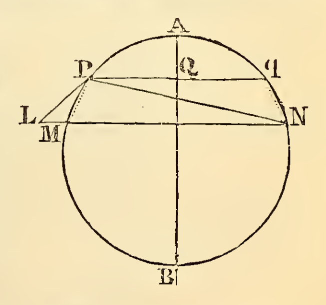
Hinc series quæ exprimit longitudinem curvæ quæsitæ fit

$$\frac{PS}{\sqrt{gl}}\sqrt{f} \times (x^{\frac{1}{2}} + \frac{l + f - g}{2.\ 3lf}x^{\frac{3}{2}} + \frac{\begin{matrix} 3l^2 + 2lf + 3f^2, \\ + 2lg - 6fg \\ - gg, \end{matrix}}{2.\ 4.\ 5l^2f^2} x^{\frac{5}{2}} +, \&c.$$

Si autem talis sit curva, ut P N sit ubique major quàm g, scribatur loco x longitudo f, sive diameter circuli, et habebitur valor dimidii curvæ quæsitæ, quod respondet semi-circulo M D N: es ergo ea semi-curva,

$$\frac{PS}{\sqrt{gl}} \times f \times (1 + \frac{l + f - g}{2.\ 3l} + \frac{\begin{matrix} 3l^2 + 2lf + 3f^2, \\ + 2lg - 6fg, \\ - gg, \end{matrix}}{2.\ 4.\ 5l^2} \ \&c.$$

In hoc autem casu quantitas l sive $\frac{PN^2}{g}$ est major quàm f, majorem esse quàm g ex Hypothesi hujus casus sequitur, cùm P N supponatur major quàm g; majorem autem esse l quàm f hinc liquet, ductâ in trapezio P q N M diagonali P N fiat in P super P N a parte lineæ P M angulus N P L æqualis angulo q, ita ut occurrat P L lineæ N M, dico lineam N L esse longiorem quàm N M, nam anguli M P q et q sunt æquales, sed angulus N P L est æqualis angulo q; ergo angulus N P L cum angulo N P q major est angulo q P M, cadit ergo L ultrà M; sive N L est major N M; est autem N L æquale l, nam trianguli P q N et P N L sunt similes ob angulos q et N P L æquales per const., angulosque N P q et P N L æquales ob parallelas P q, M N, hinc ergo est P q ad P N ut P N ad N L, sed est P q sive g ad P N ut P N ad l, ergo est N L æqualis l et major quàm f.



Hinc, ut ista series convergat, debent ita disponi termini hujus seriei ut remotiores a primo ponantur ii in quibus crescunt in numeratore dimensiones quantitatum f aut g, et in denominatore dimensiones quantitatis l, ideóque hanc habet formam.

$$\frac{PSf}{PN} \times 1$$

$$+ \frac{1}{2.\,3\,l} \times (l + \overline{f - g})$$

$$+ \frac{1}{2.\,4.\,5\,l^2} \times (3\,l^2 + \overline{2\,f\,l + 2\,g\,l} + \overline{3\,f^2 - 6\,f\,g - g^2})$$

$$+ \frac{1}{2.4.4.7\,l^3} \times (10\,l^3 + \overline{6\,f\,l^2 + 2\,g\,l^2} + \overline{6\,f^2\,l + 12\,f\,g\,l + 6\,g^2\,l} + \overline{10\,f^3 - 30\,f^2\,g - 10\,f\,g^2 - 2\,g^3})$$

$$+ \frac{1}{2.4.4.4.9\,l^4} \times (35\,l^4 + \overline{20\,f\,l^3 + 4\,g\,l^3} + \overline{18\,f^2\,l^2 + 12\,f\,g\,l^2 - 6\,g^2\,l^2} + \overline{20\,f^3\,l + 60\,f^2\,g\,l + 60\,f\,g^2\,l + 20\,g^3\,l +}, \&c.)$$

$$+ \frac{1}{2.4.4.4.4.11\,l^5} \times (126\,l^5 + \overline{70\,f\,l^4 + 10\,g\,l^4} + \overline{60\,f^2\,l^3 + 24\,f\,g\,l^3 - 4\,g^2\,l^3}, \&c.)$$

$$+ \frac{1}{2.4.4.4.4.4.13\,l^6} \times (462\,l^6 + \overline{252\,f\,l^5 + 28\,g\,l^5}, \&c.)$$

$$+ \frac{1}{2.4.4.4.4.4.4.\,15\,l^7} \times (1716\,l^7 +, \&c.)$$

Ut autem hæc forma ad simpliciorem revocetur, notandum quod ubi est $g = o$ tunc $l = \infty$, ideóque omnes termini hujus seriei præter primam columnam evanescunt, quoniam continet altissimam dignitatem quantitatis l; sed ubi $g = o$ tunc conus P M D N E fit rectus; et curva inscripta sphæræ cujus radius est P S, est circulus cujus diameter est ad f sicut P S ad P N, undè is diameter est $\frac{PS \times f}{PN}$; ideóque prima columna seriei quæ eo in casu dimidium curvæ exprimit, continet rationem semi-circuli ad diametrum 1.

Ideo summa tota ejus columnæ $1 + \frac{1}{2.\,3} + \frac{3}{2.\,4.\,5} + \frac{10}{2.\,4.\,4.\,7}$, &c. est 1.57079, &c. idque in quocumque valore quantitatis g, siquidem ea quantitas in eâ columnâ eliminatur.

Ad inveniendam summam secundæ columnæ, ea in duas dividatur partes, quarum prior multiplicet $\frac{f}{l}$, altera $\frac{g}{l}$ ut habeatur summæ columnæ multiplicatæ per $\frac{f}{l}$ observandum quod singuli coëfficientes primæ columnæ (primo termino 1 secluso) sunt ad coëfficientes singulos secundæ columnæ ut numeri 1 ad 1, 3 ad 2, 5 ad 3, 7 ad 4, 9 ad 5, 11 ad 6, 13 ad 7, &c. quæ ratio tandem abit in rationem duplam, itaque hi coëfficientes secundæ columnæ simul sumpti dimidium efficiunt quantitatis .57079 additâ insuper eâ quantitate quâ primi coëfficientes secundæ columnæ excedunt dimidium coëfficientium primæ, qui excessus celerrimè convergunt, suntque

$$\frac{\frac{1}{2}}{1.3} + \frac{\frac{1}{2}}{2.4.5} + \frac{1}{2.4.4.7} + \frac{\frac{5}{2}}{2.4.4.4.9} + \frac{7}{2.4.4.4.4.11} + \frac{21}{2.4.4.4.4.4.13} + \frac{66}{2.4.4.4.4.4.4.15}, \&c.$$

qui termini sunt	.08333
	.01250
	.00446
	.00217
	.00124
	.00078
	.00053
	.10613
summa reliquorum.	00112
dimidium .57079	.28539
	.39152

Ut termini reliqui habeantur, fingi potest sequentes terminos decrescere in ratione duorum ultimò inventorum, unde summa omnium terminorum adjiciendorum erit .00112 proximè, hinc ea pars secundæ columnæ est .39152 $\frac{f}{l}$ proximè.

Hujus autem primæ partis secundæ columnæ coëfficientes sunt ad coëfficientes alterius partis ut — 1 ad 1, + 1 ad 1, 3 ad 1, 5 ad 1, 7 ad 1, 9 ad 1, &c. singuli autem erant ad suos excessus supra dimidium termini columnæ primæ ut 2 ad 1, 4 ad 1, 6 ad 1, 8 ad 1, 10 ad 1, 12 ad 1, &c. ergo coëfficientes alterius partes istius columnæ sunt ad eos excessus ut 2 ad — 1, 4 ad 1, 6 ad 3, 8 ad 5, 10 ad 7, quæ ratio tandem ad æqualitatem desinit; ergo summa istius columnæ sumatur æqualis differentiolis supra inventis .10613, et insuper quantitatibus quibus inventi termini hujus columnæ excedunt eas differentiolas, quæ sunt

$$\frac{-1\frac{1}{2}}{2.3} + \frac{1\frac{1}{2}}{2.4.5} + \frac{1}{2.4.4.7} + \frac{\frac{3}{2}}{2.4.4.4.9} + \frac{3}{2.4.4.4.4.11} + \frac{7}{2.4.4.4.4.4.13} + \frac{18}{2.4.4.4.4.4.4.15}$$

sive	$-.25$	
	$+.03750$	Unde summa terminorum ejus columnæ est $-.09952\frac{g}{l}$ proximè
	$+.00446$	
	$+.00130$	
	$+.00053$	
	$+.00026$	
	$+.00014$	
	$-.20531$	
sum reliq.	16	
sum. differ.	$+.10613$	
	$-.09952\frac{g}{l}$	

Termini tertiæ columnæ summati evadunt $+0.1579\frac{f^2}{l^2}-0.0621\frac{fg}{l^2}+0.0057\frac{g^2}{l^2}$

Termini quartæ sunt $+0.07265\frac{f^3}{l^3}-0.07119\frac{f^2g}{l^3}-0.0032\frac{fg^2}{l^3}+0.03353\frac{g^3}{l^3}$

Term. quintæ sunt $+0.04965\frac{f^4}{l^4}-0.00444\frac{f^3g}{l^4}-0.05586\frac{f^2g^2}{l^4}+0.06380\frac{fg^3}{l^4}+0.015\frac{g^4}{l^4}$

T. sextæ sunt $+0.07469\frac{f^5}{l^5}-0.14589\frac{f^4g}{l^5}-0.11563\frac{f^3g^2}{l^5}-0.06938\frac{f^2g^3}{l^5}-0.01376\frac{fg^4}{l^5}$ $-0.00385\frac{g^5}{l^5}$.

In hoc casu ubi l est major quàm g aut f, ex istis terminis sufficiens convergentia obtinetur, ut pro vero valore curvæ, hi termini, imò et pauciores assumi possint reliquis omissis; quoniam ergo invenimus attractionem puncti P a circulo M D N E esse ut P C ductum in numerum linearum P Z in circumferentiâ M D N E terminatarum, sive ut P C ductum in curvam quæ in superficie sphæræ intercipitur inter lineas P Z, si in singulo puncto C, axeos A B erigatur ordinata quæ sit ut

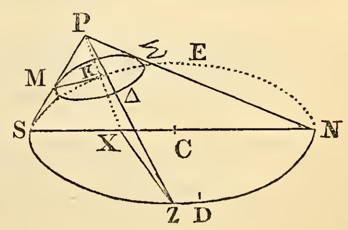
$$\frac{PC}{PN}\times MN\times\Big(1.57079+0.59125\frac{f}{l}+0.1379\frac{f^2}{l^2}+0.0726\frac{f^3}{l^3}$$
$$-0.09952\frac{g}{l}-0.0621\frac{fg}{l^2}-0.0722\frac{f^2g}{l^3},\ \&c.$$
$$+0.0057\frac{g^2}{l^3}-0.0032\frac{fg^2}{l^3}$$
$$+0.03353\frac{g^3}{l^3}$$

et per vertices earum ordinatarum curva ducta intelligatur, exprimet ejus area attractionem puncti P, si modò in hoc valore inserantur quantitates ad curvam revolventem pertinentes; abscissa constans A Q dicatur a, ejus ordinata $PQ=\frac{g}{2}$ sit c, abscissa A C sit x, ordinata C M sit y, erit $PN^2=\overline{x-a}|^2+\overline{y+c}|^2$, ideòque $l=\frac{\overline{x-a}|^2+\overline{y+c}|^2}{2c}$, et $PC=\sqrt{\overline{x-a}|^2+c^2}$.

Ex his et æquatione curvæ, determinari potent punctum axeos in quo transibit circulus talis ut attractio cis eum circulum æqualis sit attractioni ultra eum circulum, sive punctum axeos ad quod tendit media directio gravitatis; hinc ejus obliquitas ad perpendiculum in curvam obtinebitur.

Sed cùm hæc duntaxat valeant cùm g sive P Q q nunquam major est quàm P N, generalior alia est solutio, sed cujus calculus paulo prolixior videbitur.

2. Casus, si talis sit curva ut incertum sit utrum P N nunquam sit minor quàm P Q q sive g.

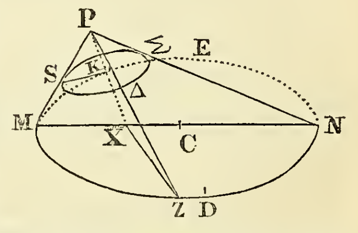


Ducatur per punctum P linea quæ angulum N P M in duos angulos æquales dividat, et occurrat lineæ M N in puncto X, erit (per 3. VI. Elem.) P N + P M ad N M ut P N ad N X quod erit ergo $\frac{PN\times f}{PN+PM}$; scribatur is valor loco x in serie quæ exprimit longitudinem curvæ propositæ, ea evadet

$$\frac{PS \times f}{\sqrt{PN \times \overline{PN + PM}}} \times \left(1 + \frac{l + f - g}{2.3.l \times \overline{PN + PM}} PN + \frac{\begin{matrix} 3l^2 + 2lf + 3f^2 \\ + 2lg - 6fg \\ - gg \end{matrix}}{2.4.5\, l^2 \times \overline{PN + PM}|^2} PN^2, \&c.\right)$$

quæ series in omni casu convergit propter quantitatis P N + P M dignitates in denominatore positas; quæ quantitas semper major est quàm P N, f et g in numeratore positas (per 20. 1. Elem.), imo si loco l ponatur ejus valor $\frac{PN^2}{g}$ fiatque reductio, series evadet

$$\frac{PS \times f}{\sqrt{PN \times \overline{PN + PM}}} \times \left(1 + \frac{PN^2 + fg - g^2}{2.3.PN \times \overline{PN + PM}} + \frac{\begin{matrix} 3PN^4 + 2PN^2 gf + 3f^2g^2 \\ + 2PN^2 gg - 6fg^3 \\ - g^4 \end{matrix}}{2.4.5.\, PN^2 \times \overline{PN + PM}|^2}, \&c.\right)$$



Cùm autem in triangulo P N q, vel in triangulo P M N, P N + M N sit summa laterum et P N nunquam sit minimum latus, demonstrabitur facilè quod rectangulum P N per P M + P N, est majus rectangulis aut quadratis factis ex reliquis lateribus P N, P q vel M N, unde in quocumque casu hæc series tam respectu litteralium quantitatum quàm respectu numerorum coëfficientium erit convergens, idque satis promptè, siquidem duobus gradibus crescunt dimensiones ab uno termino ad alterum.

Portio autem curvæ quæsitæ respondens tali abscissæ, est accuratè quarta pars totius curvæ quæsitæ, sumptis enim a puncto P secundùm lineas P M, P N longitudinibus P S, P Z æqualibus radio sphæræ, ductâque S Σ; et secto cono P M D N E secundùm lineam S Σ per planum perpendiculare plano P N M, sectio erit ellipsis et S Σ unus ex ejus ellipseos axibus; quia verò triangulus P S Σ est isosceles et linea P X angulum S P Σ bifariam dividit, ea linea P X secabit axem ellipseos S Σ in ipso centro K ellipseos; quoniam autem alter axis K Δ est perpendicularis in axem S Σ, et est in plano ad planum P N M perpendiculari, erit axis Δ K perpendicularis in lineam P K X ideóque erit parallelus ordinatæ X Z, et linea P Z transibit per punctum Δ; ergo unus ellipseos quadrans intercipietur inter lineas P N, P Z, hoc est respondebit portioni N D Z semi-circuli N Z D N, alter verò quadrans ellipseos respondebit reliquæ portioni M Z semi-circuli ejusdem; jam verò evidens est quod si habeatur conus rectus cujus basis sit ellipsis quævis, et ab ejus vertice ut centro, radio quovis describatur curva in ejus coni superficie, portiones ejus curvæ singulis quadrantibus ellipseos respondentes erunt inter se æquales; ergo portio curvæ respondens abscissæ $x = \frac{PN}{PN + PM} f$ est accuratè quarta pars totius curvæ quæsitæ.

Ergo ex prius inventis, cùm attractio P a pyramidibus in peripheriam M D N E desinentibus, exprimi debeat per P C ductum in numerum linearum P Z, quæ a puncto P æqualibus angulis procedentes ad peripheriam M D N E desinunt, is verò numerus linearum P Z sit ut curva quæ intercipitur in superficie sphæræ descriptæ radio quocumque P S inter eas lineas P Z, eaque curva in quatuor æquales quadrantes dividatur, erit etiam is numerus linearum P Z ut unus ex eis quadrantibus; exprimitur verò is quadrans per seriem suprà inventam: ergo (posito P S = 1) attractio puncti P a solido est ut

$$\frac{PC \times f}{\sqrt{PN \times \overline{PN + PM}}} \times \left(1 + \frac{PN^2 + ff - gg}{2.3.PN \times \overline{PN + PM}} + \frac{\begin{matrix} 3PN^4 + 2PN^2 gf + 3f^2g^2, \\ + 2PN^2 gg - 6fg^3, \\ - g^4, \end{matrix}}{2.4.5.\, PN^2 \times \overline{PN + PM}|^2}, \&c.\right)$$

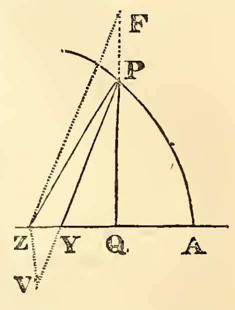
Hæc series tunc minimùm convergit cùm ex Solis coëfficientibus numericis convergit, cùm nempe punctum M coincidit cum puncto P, tunc enim quantitates omnes N M, sive f, P q sive g, P N et P N + P M sunt inter se æquales et $PC = \frac{g}{2}$ tunc ergo series redit ad P C ×

$$\left(1 + \frac{1}{2.3} + \frac{3}{2.4.5} + \frac{10}{2.4.4.7} + \frac{35}{2.4.4.4.9}, \&c.\right)$$

Eo autem in casu, ex ipsâ constructione liquet, portionem curvæ sphæræ inscriptæ esse quadrantem circuli cujus radius est 1, eumque quadrantem exprimi istâ serie; hinc totam hanc seriem æquipollere quantitati 1.57079 × P C.

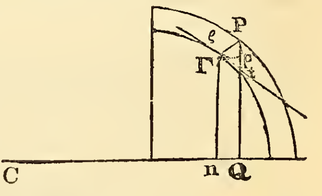
Facilior paulo evadet calculus, si loco summæ laterum $P M + P N$, adhibeatur quantitas $\frac{f g}{P N - P M}$ ipsi æquipollens. Prolixior tamen est, quàm ut illum applicare sustinuerimus ad ulteriores consequentias.

Dixi ex his viam sterni ad determinationem curvæ quam affectat meridianus Telluris; nam si ex æquatione generali $y = A x^n + B x^{2n} + C x^{3n}$, &c. et ex serie inventâ determinetur attractio puncti P a quovis circulo, et erigatur in puncto axis, quod ejus circuli est centrum, ordinata quæ ejus circuli attractionem repræsentet, et intelligatur curva per earum ordinatarum vertices transiens, quæratur ejus curvæ area per vulgatas methodos, habebiturque gravitas puncti P in solidum; quæratur præterea punctum axeos Y in quo si erigeretur ordinata illi curvæ quæ gravitatem puncti P exprimit, ejus curvæ area bifariam divideretur, erit Y punctum axeos ad quod attractio puncti P dirigetur.



Pariter ex æquatione generali curvæ habebitur punctum axeos Z ad quod pertinget perpendiculum in curvæ punctum P, habebuntur ergo intervalla Z Y et Y Q, ex Z ducatur Z V parallela P Q quæ concurrat cum P Y productâ in V, producatur P Q in F ut fiat $P F = Z V$, ducaturque F Z, quoniam curva circa axem revolvitur, P F erit directio vis centrifugæ agentis in puncto P, P V directio gravitatis, P Z verò curvæ perpendicularis erit directio media nata ex utriusque vis compositione (ut constat facto cùm agatur de Tellure ipsâ); sed quia habentur Z Y, Y Q, P Q et P Y habebuntur Z V et V Y, ideóque habebitur V P, ergo habebuntur latera et diagonalis parallelogrammi F P V Z sive habebuntur rationes vis centrifugæ puncti P, vis ejus gravitatis et vis mediæ P Z ex utrâque resultantis, fiat ergo ut P V ad P Z ita gravitas puncti P ex attractione solidi nata et per aream curvæ inventa ad residuum ejus gravitatis, demptâ vi centrifugâ.

Tandem inscripta intelligatur in curva quæ quæritur, alia curva ipsi omninò similis, ita ut earum sit idem centrum, et axes supra se mutuò jaceant, æquatoris prioris curvæ semi-diameter dicatur m, et differentia ejus a semi-diametro alterius, quæ quamminima assumi potest, dicatur d m, abscissa C Q prioris curvæ sit z, erit ejus differentia ab abscissâ correspondenti alterius curvæ $\frac{z d m}{m} = Q n = \Gamma p$; ordinata P Q sit y, ejus differentia ab ordinatâ correspondenti erit $\frac{y d m}{m} = P p$; quoniam Γt potest sumi ut portio tangentis curvæ, triangulum $\Gamma p t$ erit simile triangulo fluxionali in puncto Γ sive etiam in puncto P ob similitudinem curvarum et abscissarum erit: ergo $d z : d y = \Gamma p \left(\frac{z d m}{m}\right)$



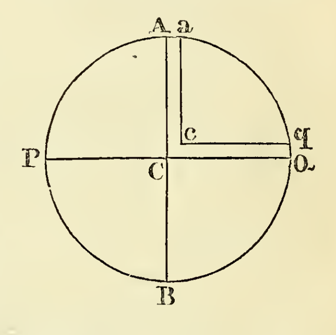
$p t = \frac{z d y}{d z} \times \frac{d m}{m}$ ergo $P t = P p + p t = \overline{y + \frac{z d y}{d z}} \times \frac{d m}{m}$ sed si ducatur $P \varrho$ perpendicularis ad curvam in P erit etiam triang. $P \varrho t$ simile triang. $\Gamma p t$ ideóque triang. fluxionali; nam ob similitudinem curvarum, tangens Γt est parallela curvæ in P; ideóque angulus ϱ est rectus, est ergo d v ad d z ut P t sive $\overline{y + \frac{z d y}{d z}} \times \frac{d m}{m}$ ad $P \varrho$ quod erit ergo $\frac{y d z + z d y}{d v} \times \frac{d m}{m}$ sive deletâ ratione $\frac{d m}{m}$ quæ data est, perpendiculi portio inter duas curvas similes intercepti erit ut $\frac{y d z + z d y}{d v}$, multiplicetur id perpendiculum per y d v, factum erit ut annulus solidus inter curvas interceptus tandem ergo multiplicetur $y^2 d z + z y d y$ per valorem gravitatis acceleratricis secundum P Z quæ prius inventa fuit, factum erit ut pondus fluidi inter curvas similes intercepti in puncto P, sumantur ejus facti fluxiones facta d z constanti, et nihilo æquentur illæ fluxiones, sic pondera omnium partium inter duas curvas contentarum fient æqualia, et habebitur æquatio fluxionalis curvæ quam meridianus Terræ affectat.

Alia etiam est in hoc Problemate conditio quæ brevius æquationem suppeditare posset, nempe (fig. præced.) cùm sit P Q ad Z V ut Z Y ad Y Q, et Z V sit ubique ut vis centrifuga puncti P quæ est semper proportionalis ordinatæ P Q, ratio Z Y ad Y Q constans esse debet. Bene ergo res se habet si utroque modo eadem obtineatur curva, sin minus, oportet ut inter has hypotheses aliqua sit repugnantia, nempe dari solidum, uniformiter densum, rotans circa axem et in æquilibrio constitutum, in quo media actio inter gravitatem et vim centrifugam sit perpendicularis ad curvam; quæ quidem dicta non putentur ut præripiam palmam et laudem illi qui majori patientiâ aut

PROPOSITIO XX. PROBLEMA IV.

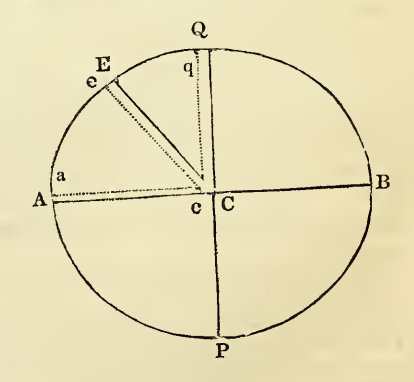
Invenire et inter se comparare pondera corporum in Terræ hujus regionibus diversis.

([a]) Quoniam pondera inæqualium crurum canalis aqueæ A C Q q c a æqualia sunt; et pondera partium, cruribus totis proportionalium et similiter in totis sitarum, sunt ad invicem ut pondera totorum, ideóque etiam æquantur inter se; erunt pondera æqualium et in cruribus similiter sitarum partium reciprocè ut crura, id est, reciprocè ut 230 ad 229. Et par est ratio homogeneorum et æqualium quorumvis et in canalis cruribus similiter sitorum corporum. Horum pondera sunt reciprocè ut crura, id est, reciprocè ut distantiæ corporum a centro Terræ. Proindè si corpora in supremis canalium partibus, sive in superficie Terræ consistant, erunt pondera eorum ad invicem reciprocè ut distantiæ eorum a centro. Et



industriâ determinabit generalissimè meridiani figuram ex genuinis Newtonianis Principiis, nullâ præsuppositâ ad circulum, ellipsim, aliamve curvam affinitate, sive his calculis ipsis felicius tractatis sive aliis.

([a]) * *Quoniam pondera.* Concipiatur (ut suprà Prop. XIX.) canalis aquæ plena a polo Q q ad centrum C c et inde ad æquatorem A a pergens. Quia oportet fluidum quiescere (ex Hyp.) erit fluidum in canalis crure A C in æquilibrio cum fluido in ejusdem canalis crure Q C, et portio quælibet fluidi in crure C A consistet in æquilibrio cum simili et similiter positâ fluidi portione in crure C Q (ex demonstratis, in Prop. præced.) idem quoque simili argumento colligitur de corporibus quibusvis homogeneis etiamsi fluida non sint. Quarè corpora homogenea quæ sunt ut A C, Q C in locis A et Q constituta æquè gravia sunt versùs centrum C. Sed gravitas corporis in A positi quod est ut Q C est ad gravitatem alterius corporis homogenei ibidem constituti quod est ut A C sicut Q C ad A C. Sunt enim corporum homogeneorum in eodem loco consistentium pondera ut ipsamet corpora, ergò corporum homogeneorum in A et Q positorum gravitates sunt ut Q C ad A C. Eodem modo ostendetur gravitatem corporis in loco E, in alterâ quâcumque canali C E, esse ad gravitatem corporis æqualis et homogenei in loco Q, ut C Q ad C E; fluidum enim in canali A C E quiescere debet sicut in priori canali A C Q (per Hyp.) undè, ex æquo, æqualium et homogeneorum corporum in Telluris superficie ubivis consistentium gravitates absolutæ sunt ut distantiæ a centro reciprocè.



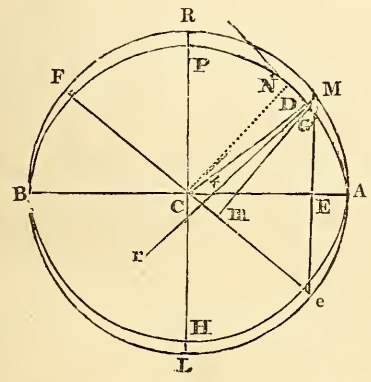
* Gravitatem corporis in E esse ad gravitatem corporis in Q ut C Q ad C E verum est non mathematicè, sed quam proximè; directio enim gravitatis corporis positi in E non est secundùm E C, ita ut ad centrum C tendat, sed est perpendicularis superficiei Q E A (ut ex facto liquet) hinc gravitates in singulis punctis

eodem argumento pondera, in aliis quibuscunque per totam Terræ superficiem regionibus, sunt reciprocè ut distantiæ locorum a centro: (b) et propterea, ex hypothesi quod Terra sphærois sit, dantur proportiones.

Unde tale confit Theorema, quod incrementum ponderis pergendo ab æquatore ad polos, sit quam proximè ut sinus versus latitudinis duplicatæ, vel quod perinde est, ut quadratum sinus recti latitudinis. (c) Et in

forent reciprocè ut radii osculatores curvæ, verùm ob figuram Terræ prope sphæricam id subtiliùs sectari videtur superfluum, tanto magis quod calculorum consequentiæ cum experimentis sint conferendæ, in quibus semper deficiet mathematica ἀκρίβεια.

91. (b) * *Et propterea.* Ex hypothesi enim quod Terra sit sphærois, qualem vult Newtonus, hoc confit Theorema; quod scilicet *incrementum ponderis pergendo ab æquatore ad polos sit quamproximè ut sinus versus latitudinis duplicatæ, vel quod perindè est, ut quadratum sinûs recti latitudinis.* Sit enim A P B A, ellipsis quæ



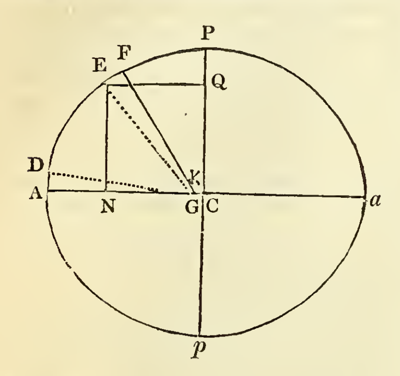
referat meridianum Terræ et A R B L A, circulus radio C A, descriptus ad quem ellipsis A P B A proximè accedit, sitque radius C A semi-diameter æquatoris terrestris, erit (ex naturâ ellipsis 247. Lib. I.) R P : M G = C R : E M, ideóque $M G = \frac{R P \times E M}{C R}$. Sed propter triangula D M G, E M C, similia, ubi ellipsis ad circulum proximè accedit (tunc enim D G, sumi potest pro rectâ tangente ellipsim in puncto D, et ea tangens est quam proximè perpendicularis radio D C) est M G : M D = M C : M E ac proindè $M G = \frac{M D \times M C}{M E}$, erit ergo $\frac{R P \times M E}{C R} = \frac{M D \times M C}{M E}$, undè fit $M D = \frac{R P \times M E^2}{C R^2}$. Jam verò ex puncto M, ducatur perpendicularis M m ad rectam F e, erit e m sinus versus arcûs duplicatis A M, hoc est, arcûs M e, sivè quia A M exhibet latitudinem (10) erit e m, sinus versus latitudinis duplicatæ; sed est $e m \times e F = e M^2$ (ex proprietate circuli). Quarè ob datam e F, est e m ut $e M^2$, vel etiam ut $M E^2$ ideóque M D, est ut $\frac{R P \times e m}{C R^2}$, vel ob datas $\frac{R P}{C R^2}$, fit M D, ut e m, sivè ut $M E^2$. Quia verò pondera in locis A et D sunt ut distantiæ locorum a centro reciprocè (ex dem.) erit incrementum ponderis in D, ut $\frac{1}{C D} - \frac{1}{C A}$, hoc est, ut C A — C D, vel ut C M — C D ideóque ut M D. Quarè *incrementum ponderis*, &c.

(c) 92. * *Et in eâdem circiter ratione.* Minimus arcus circuli curvam aliquam in dato puncto osculantis pro arcu infinitesimo curvæ in hoc puncto usurpari potest (121. Lib. I.). Sed integri gradus sunt ut minimi arcus similes, arcus autem illi sunt ut radii circulorum curvam osculantium; quarè gradus integri erunt ut iidem radii. Erit itaque gradus in loco D, ut radius circuli ellipsim ibidem osculantis, et gradus in loco A, itidem ut radius circuli ellipsim osculantis in eodem puncto A. Jam verò ductâ perpendiculari C N, ad tangentem D N, sumptoque D r, pro radio osculatore in D, erit D r ut $D k^3$, sive quia est $C P^2 = C N \times D k$ (ibid.) ob datam $C P^2$ erit D k ut $\frac{1}{C N}$, ideóque radius circuli qui est ut $D k^3$, erit ut $\frac{1}{C N^3}$, hoc est, radius circuli ellipsim osculantis est reciprocè ut cubus perpendiculi ex centro C in tangentem D N demissi. Quarè incrementa graduum in D, pergendo ab æquatore ad polos erunt ut $\frac{1}{C N^3} - \frac{1}{C A^3}$ hoc est, ut $C A^3 - C N^3$, sive ut $C M^3 - C N^3$, vel etiam ut $C M^3 - C D^3$ quoniam differentia rectarum C N, C D admodùm exigua est. Sed est $C M^3 = (C D + D M)^3 = C D^3 + 3 C D^2 \times D M + 3 D M^2 \times C D + D M^3$, ideóque $C M^3 - C D^3 = 3 C D^2 \times D M + 3 D M^2 \times C D + D M^3 = 3 C D^2 \times D M$, ob quantitates $D M^2$, $D M^3$, fere evanescentes respectu $3 C D^2 \times D M$, sunt igitur incrementa graduum ut $3 C D^2 \times D M$, sive ut D M, ob rectam C D proxime constantem. Quarè incrementa graduum sunt ut ponderum incrementa.

93. Idem analyticè præstari potest quemadmodum elegantissime, pro more suo, fecit clariss.

eâdem circiter ratione augentur arcus graduum latitudinis in meridiano. Ideóque cùm latitudo Lutetiæ Parisiorum sit 48 gr. 50′. ea locorum sub

D. de Maupertuis in Monumentis Paris. an. 1734. et in Libro de Figurâ Terræ. Semi-ellipsis P A p, referat meridianum sphæroidis cujus est axis P p, diameter verò secundum æquatorem A a. Ponatur $CA = 1$, $CP = m$, $CN = x$, $EN = y$ erit (ex naturâ ellipseos per Lem. IV.



de Conicis) $EN^2 : CP^2 = AN \times Na : AC^2$, ideóque $y^2 = m^2 \times (1 - xx)$ et $y = m\sqrt{1 - xx}$. Sit G E, radius circuli ellipsim osculantis in E, is erit (214. Lib. I.) $= \frac{1}{m}(1 - xx + mmxx)^{\frac{3}{2}}$. Quia verò $EK^3 = \frac{EG \times PC^4}{AC^2}$ (239. Lib. I.) erit $EK = m\sqrt{1 - x^2 + m^2x^2}$. Jam sinus anguli latitudinis A K E, dicatur s, posito sinu toto $= 1$, erit $1 : s = m\sqrt{1 - x^2 + m^2x^2} : m\sqrt{1 - xx}$, ac proindè $xx = \frac{1 - ss}{1 - ss + mmss}$ quo valore substituto, loco xx in expressione radii osculatoris, fiet $EG = \left(\frac{mm}{1 - ss + mmss}\right)^{\frac{3}{2}}$. Nunc conferantur simul duo gradus meridiani A D, E F, quorum unus incipiat ab æquatore, alter verò sumatur ubivis in arcu A P, sumpto A B, pro radio circuli ellipsim osculantis in A, erit (92.) $AD : EF = AB : EG$, sed est $AB = \frac{PC^2}{AC}$ (241. Lib. I.) $= mm$, quarè si gradus A D dicatur A et gradus E F dicatur E, fiet $A : E = mm : \frac{mm}{(1 - ss + mmss)}^{\frac{3}{2}}$ ac proindè $E = A \times (1 - ss + mmss)^{-\frac{3}{2}}$. Hæc formula exprimit relationem inter primum gradum latitudinis et alium quemlibet gradum, atque inter diametrum et axem.

94. Si quantitas $1 + mm - ss$, evehatur ad dignitatem cujus exponens est $-\frac{3}{2}$ (550. Lib. I.) erit $E = A \times (1 - \frac{3}{2}(mm - 1)ss + \frac{51}{8} \times (mm - 1)\overline{ss}|^2 -$, &c.) vel $A - E = \frac{3}{2} \times (mm - 1)AS^2 - \frac{15}{8}(mm - 1)^2 AS^4 +$, &c. Quia verò sphærois Terræ ad sphæram proximè accedit, erit ferè $m = 1$, ideóque in superiori formulâ negligi poterunt termini in quibus quantitas $mm - 1$, ad altiorem potestatem evecta occurrit, undè fit pro Tellure $2A - 2E = 3(mm - 1) \times ASS$. Si Terra ponatur versùs polos compressa, erit $1 > m$ et $E > A$, hincque prodit $E - A$, $ASS = 3 \times (1 - mm) : 2$. Quare iterum patet id quod jam demonstravimus (92.) arcus scilicet graduum latitudinis in meridiano augeri in duplicatâ ratione sinûs recti latitudinis.

95. Si gradus A D, non computetur ab ipso æquatore, sed ubivis inter A et E sumatur, sitque S sinus anguli latitudinis, patet (94.) fore $BD = \frac{mm}{(1 - SS + mmSS)}^{\frac{3}{2}}$ ideóque $A : E = \frac{mm}{(1 - SS + mmSS)}^{\frac{3}{2}} : \frac{mm}{(1 - ss + mmss)}^{\frac{3}{2}}$, ac proindè $A \times (1 - ss + mmss)^{\frac{3}{2}} = E \times (1 - SS + mmSS)^{\frac{3}{2}}$. Jam verò evectis terminis ut suprà ad dignitatem cujus exponens $\frac{3}{2}$, neglectisque quantitatibus evanescentibus (95.), fiet $1 - mm = \frac{2(E - A)}{3E \times (ss - SS)}$.

Si gradus unus ab æquatore, alter a polo numeretur, erit $s = 1$, et $S = o$, ideóque formula præcedens abit in hanc $1 - mm = \frac{2(E - A)}{3E}$.

96. Si loco semi-diametrorum C A, C P, et sinus latitudinis s s, in æquatione $xx = \frac{1 - ss}{1 - ss + mmss}$, (93.) substituantur expressiones quælibet indeterminatæ, æquatio præcedens quatuor continebit variabiles, quarum tribus cognitis quarta innotescet. Quare datis semi-diametro æquatoris C A, semi-diametro paralleli N C vel E Q, x, aut quod idem est, datis gradu æquatoris et gradu paralleli (sunt enim gradus illi ut ipsimet circuli, ideóque ut radii) et simul cognitâ latitudine, cujus sinus s, dabitur axis ellipsoidis. Simili prorsus modo ductâ quâlibet aliâ ordinatâ E Q, quæ sit alterius paralleli semi-diameter, et mutatâ utcumque latitudine, institui poterit alia æquatio quatuor variabiles continens ac proindè duplex obtinebitur æquatio. Jam verò quia hæc utraque æquatio duas continet indeterminatas communes, nempè semi-diametros ellipsis, patet datis duorum parallelorum gradibus, datisque latitudinibus, per vulgares algebræ regulas collatâ simul utrâque æquatione, determinari posse semi-diametrorum rationem. Cæterum hæc omnia constructionibus geometricis

æquatore 00 gr. 00′, et ea locorum ad polos 90 gr. et duplorum sinus versi sint 1134,00000 et 20000, existente radio 10000, et gravitas ad polum sit ad gravitatem sub æquatore ut 230 et 229, et excessus gravitatis ad polum ad gravitatem sub æquatore ut 1 ad 229: (d) erit excessus gravitatis in latitudine Lutetiæ ad gravitatem sub æquatore, ut $1\frac{11334}{20000}$ ad 229, seu 5667 ad 2290000. Et propterea gravitates totæ in his locis erunt ad invicem ut 2295667 ad 2290000. (e) Quarè cùm longitudines pendulorum æqualibus temporibus oscillantium sint ut gravitates, et in latitudine Lutetiæ Parisiorum longitudo penduli singulis minutis secundis oscillantis sit pedum trium Parisiensium et linearum $8\frac{1}{2}$, vel potius (f) ob pondus aëris $8\frac{5}{9}$: longitudo penduli sub æquatore superabitur a longitudine synchroni penduli Parisiensis, (g) excessu lineæ unius et 87 partium millesimarum lineæ. Et simili computo confit tabula sequens.

facilè absolvi possunt, verùm in præsenti materiâ præstat calculum adhibere.

(d) * *Erit excessus gravitatis.* Excessus gravitatis ad polum dicatur E, excessus gravitatis in latitudine Lutetiæ dicatur e, sitque G gravitas sub æquatore, erit

$$E : G = 1 : 229$$

$$e : E = 11334 : 20000,$$ ideóque per compositionem rationum et ex æquo e : G $= 1 \times 11334 : 229 \times 20000 = \frac{1 \times 11334}{20000} : 229$, hoc est, excessus gravitatis in latitudine Lutetiæ est ad gravitatem sub æquatore $= \frac{1 \times 11334}{20000} : 229 = 5667 : 2290000$, et propterea addendo 5667 num. 2290000, gravitates totæ in his locis erunt ad invicem ut 2295667 ad 2290000.

(e) * *Quarè cùm longitudines pendulorum.* (Cor. 4. Prop. XXIV. Lib. II.)

(f) * *Ob pondus aëris.* Corpus oscillans in aëre ponderis sui partem amittit æqualem ponderis paris voluminis aëris; quarè si idem corpus ponatur moveri in vacuo, paululum augeri debet illius pondus, ideóque celeriùs vibrabit, et ut ad isochroneitatem reducatur, augeri debebit longitudo penduli eâdem ratione quâ augetur gravitas: hinc cùm $\frac{1}{11000}$ parte plumbi pondus in vacuo augeatur, tantumdem augeri debet penduli longitudo quæ erit ergo ad $440\frac{1}{2}$ lin. ut 11001 ad 11000, invenieturque $440\frac{5}{9}$ (289. Lib II.). Hinc in latitudine Lutetiæ Parisiorum longitudo penduli ad minuta secunda oscillantis in vacuo hic ponitur pedum trium Paris. et lin. $8\frac{5}{9}$ proximè.

(g) * *Excessu lineæ unius et 87 partium millesimarum.* Cùm longitudines pendulorum æqualibus temporibus oscillantium sint ut gravitates, erit 2295667 ad 2290000 ut longitudo penduli in latitudine Lutetiæ, hoc est, ut 3 ped. $8\frac{5}{9}$ lin. vel ut $\frac{3965}{9}$ lin. ad quartum proportionalem $\frac{9079850000}{20661003} = 439.468$, qui est penduli longitudo sub æquatore. Hâc autem demptâ ex longitudine penduli in latitudine Lutetiæ ped. 3. et $8\frac{5}{9}$ lin., seu lin. 440. 555, remanet excessus lineæ unius et 87 partium millesimarum lineæ.

Latitudo loci.	*Longitudo penduli.*		*Mensura gradus uniùs in meridiano.*
grad.	*ped.*	*lin.*	*hexapedæ.*
0	3	7,468	56637
5	3	7,482	56642
10	3	7,526	56659
15	3	7,596	56687
20	3	7,692	56724
25	3	7,812	56769
30	3	7,948	56823
35	3	8,099	56882
40	3	8,261	56945
1	3	8,294	56958
2	3	8,327	56971
3	3	8,361	56984
4	3	8,394	56997
45	3	8,428	57010
6	3	8,461	57022
7	3	8,494	57035
8	3	8,528	57048
9	3	8,561	57061
50	3	8,594	57074
55	3	8,756	57137
60	3	8,907	57196
65	3	9,044	57250
70	3	9,162	57295
75	3	9,258	57332
80	3	9,329	57360
85	3	9,372	57377
90	3	9,387	59382

Constat autem per hanc tabulam, quòd graduum inæqualitas tam parva sit, ut in rebus geographicis figura Terræ pro sphæricâ haberi possit: (h) præsertim si Terra paulò densior sit versus planum æquatoris quàm versus polos.

Jam verò astronomi aliqui in longinquas regiones ad observationes astronomicas faciendas missi, observarunt quòd horologia oscillatoria tardiùs moverentur prope æquatorem quàm in regionibus nostris. Et primò quidem D. Richer hoc observavit anno 1672. in insulâ Cayennæ. Nam dùm observaret transitum fixarum per meridianum mense Augusto, reperit horologium suum tardius moveri quàm pro medio motu Solis, exis-

(h) * *Præsertim si Terra.* In eo siquidem casu minui diametrorum differentiam ostendimus (in Prop. præced.).

tente differentiâ 2′. 28″ singulis diebus. Deinde faciendo ut pendulum simplex ad minuta singula secunda per horologium optimum mensurata oscillaret, notavit longitudinem penduli simplicis, et hoc fecit sæpius singulis septimanis per menses decem. Tum in Galliam redux contulit longitudinem hujus penduli cum longitudine penduli Parisiensis (quæ erat trium pedum Parisiensium, et octo linearum cum tribus quintis partibus lineæ) et reperit breviorem esse, existente differentiâ lineæ unius cum quadrante.

Postea Halleius noster circa annum 1677 ad insulam Sanctæ Helenæ navigans, reperit horologium suum oscillatorium ibi tardius moveri quàm Londini, sed differentiam non notavit. Pendulum verò brevius reddidit plusquam octavâ parte digiti, seu lineâ unâ cum semisse. Et ad hoc efficiendum, cùm longitudo cochleæ in imâ parte penduli non sufficeret, annulum ligneum thecæ cochleæ et ponderi pendulo interposuit.

Deinde anno 1682. D. Varin et D. des Hayes invenerunt longitudinem penduli singulis minutis secundis oscillantis in Observatorio Regio Parisiensi esse ped. 3. lin. $8\frac{5}{9}$. Et in insulâ Goreâ eâdem methodo longitudinem penduli synchroni invenerunt esse ped. 3. lin. $6\frac{5}{9}$. existente longitudinum differentiâ lin. 2. Et eodem anno ad insulas Guadaloupam et Martinicam navigantes, invenerunt longitudinem penduli synchroni in his insulis esse ped. 3. lin. $6\frac{1}{2}$.

Posthac D. Couplet filius anno 1697 mense Julio, horologium suum oscillatorium ad motum Solis medium in Observatorio Regio Parisiensi sic aptavit, ut tempore satis longo horologium cum motu Solis congrueret. Deinde Ulyssipponem navigans invenit quòd mense Novembri proximo horologium tardiùs iret quàm priùs, existente differentiâ 2′. 13″. in horis 24. Et mense Martio sequente Paraibam navigans invenit ibi horologium suum tardiùs ire quàm Parisiis, existente differentiâ 4′. 12″. in horis 24. Et affirmat pendulum ad minuta secunda oscillans brevius fuisse Ulyssipponi lineis $2\frac{1}{7}$. et Paraibæ lineis $3\frac{2}{3}$. quàm Parisiis. (i) Rectius posuisset

(i) * *Rectiùs posuisset.* Horologium tardius ibat Ulyssipponi quàm Parisiis, existente differentiâ 2′. 13″. seu 133″. ideóque horologium illud Parisiis conficiens 24 hor. spatio 86400″. Ulyssipponi conficiebat tantùm 86400″ — 133″. hoc est, 86267″. Sed est longitudo penduli Parisiis ad minuta secunda oscillantis lin. $\frac{3965}{9}$. Quarè si longitudo penduli ad minuta secunda Ulyssipponi oscillantis dicatur L, erit (Cor. 4. Prop. XXIV. Lib. II.) $(86400)^2 : (86267)^2 = \frac{3965}{9} :$ L, seù $67184640000 : 29507491312885 = 3965 : L$ ac proindè $L = \frac{29507491312885}{67184640000} = 439\frac{13434352885}{67184640000} = 439\frac{5}{6}$ lin. circiter. Est autem longitudo penduli Parisiis ad minuta secunda oscillantis lin. $\frac{3965}{9}$ seu 440.555, vel $440\frac{1}{2}$, quarè differentia pendulorum Parisiis et Ulyssipponi ad minuta secunda oscillantium debet esse $440\frac{1}{2} - 439\frac{1}{6} = 1\frac{1}{3}$. Rectiùs itaque posuisset

differentias esse $1\frac{1}{3}$. et $2\frac{5}{9}$. Nam hæ differentiæ differentiis temporum 2'. 13". et 4'. 12". respondent. Crassioribus hujus observationibus minus fidendum est.

Annis proximis (1699 et 1700) D. des Hayes ad Americam denuò navigans determinavit quòd in insulis Cayennæ et Granadæ longitudo penduli ad minuta secunda oscillantis, esset paulo minor quàm ped. 3. lin. $6\frac{1}{2}$. quòdque in insula S. Christophori longitudo illa esset ped. 3. lin. $6\frac{3}{4}$, et quòd in insula S. Dominici eadem esset ped. 3. lin. 7.

Annoque 1704. P. Feuilleus invenit in Porto-bello in Americâ longitudinem penduli ad minuta secunda oscillantis, esse pedum trium Parisiensium et linearum tantum $5\frac{7}{12}$, id est, tribus ferè lineis breviorem quàm Lutetiæ Parisiorum, (k) sed errante observatione. Nam deinde ad insulam Martinicam navigans, invenit longitudinem penduli isochroni esse pedum tantùm trium Parisiensium et linearum $5\frac{10}{12}$.

Latitudo autem Paraibæ est 6^{gr}. 38'. ad austrum, et ea Porto-belli 9^{gr}. 33'. ad boream, et latitudines insularum Cayennæ, Goreæ, Guadaloupæ, Martinicæ, Granadæ, Sancti Christophori, et Sancti Dominici sunt respectivè 4^{gr}. 55', 14^{gr}. 40', 15^{gr}. 00', 14^{gr}. 44', 12^{gr}. 6, 17^{gr}. 19', et 19^{gr}. 48', ad boream. Et excessus longitudinis penduli Parisiensis supra longitudines pendulorum isochronorum in his latitudinibus observatas sunt paulò majores quàm pro tabulâ longitudinum penduli superius computatâ. Et propterea (l) Terra aliquanto altior est sub æquatore quàm pro superiore

D. Couplet differentiam esse $1\frac{1}{3}$. Simili computo patet, differentiam pendulorum Parisiis et Paraibæ esse $2\frac{5}{9}$.

(k) * *Sed errante observatione.* Latitudo Porto-belli est 9°. 33'. ad boream, et latitudo Martinicæ est 14°. 44'. Hinc differentia latitudinum est 5°. 11'. Est autem latitudo Lutetiæ 48°. 50'. quarè differentia latitudinum Lutetiæ et Porto-belli est 39°. 17'. Sed præterquam quod observationes Feuillæi a Tabulâ Newtonianâ maximè discrepant, secum invicem non satis consentire videntur. Cùm enim differentia latitudinum 39°. 17'. ex iisdem observationibus, præbuerit longitudinem penduli minorem Porto-belli quàm Parisiis, tribus fere lineis, differentia latitudinum Martinicæ et Porto-belli quæ est 5°. 11'. majorem in hisce latitudinibus præbere debuisset penduli differentiam quàm $\frac{3}{12}$ lin. qualem invenit Feuillæus. Hunc cæteroquin diligentissimum observatorem non satis hàc in re accuratum fuisse confirmant observationes an. 1735. Porto-belli habitæ a clariss. viris DD. Godin et Bouguer, quorum prior penduli longitudinem Porto-belli invenit 36 poll. 7 lin. $\frac{7}{89}$, posterior verò eandem longitudinem summo consensu determinavit 36 poll. 7 lin. $\frac{7}{99}$.

(l) 97. *Terra aliquantò altior est.* Materia ad centrum redundans quâ densitas ibi major fit, seorsim a reliquâ Tellure uniformiter densâ spectetur, gravitas in Terram uniformiter densam erit reciprocè ut distantia a centro (ex demonstratis in Prop. XIX.). Gravitas autem in materiam redundantem erit reciprocè ut quadratum distantiæ a materiâ illâ quam proximè (Prop. LXXVI. Lib. I.). Cùm igitur in casu Terræ uniformiter densæ, illius superficies versùs æquatorem elevetur, versùs polum verò deprimatur, gravitasque ad æquatorem minor sit quàm ad polum in ratione distantiæ poli a centro ad æquatoris semi-diametrum, ad prædictam autem materiam redundantem circà centrum gravitas ad æquatorem minor fit quàm ad polum in ratione duplicatâ distantiæ poli a centro ad æquatoris semi-diametrum, quæ ratio priori ratione simplici minor est, patet in casu Telluris versùs centrum densioris ex utrâque simul causâ fieri ut gravitas ad æquatorem ex binis prioribus composita minor sit gravitate ad polum in ratione minore quàm est ratio distantiæ poli a centro

calculo, et densior ad centrum quàm in fodinis prope superficiem, nisi forte calores in zonâ torridâ longitudinem pendulorum aliquantulum auxerint.

Observavit utique D. Picartus quòd virga ferrea, quæ tempore hyberno, ubi gelabant frigora, erat pedis unius longitudine, ad ignem calefacta evasit pedis unius cum quartâ parte lineæ. (m) Deinde D. de la Hire observavit quòd virga ferrea quæ tempore consimili hyberno sex erat pedum longitudinis, ubi Soli æstivo exponebatur, evasit sex pedum longitudinis cum duabus tertiis partibus lineæ. In priore casu calor major fuit quàm in posteriore, in hoc verò major fuit quàm calor externarum partium corporis humani. Nam metalla ad Solem æstivum valde incalescunt. At virga penduli in horologio oscillatorio nunquam exponi solet calori Solis æstivi, nunquam calorem concipit calori externæ superficiei corporis humani æqualem. Et propterea virga penduli in horologio tres pedes longa, paulo quidem longior erit tempore æstivo quàm hyberno, sed excessu quartam partem lineæ unius vix superante. Proinde differentia tota longitudinis pendulorum quæ in diversis regionibus isochrona sunt, diverso calori attribui non potest. Sed neque erroribus astronomorum e Galliâ missorum tribuenda est hæc differentia. Nam quamvis eorum observationes non perfectè congruant inter se, tamen errores sunt adeo parvi ut contemni possint. Et in hoc concordant omnes, quod isochrona pendula sunt breviora sub æquatore quàm in Observatorio Regio Parisiensi, existente differentiâ non minore quàm lineæ unius cum quadrante, non majore quàm linearum $2\frac{2}{3}$. Per observationes D. Richeri in Cayenna factas differentia fuit lineæ unius cum quadrante. Per eas D. des Hayes differentia illa correcta prodiit lineæ unius cum semisse, vel unius cum tribus quartis partibus lineæ. Per eas aliorum minus accura-

ad æquatoris semi-diametrum, et ideò ob minorem hanc gravitatem in æquatore respectu gravitatis ad polos, Tellus magis ad æquatorem elevabitur quàm pro superiori calculo, ac proindè longitudo pendulorum quæ gravitati acceleratrici proportionalis est (Cor. 4. Prop. XXIV. Lib. II.) paulò major esse debet quàm pro tabulâ longitudinum computatâ in casu Terræ uniformiter densæ.

(m) 9. * *Deindè D. de la Hire.* Hisce observationibus adjungi debent instituta a clariss. viro D. de Mairan experimenta quæ in Monum. Paris. an. 1735. leguntur. Ut caloris solaris vim exploraret, laminas ferri et cupri a loco clauso ac temperato vel etiam frigescente, ad locum solaribus radiis apertum transferebat, ibique plurium horarum spatio relinquebat. Deinde laminarum dilatationem circino accuratè capiebat, mensurato priùs caloris solaris incremento ope thermometri Reaumuriani. Observavit ob majorem Solis calorem respectu loci clausi in quo anteà suspensum erat thermometrum, ad 15 vel 20 gradus liquorum pervenisse et ferri laminam 3 ped. $8\frac{1}{2}$ lin. longam dilatari invenit $\frac{1}{30}$ vel $\frac{1}{22}$ lin. cuprum flavi coloris majorem quàm ferrum a radiis solaribus patiebatur dilatationem. Experimentum quoque tentavit in aquâ ebulliente; immersit nempe in eâ cuprum flavi coloris et ferrum, eandem plane in utroque metallo dilatationem fieri observavit; cæterum lamina cuprea tres pedes 8 lin. $\frac{1}{2}$ longa, mense Julio, ascendente thermometro ad altitudinem 22 grad. suprà congelationem, ob aquæ ebullientis calorem dilatabatur $\frac{1}{3}$ lin. circiter.

tas prodiit eadem quasi duarum linearum. Et hæc discrepantia partim ab erroribus observationum, (n) partim a dissimilitudine partium internarum Terræ et altitudine montium, et partim a diversis aëris caloribus, oriri potuit.

Virga ferrea pedes tres longa, tempore hyberno in Angliâ, brevior est quàm tempore æstivo, sextâ parte lineæ unius, quantum sentio. Ob calores sub æquatore auferatur hæc quantitas de differentiâ lineæ unius cum quadrante a Richero observatâ, et manebit linea $1\frac{1}{12}$: quæ cum lineâ $1\frac{87}{1000}$ per theoriam jam ante collectâ probe congruit. Richerus autem observationes in Cayennâ factas, singulis septimanis per menses decem iteravit, et longitudines penduli in virgâ ferreâ ibi notatas cum longitudinibus ejus in Galliâ similiter notatis contulit. Quæ diligentia et cautela in aliis observatoribus defuisse videtur. Si hujus observationibus fidendum est, (o) Terra altior erit ad æquatorem quàm ad polos excessu milliarium septendecim circiter, ut supra per theoriam prodiit.

(n) * *Partim a dissimilitudine.* Quæ de pendulorum longitudinibus dicta sunt in hac Propositione, supponunt homogeneam esse Telluris materiam; si verò homogenea non sit ubique, sed aliqua sit in partibus internis Terræ dissimilitudo, patet (96.) hinc quasdam oriri posse in pendulorum longitudinibus irregularitates. Similem ob causam, ex montium altitudine, vallium cavitate inæqualitates aliquæ nasci poterunt, pro excessu enim vel defectu materiæ augebitur vel minuetur gravitas. Observationum discrepantiam repeti etiam posse a diversis aëris caloribus manifestum est ex observationibus Picarti, la Hirii, et ex notâ præcedenti.

(o) * *Terra altior erit.* Si hujus observationibus fidendum est, longitudo penduli sub æquatore superabitur a longitudine penduli synchroni Parisiensis excessu lineæ unius et 87 partium millesimarum lineæ, ideóque longitudo penduli sub æquatore erit 3. ped. $\frac{4217}{9000}$ lin. seu 3. ped. 7. 468. lin. proximè, est enim longitudo penduli Paris. 3. ped. $8\frac{5}{9}$ lin. sed est incrementum ponderis sive incrementum longitudinis penduli pergendo ab æquatore ad polos ut sinus versus latitudinis duplicatæ; ac proindè $\frac{1087}{1000}$ seu 1 lin. $\frac{87}{1000}$ erit ad incrementum longitudinis sub polo ut 11334 ad 20000. Quarè incrementum illud est $1\frac{10406}{11334}$, seu $1\frac{919}{1000}$ proximè. Erunt ergò pondera seu pendulorum longitudines sub æquatore et sub polo respectivè 3. ped. 7.468 lin. et 3. ped. 9.387 lin. hoc est proximè ut in tabulâ Newtonianâ. Sed pondera sunt reciprocè ut distantiæ a centro (ex demonstratis in Prop. XIX.) ideóque 439468 est ad 441387 ut diameter versùs polos est ad diametrum secundum æquatorem, sivè ut 229 ad 230 proximè, ideóque positâ semi-diametro Terræ (ut in Prop. præced.) patet (per notas in eandem Prop.) Terram altiorem esse ad æquatorem quàm ad polos excessu milliarium septemdecim circiter.

99. Clariss. D. Campbell Londini in latitudine 51°. $\frac{1}{2}$° et in Jamaicâ in latitudine 18°. accuratissimis observationibus institutis, invenit longitudinem penduli simplicis ad minuta secundæ Londini oscillantis esse 39.129. poll. Angl. idemque pendulum tardius ire in Jamaicâ quàm Londini deprehendit, existente differentiâ 1'. 58". spatio 24. hor. Ex his observationibus, eodem quo hactenus usi sumus computo, determinavit longitudinem penduli sub æquatore esse ad longitudinem penduli sub polis ut 39000 ad 39206, undè prodit diameter æquatoris ad diametrum versùs polos in ratione 39206 ad 39000 sivè ut 190 ad 189 ferè; ideóque positâ semi-diametro Terræ ut in Prop. præced. Terra altior erit ad æquatorem quàm ad polos excessu milliarium 41 circiter. Doctissimi viri DD. Godin, Bouguer, de la Condamine summâ diligentiâ in latitudine 18°. 27'. observationes habuerunt quæ cum observationibus D. Campbell probè congruunt. In id quoque conspirant observationes versùs polum institutæ a celeberrimo D. de Maupertuis clarissimisque sociis ut Terram versûs æquatorem magis elatam constituant quàm pro theoriâ Newtoni. Idem confirmat accurata graduum terrestrium mensura. Longitudo gradûs meridiani qui circulum polarem secat, a D. de Maupertuis inventa est 57437,9 hexaped. et longitudinem gradûs in Galliâ in 45°. 57100. hexaped. probabiliter assumi posse ostendimus. Hinc gradûs utriusque

differentia est 537. hexaped. aut ad minimum 500. hex. sed ex tabulâ Newtonianâ differentia inter 45. gr. et 65. est 240. hexapedarum, crescunt itaque gradus latitudinis pergendo ab æquatore ad polos magis quàm juxtà tabulam Newtonianam, ac proinde non solùm Terra est elata sub æquatore (94.), sed etiam diametrorum differentia ex observationibus major quàm ex ipsâ theoriâ colligitur. Consulatur observationum series quam Transactionibus Anglicanis an. 1734. inseruit autor Versionis Gallicæ.

100. *Scholium.* Penduli longitudinem Romæ determinare pluribus experimentis tentavimus cum doctissimis et in observando versatissimis PP. Boscovik et Maire S. J. mathematicis. Usi sumus methodo illâ accuratissimâ quam sagacissimus naturæ indagator summusque geometra D. de Mairan tradit in Monum. Acad. Reg. Paris. ad an. 1735., ubi experimenta recenset quæ cum incredibili curâ adversùs omne errorum genus peregit. Paravimus itaquè horologium oscillatorium a celeber. Graham Londini constructum, nobisque ab illustrissimo D. Leprotti humanissimè commodatum, quod per appulsum fixæ ad telescopium immotum singulis observationum diebus dirigebamus ut tempus Solis medium indicaret. In machinâ quâdam immotâ constituimus plana duo horizontalia, e quorum altero filum pendebat laminis metallicis aptè inter se congruentibus compressum cochlearum ope, alterum ità sensim elevabatur per cochleas ut horizontalem situm servaret, et globum e filo suspensum inferius contingeret. Distantiam puncti suspensionis a puncto illo infimo globi, quo planum horizontale subjectum contingebat, investigabamus ope mensuræ Londinensis bipedalis accuratissimæ, quam cum pluribus aliis consentientem P. Abbas Revillas clariss. vir, Publicus Professor Math. et Acad. Londin. Socius exhibuit nobis. Huic mensuræ inserta est altera regula mobilis quam pro arbitrio educere ad altitudinem 4. pedum conficiendam. Hanc igitur inter punctum suspensionis et punctum globi infimum interponebamus perpendiculariter ad plana horizontalia, maximèque cavebamus ne in hâc mensurâ error aliqualis irreperet. Plura idcirco neglexímus experimenta in quibus filum extendebatur observationis tempore, aliaque rejecimus facta cum filo serico vel cum globo eburneo qui nimiam in aëre resistentiam patiebatur. Sex igitur tantum quæ nobis tutissima visa sunt describemus: facta sunt cum globo cupreo cujus quælibet semi-diameter inventa est partium digiti Londinensis millesimarum 605, pondus verò unciarum $4\frac{3}{8}$ seu granorum 2520. Illum suspendebamus e filo ex foliis aloës parato, quod Gallicè dicitur, *fil de pite*; hujusmodi filum $21\frac{1}{2}$ ped. Londin. longum, æquiponderabat granis 5, et propterea pondus fili 44 digit. erat ad pondus globi ut 1 ad 2955, pondus verò 35. digit. ad pondus ejusdem globi ut 1 ad 3715. Hinc per ea quæ D. de Mairan loco citato demonstravit, si distantia puncti suspensionis a centro globi sit 44 digit. Lond. circiter, ex longitudine observatâ seu interceptâ inter punctum suspensionis et punctum infimum globi subtrahenda erit longitudo 0,6023 digit. ut habeatur vera longitudo penduli simplicis pendulo observationis isochroni. Si verò distantia puncti suspensionis a centro globi sit 35 digit. circiter, auferenda erit longitudo 0,6004 digit.

1. Experimentum 13. Julii manè.

Longitudo observata	45.145 digit. Lond.
Longit. subtrahenda.	0.6023
Longitudo vera	44.5427.

Numeravimus oscillationes globi 3261 eo tempore quo horologium oscillatorium 3479 absolvit, hoc est, intervallo 3480.69 secundorum temporis medii. Horologium enim tardius movebatur quàm pro medio motu Solis, et differentia erat 42 secundorum pro horis 24. est igitur $\overline{3480.69}|^2$ ad $\overline{3261}|^2$ ut 44.5427 ad 39.09736 digit. Lond. quæ est longitudo penduli simplicis ad singula minuta temporis medii oscillantis.

2. Experimentum eâdem die vespere. Longitudo observata 45. 18. digit. Lond. longitudo vera 44.5777. Numerus oscillationum globi 3387 tempore medio 3616.75 secund. undè habetur longitudo penduli simplicis ad singula minuta secunda oscillantis 39.0941 digit. Londin.

3. Experimentum 14. Julii. Longitudo observata 36.26. longitudo vera 35.6596 digit. Lond. numerus oscillationum globi 3740 tempore medio 3571.75 secund. longitudo penduli quæsita 39.09827. digit. Lond.

4. Experimentum 16. Julii. Longitudo observata 36.97. longitudo vera 36.3696. numerus oscillationum globi 3832 tempore medio 3695.88 secund. longitudo penduli quæsita 39.09703 digit. Lond.

5. Experimentum 19. Julii. Longitudo observata 35.185. longitudo vera 34.5846. digit. numerus oscillationum globi 3870 tempore medio 3639.85. secund. penduli quæsita 39.096485.

6. Experimentum 5. Augusti. Longitudo observata 45.427. longitudo vera 44.8247 digit. Lond. numerus oscillationum globi 3563 tempore medio 3815.03 secund. longitudo quæsita 39.097872.

Ex his omnibus experimentis invenitur media longitudo penduli 39.09686 digit. Lond. Verùm si rejiciatur secundum experimentum quod ab aliis quinque inter se probe consentientibus nimis differt; media longitudo prodit 39.0974 digit. Lond. Hoc autem experimentum secundum rejici debere, inde etiam concludimus quod sextum maximè accuratum nobis visum sit, nam omninò invariata fuit fili longitudo toto observationis tempore, et omnes concursus diligentissime notati inter se congruebant.

Pes Londinensis vulgò supponitur esse ad ped. Paris. ut 135 ad 144 vel etiam ut 1000 ad 1068, quâ ratione cùm primùm usi essemus, longè minorem, quàm par est, penduli longitudinem inveniebamus. Sed ratio illa in re adeò subtili satis accurata non est. Nam D. Godin Monum. Acad. Reg. Scientiarum ad an. 1735. pag. 508, scribit se cum D. Bouguer observasse pedem Lond. se babere ad ped. Paris. ut $1351\frac{1}{3}$ ad 1440. Si hanc adhibeamus rationem, longitudo penduli Romæ erit 3. ped. Paris. 8. lin.

PROPOSITIO XXI. THEOREMA XVII.

(p) *Puncta æquinoctialia regredi, et axem Terræ singulis revolutionibus annuis nutando bis* (q) *inclinari in eclipticam et bis redire ad positionem priorem.*

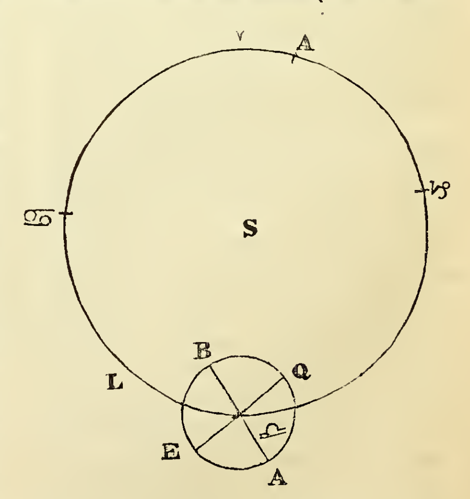
Patet per Corol. 20. Prop. LXVI. Lib. I. Motus tamen iste nutandi perexiguus esse debet, et vix aut ne vix quidem sensibilis.

$\frac{28}{100}$. Tandem si ratio illa sit numeri 1351 ad 1440 ut quibusdam mathematicis mensurarum peritissimis videtur, major prodit penduli longitudo, nimirum ped. Paris. 3. lin. 8,3888.

Hæc sunt quæ ad Telluris figuram spectant. Hâc de re nova quamplurima an. 1740. et 1741. duplici Dissertatione edidit P. Boscowick S. J. insignis matheseos professor: maximè autem exoptandum ut ad hujusce quæstionis totiusque matheseos utilitatem salvi et incolumes redeant clariss. Academici qui ad definiendam Telluris figuram nobili ardore laboriosum iter versus æquatorem susceperunt. Simul enim collatis versùs polum et versùs æquatorem institutis observationibus, a doctissimis viris pro bono scientiarum in unum conspirantibus certissima de Telluris magnitudine et figurâ, gravitatis decremento, aliisque ad astronomiam, geographiam et physicam maximè momentosis speranda sunt.

(p) 101. *Puncta æquinoctialia.* Si Terra nullo alio motu præter motum progressivum in suâ orbitâ motumque vertiginis circa axem agitaretur, axem suum sibi semper parallelum retineret (Cor. 22. Prop. LXVI. Lib. I.) sed ob Telluris figuram versùs polos depressam et versùs æquatorem oblongatam fit ut axis situs perturbetur. Referat ♈ ♋ ♎ ♑, orbitam Telluris circà Solem S, sitque A E B Q, ipsa Tellus cujus poli A et B, æquator E Q. Quoniam (ex Prop. præced.) Terra est sphærois ad polos A et B, depressa et versùs æquatorem E Q, elata, instar globi annulo inhærentis spectari poterit, annulo enim æquivalet materia redundans in regionibus æquatoris. Quarè (per Cor. 20. Prop. LXVI.) annuli hujus nodi regrediuntur, hoc est, Tellus digressa a librâ ♎, ubi communis sectio eclipticæ et æquatoris versùs Solem S, dirigitur, et per ♑ versùs ♈ pergens, ad nodum A priùs pertinget quàm ad ♈ pervenerit, et Tellus ab ♈ per ♋ versùs ♎ progrediens priùs alterum nodum L atintget quàm ♎ ubi in priori revolutione erat nodus: id est, æquatoris planum productum, per Solem priùs transibit quàm Telluris centrum ad ♎ pervenerit, sed tunc contingit æquinoctium dum nempè Sol in plano æquatoris terrestris versatur (4.) illaque puncta pro æquinoctialibus habentur in quibus Sol videtur tempore æquinoctiorum. Quarè patet, stellis fixis quiescentibus, puncta æquinoctialia omniaque eclipticæ puncta quæ a punctis æquinoctialibus numerantur, regredi seu in antecedentia moveri. Hic punctorum æquinoctialium regressus pendet ab actione Solis in materiam ad partes æquatoris redundantem, sed et Lunæ etiam non leves vires esse possunt; cùm enim Luna in eclipticæ plano aut non procul ab eo jaceat, ad eundem cum Sole effectum concurret. Sed infrà computabitur motus æquinoctiorum ab utrâque vi, Solis scilicet et Lunæ oriundus.

(q) 102. *Bis inclinari in eclipticam.* In semi-revolutione Telluris circà Solem a ♎ per ♑ ad ♈, actio Solis inclinationem æquatoris in eclipticam minuere conatur cùm illa actio eam inclinationem augere conetur a ♋ ad ♎, hinc maxima fit inclinatio inter ♎ et ♑ postea minuitur ex Solis actione oriunda (Cor. 10. et 18.



Prop. LXVI. Lib. I.) fitque inclinatio illa minima, cùm Terra est inter ♑ et ♈, cùm verò Tellus inter ♈ et ♋ pervenit, rursus restituitur præcedens inclinatio (ibid.) sicque deinceps simulque cum æquatore Telluris axis oscillatur.

PROPOSITIO XXII. THEOREMA XVIII.

Motus omnes lunares, omnesque motuum inæqalitates ex allatis principiis consequi.

Planetas majores, interea dum circa Solem feruntur, posse alios minores circum se revolventes planetas deferre, et minores illos in ellipsibus, umbilicos in centris majorum habentibus, revolvi debere patet per Prop. LXV. Lib. I. Actione autem Solis perturbabuntur eorum motus multimodè, iisque adficientur inæqualitatibus quæ in Lunâ nostrâ notantur. Hæc utique (per Cor. 2, 3, 4, et 5. Prop. LXVI.) velocius movetur, ac radio ad Terram ducto describit aream pro tempore majorem, orbemque habet minus curvum, atque ideo propius accedit ad Terram, in syzygiis quàm in quadraturis, nisi quâtenus impedit motus eccentricitatis. Eccentricitas enim maxima est (per Corol. 9. Prop. LXVI.) ubi apogæum Lunæ in syzygiis versatur, et minima ubi idem in quadraturis consistit; et inde Luna in perigæo velocior est et nobis propior, in apogæo autem tardior, et remotior in syzygiis quàm in quadraturis. Progreditur insuper apogæum, et regrediuntur nodi, sed motu inæquabili. Et apogæum quidem (per Cor. 7. et 8. Prop. LXVI.) velocius progreditur in syzygiis suis, tardius regreditur in quadraturis, et excessu progressûs supra regressum annuatim fertur in consequentia. Nodi autem (per Corol. 2. Prop. LXVI.) quiescunt in syzygiis suis et velocissimè regrediuntur in quadraturis. Sed et major est Lunæ latitudo maxima in ipsius quadra-

Axis igitur Terræ singulis revolutionibus annuis nutando bis inclinatur in eclipticam et bis redit ad positionem priorem: hæc omnia facilè intelliget qui in mentem revocaverit Prop. LXVI. Lib. I. ultimaque ejusdem Corollaria.

103. In singulis octantibus inter æquinoctia et solstitia sequentia, inclinatio axis Terræ ad eclipticam redit ad priorem magnitudinem, pluriumque annorum decursu sensibilior non evadit, at regressus punctorum eclipticæ continuo fit in antecedentia, nec ad pristinum locum redeunt puncta æquinoctialia, nisi post integrum circulum. Hinc mutatio quæ unius anni spatio insensibilis est, post plurium annorum intervalla notabilis evadit.

104. Cùm stellæ fixæ quiescant et retrocedat communis sectio æquatoris et eclipticæ, necesse est ut mutabilis sit fixarum a punctis æquinoctialibus distantia et stellæ ab iisdem punctis versus orientem quotidiè progredi videantur, undè ipsarum longitudines quæ in eclipticâ ab initio Arietis sive intersectione vernali eclipticæ et æquatoris computari solent, continuò crescunt, et fixæ omnes videntur moveri in consequentia signorum. Hinc fit quod constellationes omnes antiquam sedem mutaverint. Sic constellatio Arietis quæ tempore Hipparchi propè intersectionem vernalem eclipticæ et æquatoris visa fuit, nunc ab eâdem digressa in signo Tauri moratur, sicut et Tauri constellatio in Geminorum locum transivit, Geminique in Cancrum promoti sunt, ità ut unaquæque constellatio e suo in proximum locum successerit. * Cùm autem hîc, dum de inclinatione egimus, nec ad motum ipsum nodorum, nec ad excentricitatem orbitarum quas Terra aut Luna describunt, nec ad apsidum motus, nec ad irregularitatem molis Terræ attenderimus, nec denique ad aliorum planetarum actiones, quædam etiam eclipticæ inclinationi mutatio afferri potest, quæ forte perseverabit satis ut sensibilis evadat: inclinationis angulum 1′. centum annis decrescere volebat Louvillæus, cui non repugnant quæ Cassinus in Astronomiæ Elementis, ex variâ astronomorum æstimatione inclinationis eclipticæ retulit. Sed de iis plura in posterum erunt dicenda.

turis (per Corol. 10. Prop. LXVI.) quàm in syzygiis: et motus medius tardior in perihelio Terræ (per Corol. 6. Prop. LXVI.) quàm in ipsius aphelio. Atque hæ sunt inæqualitates insigniores ab astronomis notatæ.

Sunt etiam aliæ quædam (a) a prioribus astronomis non observatæ inæqualitates, quibus motus lunares adeo perturbantur, ut nullâ hactenus lege ad regulam aliquam reduci potuerint. Velocitates enim seu motus horarii apogæi et nodorum Lunæ, et eorundem æquationes, ut et differentia inter eccentricitatem maximam in syzygiis et minimam in quadraturis, et inæqualitas quæ variatio dicitur, augentur ac diminuuntur annuatim (per Corol. 14. Prop. LXVI.) in triplicatâ ratione diametri apparentis solaris. Et variatio præterea augetur vel diminuitur in duplicatâ ratione temporis inter quadraturas quam proximè (per Corol. 1. et 2. Lem. X. et Corol. 16. Prop. LXVI. Lib. I.) sed hæc inæqualitas in calculo astronomico ad prostaphæresin Lunæ referri solet, et cum eâ confundi.

PROPOSITIO XXIII. PROBLEMA V.

Motus inæquales satellitum Jovis et Saturni a motibus lunaribus derivare

Ex motibus Lunæ nostræ motus analogi lunarum seu satellitum Jovis sic derivantur. Motus medius nodorum satellitis extimi jovialis, est ad motum medium nodorum Lunæ nostræ, in ratione compositâ ex ratione duplicatâ temporis periodici Terræ circa Solem ad tempus periodicum Jovis circa Solem, et ratione simplici temporis periodici satellitis circa Jovem ad tempus periodicum Lunæ circa Terram (per Corol. 16. Prop. LXVI. Lib. I.) (b) ideóque annis centum conficit nodus iste 8 gr. 24′ in

(a) * *A prioribus astronomis non observatæ.* Inæqualitates illæ quas hic per transennam enumerat Newtonus, æquationesque omnes seu correctiones deinceps commodius explicabuntur, et quomodò variatio Lunæ ad prostraphæresim in calculo astronomico referri soleat, exponetur. Variatio autem dicitur inæqualitas illa quâ fit ut motus Lunæ in primo mensis quadrante, sive pergente Lunâ a conjunctione ad quadraturam proximam retardetur, in secundo acceleretur dum tendit a quadraturâ ad oppositionem, in tertio retardetur rursus et in quarto iterum acceleretur.

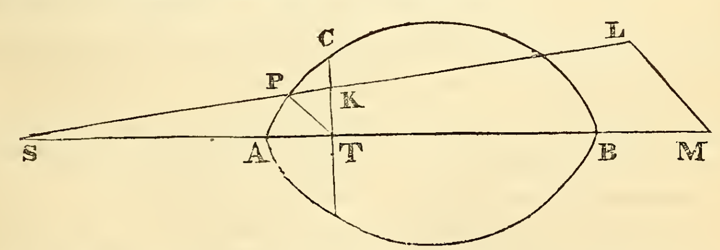
(b) * *Ideóque annis centum.* Tempus periodicum Terræ circà Solem est dierum 365.2565; tempus periodicum Jovis circà Solem est dierum 4332.514 (per Phæn. IV.) tempus periodicum satellitis circà Jovem est dierum 16.6880 (per Phæn. II.) et tempus periodicum Lunæ circà Terram dierum 27.321. (Prop. XVII.). Sumptisque logarithmis, erit

L. (365.2565) ² =	5.1251956
L. 16.6880 =	1.2224043
utriusque summa =	6.3475999
Deindè L. (4332.514) ² =	7.2734600
L. 27.321 =	1.4364966
utriusque summa =	8.7099566
Ab hâc ultimâ subtrahatur summa superior - - -	6.3475999
residuum erit L.	2.3623567

Cui respondet numerus 230.38. Quarè ex hoc calculo et analogiâ Newtoni patet motum

antecedentia. Motus medii nodorum satellitum interiorum sunt ad motum hujus, ut illorum tempora periodica ad tempus periodicum hujus (per idem Corollarium) et inde dantur. Motus autem augis satellitis cujusque in consequentia est ad motum nodorum ipsius in antecedentia, ut motus apogæi Lunæ nostræ ad hujus motum nodorum, (per idem Corol.) et inde datur. Diminui tamen debet motus augis sic inventus in ratione 5 ad 9 vel 1 ad 2 circiter, (c) ob causam quam hic exponere non vacat. (d) Æquationes maximæ nodorum et augis satellitis cujusque ferè sunt ad æquationes maximas nodorum et augis Lunæ respectivè, ut motus nodorum et augis satellitum tempore unius revolutionis æquationum priorum, ad motus nodorum et apogæi Lunæ tempore unius revolutionis æquationum posteriorum. (e) Variatio satellitis e Jove spectati, est ad variationem Lunæ, ut sunt ad invicem toti motus nodorum temporibus quibus satelles et Luna ad Solem revolvuntur, per idem Corollarium; ideóque in satellite extimo non superat 5″. 12‴.

nodorum satellitis extimi Jovis esse partem circiter 230. motûs nodorum Lunæ, sed est motus annuus nodorum Lunæ 19°. 21′. 21″., ut dicetur postea. Hisce si multiplicetur motus ille annuus per 100 factumque dividatur per 230, prodibit motus nodorum satellitis intervallo annorum centum 8°. 24′. Ab hujus sæculi initio nullum in nodis satellitum jovialium sensibilem motum fuisse observatum testatur clariss. Cassinus in Elem. Astr.



(c) 105. *Ob causam quam hic exponere non vacat.* Referat S Solem, sitque P satelles, putà Luna revolvens circà planetam primarium T scilicet Terram, in ellipseos umbilico positum; erit B apsis summa, A apsis ima, eritque T B, distantia maxima et A T distantia minima. Jam verò quò minor est distantia A T, respectu distantiæ T B, eò celerius apsides progrediuntur, (per not. in Cor. 8. Prop. LXVI. Lib. I.). Ea est correctionis causa quam autor noster non exponit. Cùm enim satellites Jovis et Saturni circà suos planetas primarios describant circulos ferè concentricos (Phæn. I. et II.) Luna verò circà Terram in orbitâ ellipticâ revolvatur, et major sit motus nodorum in orbitâ ellipticâ quàm in circulari, cæteris omnibus manentibus, hinc motus augis cujuscumque satellitis per analogiam ex motu augis lunaris inventus, diminui debet in ratione paulò minore quàm 1 ad 2, calculo non absimili illi qui XXXI. Prop. instituetur.

(d) * *Æquationes maximæ.* Nam errores angulares in singulis revolutionibus geniti, ideóque eorumdem errorem correctiones seu æquationes maximæ sunt ut satellitum tempora periodica respectivè (per Cor. 16. Prop. LXVI. Lib. I.). Sed tempora periodica sunt ut motus ipsi angulares respectivè (Lib. I.). Quare in eâdem quoque ratione sunt æquationes maximæ.

(e) * *Variatio satellitis e Jove spectati,* hoc est, motus angularis satellitis est ad motum angularem Lunæ ut sunt ad invicem toti motus nodorum temporibus quibus satelles et Luna ad Solem revolvuntur, sivè clariùs in ratione nodorum Lunæ ad motum nodorum annuum et temporis periodici Lunæ ad tempus periodicum satellitis (per Cor. 16. Prop. LXVI. Lib. I. et not. in idem Corol.). Jam verò motus nodorum Lunæ annuus est 69681″. ut posteà statuitur a Newtono, nodus autem satellitis extimi jovialis annis centum conficit 8°. 24′. ideóque motus ejusdem annuus est $302\frac{2}{5}$, tempus periodicum Lunæ est dierum 27.321 et satellitis

PROPOSITIO XXIV. THEOREMA XIX.

Fluxum et refluxum maris ab actionibus Solis ac Lunæ oriri.

Mare singulis diebus tam lunaribus quàm solaribus bis intumescere debere ac bis defluere, patet (f) per Corol. 19. et 20. Prop. LXVI. Lib. I. ut et (g) aquæ maximam altitudinem, in maribus profundis et liberis, appulsum luminarium ad meridianum loci minori quàm sex horarum spatio sequi, uti fit in maris Atlantici et Æthiopici tractu toto orientali inter Galliam et Promontorium Bonæ Spei ut et in maris Pacifici littore Chilensi et Peruviano: in quibus omnibus littoribus æstus in horam circiter secundam, tertiam vel quartam, incidit, nisi ubi motus ab oceano profundo per loca vadosa propagatus usque ad horam, quintam, sextam, septimam aut ultra retardatur. Horas numero ab appulsu luminaris utriusque ad meridianum loci, tam infra horizontem quàm supra, et per horas diei lunaris intelligo vigesimas quartas partes temporis quo Luna motu apparente diurno ad meridianum loci revertitur. Vis Solis vel Lunæ ad mare elevandum maxima est in ipso appulsu luminaris ad meridianum loci. Sed vis eo tempore in mare impressa manet aliquamdiu et per vim novam subinde impressam augetur, donec mare ad altitudinem maximam ascenderit, id quod fiet spatio horæ unius duarumve, sed

extimi dierum 16.688. Sumptis logarithmis erit

L. - 69.681 = 4.8431144
L. dierum 27.321 = 1.4364966

utriusque log. summa = 6.2796110

Deindè L. $302\frac{2}{5}$ = 2.4805818
Log. dier. 16.688 = 1.2224043

utriusque summa = 3.7029861

Hæc subtrahatur a summâ superiori 6.2796110 remanet log. 2.5766249, cui respondet numerus 378. ferè. Quarè ex analogiâ Newtoni et calculo colligitur variationem satellitis esse partem 378 variationis Lunæ circiter. Sed variationem Lunæ maximam in apogæo Solis deinceps determinat Newtonus 33'. 14''. sivè 1994''. Quarè pars 378. est 5''. 15''' ut Newtonus invenit, quamproximè.

(f) * *Per Cor.* 19. *et* 20. Si fluidum in alveo per superficiem cujusvis planetæ excavato contineatur, simulque cum planetâ motu diurno periodico uniformiter revolvatur, partes singulæ hujus fluidi per vices acceleratæ et retardatæ in syzygiis suis, hoc est, in meridie et mediâ nocte velociores erunt; in quadraturis sivè horâ sextâ matutinâ, et vespertinâ tardiores quàm superficies globi contigua, quare fluet in alveo refluetque per vices perpetuò (per Cor. 19. et 20.) idem posteà iterum demonstrabitur, viresque Solis et Lunæ seorsim computabuntur.

(g) * *Aquæ maximam altitudinem.* Rem ità se habere patet ex observatis æstibus marinis, ratio autem hæc est. Vis Solis vel Lunæ ad mare elevandum maxima est in ipso appulsu luminaris ad meridianum et posteà decrescit, attamen hujus vis effectus nondum est maximus. Omnis enim motus semel impressus perseverat uniformiter, donec motu contrario destruatur vel saltem retardetur. Hinc fit ut fluxus maris per sex circiter horas ante-meridianas auctus et cum motu diurno conspirans acceleratus, majori celeritate ulterius pergere debeat et aquas magis magisque attollet, usquè dum eadem vis motui diurno contraria fluidi cursum paulatim sistat et aquas cogat refluere. Hæc motûs retardatio maximè circà octantes sivè horam tertiam notabilis est. Alia non desunt exempla maximorum effectuum qui post causas maximas contingunt. Non in ipsis solstitiis æstivis maxime fervet æstas, sicut neque in ipsis solstitiis hybernis maximè friget hiems; sed integro circiter mense post solstitia maximus deprehenditur æstatis hyemisque effectus. Indubitatâ quoque constat experientiâ summum calorem secundâ aut tertiâ post meridiem horâ fieri.

sæpius ad littora spatio horarum trium circiter, vel etiam plurium si mare sit vadosum.

(h) Motus autem bini, quos luminaria duo excitant, non cernentur distinctè, sed motum quendam mixtum efficient. In luminarium conjunctione vel oppositione conjungentur eorum effectus, et componetur (i) fluxus et refluxus maximus. In quadraturis Sol attollet aquam ubi Luna deprimit, deprimetque ubi Luna attollit; et ex effectuum differentiâ æstus omnium minimus orietur. Et quoniam, experientiâ teste, major est effectus Lunæ quàm Solis, incidet aquæ maxima altitudo in horam tertiam lunarem circiter. Extra syzygiás et quadraturas, æstus maximus qui solâ vi lunari incidere semper deberet in horam tertiam lunarem, et solâ solari in tertiam solarem, compositis viribus incidet in tempus aliquod intermedium quod tertiæ lunari propinquius est; ideóque in transitu Lunæ a syzygiis ad quadraturas, ubi hora tertia solaris præcedit tertiam lunarem, maxima aquæ altitudo præcedet etiam tertiam lunarem, idque maximo intervallo paulo post octantes Lunæ, et paribus intervallis æstus maximus sequetur horam tertiam lunarem in transitu Lunæ a quadraturis ad syzygias. Hæc ita sunt in mari aperto. Nam in ostiis fluviorum fluxus majores cæteris paribus tardius ad ἀκμὴν venient.

Pendent autem effectus luminarium ex eorum distantiis a Terrâ. In minoribus enim distantiis majores sunt eorum effectus, in majoribus minores, idque (k) in triplicatâ ratione diametrorum apparentium. Igitur Sol tempore hyberno, in perigæo existens, majores edit effectus, efficitque ut æstus in syzygiis (l) paulò majores sint, et in quadraturis paulò minores (cæteris paribus) quàm tempore æstivo; et Luna in perigæo singulis mensibus majores ciet æstus quàm antè vel post dies quindecim, ubi in apogæo versatur. (m) Unde fit ut æstus duos omnino maximi in syzygiis continuis se mutuo non sequantur.

Pendet etiam effectus utriusque luminaris ex ipsius declinatione seu distantiâ ab æquatore. Nam si luminare in polo constitueretur, traheret illud singulas aquæ partes constanter, sine actionis intensione et remissione, ideóque nullam motûs reciprocationem cieret. Igitur luminaria

(h) * *Motus autem bini.* Quemadmodum corpus quodvis duplici vi sollicitatum in lineis duabus progredi nequit, sed conjunctis viribus parallelogrammi diagonalem eodem modo describit ac si unicâ vi juxtà diagonalis directionem urgeretur (41. Lib. I.) itâ motus bini quos luminaria hæc duo excitant non cernentur distinctè, sed motum quemdam mixtum efficient.

(i) * *Fluxus et refluxus maximus,* ut potè e virium summâ tum temporis oriundus.

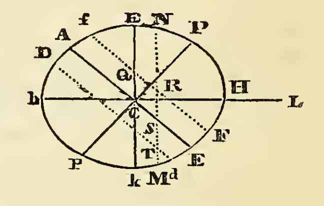
(k) * *In triplicatâ ratione diametrorum* (Cor. 14. Prop. LXVI. Lib. I.).

(l) * *Paulò majores sint,* ob majorem virium summam et in quadraturis paulò minores ob minorem virium differentiam quàm tempore æstivo.

(m) * *Undè fit ut æstus.* Si enim Luna in syzygiarum alterâ sit circâ perigæum, æstumque maximum conjunctis cum Sole viribus tunc temporis excitet, necesse est ut in alterâ syzygiâ versetur circâ apogæum minoresque vires obtineat.

recedendo ab æquatore polum versus, effectus suos gradatim amittent, et propterea minores ciebunt æstus in syzygiis solstitialibus quàm in æquinoctialibus. In quadraturis autem solstitialibus majores ciebunt æstus quàm in quadraturis æquinoctialibus, eo quod Lunæ jam in æquatore constitutæ effectus maximè superat effectum Solis. Incidunt igitur æstus maximi in syzygias et minimi in quadraturas luminarium, circa tempora æquinoctii utriusque. Et æstum maximum in syzygiis comitatur semper minimus in quadraturis, ut experientiâ compertum est. Per minorem autem distantiam Solis a Terrâ, tam tempore hyberno quàm tempore æstivo, sit ut æstus maximi et minimi sæpiùs præcedant æquinoctium vernum quàm sequantur, et sæpius sequantur autumnale quàm præcedant.

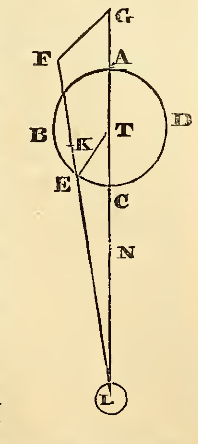
Pendent etiam effectus luminarium ex locorum latitudine. Designet A p E P Tellurem aquis profundis undique coopertam; C centrum ejus; P, p polos; A E æquatorem; F locum quemvis extra æquatorem; F f parallelum loci; D d parallelum ei respondentem ex alterâ parte æquatoris; L locum quem Luna tribus ante horis occupabat; H locum Telluris ei perpendiculariter subjectum; h locum huic oppositum; K, k loca inde gradibus 90 distantia, C H, C h maris altitudines maximas mensuratas a centro Telluris; et C K, C k altitudines minimas: et si axibus H h, K k describatur ellipsis, deinde ellipseos hujus revolutione circa axem majorem H h describatur sphærois H P K h p k; designabit hæc (n) figuram maris quam proximè, et erunt C F, C f, C D, C d altitudines maris in locis F, f, D, d.



(n) 106. * *Figuram maris quam proximè.* Circulus centro T descriptus Tellurem referat; circulus autem centro L descriptus exhibeat Lunam. Si nulla esset in Tellurem actio, Tellus profundis aquis undiquè cooperta et quiescens (per Hyp.) in sphæram sese componeret. At singulæ Telluris partes gravitant in Lunam, estque gravitas in Lunam in ratione duplicatâ distantiarum a centro reciprocè. Jam verò recta L T, exponat gravitatem acceleratricem corporis in centro T positi versùs Lunam, sitque E quælibet fluidi marini particula. Si in rectâ L E productâ sumatur L K æqualis L T, sitque L F ad L K in duplicatâ ratione L K ad L E, recta L F exponet gravitatem corporis in loco E versus Lunam, quæ vis dividitur in vires ut F G et G L (Prop. LXVI. Lib. I.). Si autem a vi illâ quâ corpus in E locatum urgetur, quæ est ut G L, auferatur vis ut T L quâ centrum Telluris urgetur versus Lunam, relinquentur vires ut F G, G T, quibus corpus E sollicitatur præter vim propriæ gravitatis quâ tendit versus centrum Terræ et vim ipsi communem cum centro ipsius Terræ. Jam sit C punctum Telluris cujus zenith Luna immineat, A verò punctum oppositum, sintque B et D puncta circumposita, sive potius exhibeant circulum horizontis in quo Luna versatur, liquet punctum G a T maximè distare, ubi punctum E est aut in C, aut in A; in priori casu G transeat in M, in posteriori in N; dum verò punctum E versatur in circulo B D, punctum G ferè coincidit cum T, nullaque partibus in circulo B D locatis relinquitur vis præter vim gravitatis propriæ atquè vim F G; ipsa verò F G, fit B T aut D T, coëuntibus punctis F et K; quare fluidi particulæ in locis B et D, præter vim gravitatis propriæ urgentur etiam versus centrum T vi ex Lunâ procedente, particulæ in loco C, versus Lunam magis attrahuntur quàm Terra integra quæ in centro T locata fingi potest; particulæ autem in loco A, versus Lunam minùs attrahuntur quàm Terra integra in T, ideóque eodem modo afficiuntur ac si ad partes contrarias urgerentur. At particulæ in circulo B D, magis gravitant versus T; in locis inter

Quinetiam si in præfatâ ellipseos revolutione punctum quodvis N describat circulum N M, secantem parallelos F f, D d in locis quibusvis R, T, et æquatorem A E in S; erit C N altitudo maris in locis omnibus R, S, T, sitis in hoc circulo. Hinc in revolutione diurnâ loci cujusvis F, affluxus erit maximus in F, horâ tertiâ post appulsum Lunæ ad meridianum supra horizontem, postea defluxus maximus in Q horâ tertiâ post occasum Lunæ, dein affluxus maximus in f horâ tertiâ post appulsum Lunæ ad meridianum infra horizontem; ultimo defluxus maximus in Q horâ tertiâ post ortum Lunæ; et affluxus posterior in f erit minor quàm affluxus prior in F. Distinguitur enim mare totum in duos omnino fluctus hemisphæricos, unum hemisphærio K H k ad boream vergentem, alterum in hemisphærio opposito K h k; quos igitur fluctum borealem et fluctum australem nominare licet. Hi fluctus semper sibi mutuò oppositi veniunt per vices ad meridianos locorum singulorum, interposito intervallo horarum lunarium duodecim. Cùmque regiones boreales magis participant fluctum borealem, et australes magis australem, inde oriuntur æstus alternis vicibus majores et minores, in locis singulis extra æquatorem, in quibus luminaria oriuntur et occidunt. Æstus autem major, Lunâ in verticem loci declinante, incidet in horam circiter tertiam post appulsum Lunæ ad meridianum supra horizontem, et Lunâ declinationem mutante vertetur

A, vel C, et B vel D, intermediis fluidi particulæ utramque conditionem participant; quo viciniores sunt fluidi terrestris partes punctis C et A, eò minus graves sunt, nam actio Lunæ sivè vis ut G T, vim propriæ gravitatis versus T minuit, et quo propiores sunt punctis B et D, eò graviores fiunt, eadem enim actio lunaris sivè vis ut F G, gravitatem propriam auget. Quia verò globus A B C D, fluido satis profundo undiquè coopertus ponitur, fluidi autem partes cedunt vi cuicumque illatæ et cedendo facilè moventur inter se, fluidum illud versus A et C positum a fluido versus B et D, posito expelletur, levius scilicet a graviore, attolletur ergò fluidum versus A et C, deprimeturque versus B et D, donec scilicet major fluidi moles et altitudo majorem gravitatem compenset, et ubique constituatur æquilibrium. Quapropter superficies maris sese componet in figuram sphæroidem cujus axis est recta A C, quæ producta per Lunam transibit. Hinc patet figuram maris in sphæroidem oblongam formari debere.



107. Simili argumento patet consideratâ Solis actione fluidum terrestre componi in sphæroidem oblongam cujus axis productus per Solem transit. Si enim (in fig. præced.) globus L non Lunam sed Solem designet, cætera se habent ut suprà. At in hoc casu minor erit quàm in altero axium differentia. Nam fluidi tumor in C hinc oritur quod fluidum magis gravitet versus Lunam quàm Telluris centrum T, tumor autem fluidi in A, inde provenit quod Terræ centrum magis quàm fluidum versus Lunam gravitet; quare, si hæc elevatio Solis actioni tribuatur, minor erit effectus quamvis actio Solis in Terram major sit quàm actio Lunæ in eamdem, Telluris enim semi-diameter T C vel T A fere evanescit respectu immensæ Solis a Terrâ distantiæ, ideóque fluidi in C locati gravitas versus Solem erit insensibiliter major gravitate Telluris versus eundem, et fluidi in A positi gravitas versus Solem erit insensibiliter minor gravitate Telluris versus eundem, quare figura sphæroidea indè genita parum intumescet ad vertices C et A, parumque in circulo B D deprimetur, attamen propter immensas Solis licet remotissimi vires, aliquis erit actionis solaris effectus.

in minorem. Et fluxuum differentia maxima incidet (o) in tempora solstitiorum; præsertim si Lunæ nodus ascendens versatur in principio Arietis. Sic experientiâ compertum est, quod æstus matutini tempore hyberno superant vespertinos, et vespertini tempore æstivo matutinos, ad Plymuthum quidem altitudine quasi pedis unius, ad Bristoliam verò altitudine quindecim digitorum: observantibus Colepressio et Sturmio.

Motus autem hactenus descripti mutantur aliquantulum per vim illam reciprocationis aquarum, quâ maris æstus, etiam cessantibus luminarium actionibus, posset aliquamdiu perseverare. Conservatio hæcce motûs impressi minuit differentiam æstuum alternorum; et æstus proximè post syzygias majores reddit, eosque proximè post quadraturas minuit. Unde fit ut æstus alterni ad Plymuthum ad Bristoliam non multò magis differant ab invicem quàm altitudine pedis unius vel digitorum quindecim; utque æstus omnium maximi in iisdem portubus, non sint primi a syzygiis, sed tertii. Retardantur etiam motus omnes in transitu per vada, adeo ut æstus omnium maximi, in fretis quibusdam et fluviorum ostiis, (p) sint quarti vel etiam quinti a syzygiis.

(o) * *In tempora solstitiorum.* Tunc enim in syzygiis utrumque luminare ab æquatore maximè declinat, atquè fluxuum differentia adhuc augebitur, si Lunæ nodus ascendens versatur in principio Arietis; nam præter declinationis Solis maximam, Luna quoque Soli conjuncta quantitate latitudinis maximæ in boream aut austrum magis declinat. Hinc fit fluctus borealis nobis vicinissimus et fluctus australis remotissimus in eâdem revolutione diurnâ.

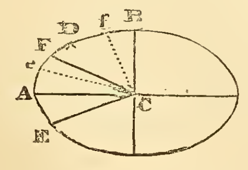
(p) * *Sint quarti vel etiam quinti.* In Opusculo de Mundi Systemate quædam occurrunt observationes quæ ad hunc locum pertinent, eas itaque exscribemus. Fieri etiam potest, inquit autor, ut æstus omnium maximus sit quartus vel quintus a syzygiis vel tardius adveniat, eò quod retardantur motus marium in transitu per loca vadosa ad littora. Sic enim æstus accedit ad littus occidentale Hiberniæ horâ tertiâ lunari, et post horam unam et alteram ad portus in littore australi ejusdem insulæ ut et ad insulas Cassiterides vulgò Sorling dictas. Dein successivè ad Falmuthum, Plymuthum, Portlandiam insulam, Vectam, Winchelseiam, Doveriam, ostium Tamesis et Pontem Londinensem, consumptis horis duodecim in hoc itinere. Sed et oceani ipsius alveis haud satis profundis impeditur æstuum propagatio, incidit enim æstus ad insulas Fortunatas et ad occidentalia marique Atlantico exposita littora Hiberniæ, Galliæ, Hispaniæ et Africæ totius usque ad Caput Bonæ Spei in horam tertiam lunarem, præterquam in locis nonnullis vadosis ubi æstus impeditus tardiùs advenit, inque freto Gaditano quod motu ex mari Mediterraneo propagato citiùs æstuat; pergendo verò de his littoribus per oceani latitudinem ad oras Americæ, accedit æstus primò ad Brasiliæ littora maximè orientalia circà horam lunarem quartam vel quintam; deindè ad ostium fluvii Amazonum horâ sextâ, ad insulas verò adjacentes horâ quartâ, posteà ad insulas Bermudas horâ septimâ et ad Floridæ portum S. Augustini horâ $7\frac{1}{2}$. Tardius igitur progreditur æstus per oceanum quàm pro ratione motûs Lunæ; et pernecessaria est hæcce retardatio ut mare eodem tempore descendat inter Brasiliam et Novam Franciam, ascendatque ad insulas Fortunatas et littora Europæ et Africæ et viceversâ. Namque mare ascendere nequit in uno loco quin simul descendat in altero. Lege jam descriptâ agitari quoque mare Pacificum verisimile est. Namque æstus altissimi in littore Chiliensi et Peruviano incidere dicuntur in horam tertiam lunarem, sed quâ velocitate propagantur inde ad littus orientale Japoniæ et ad insulas Philippinas cæterasque regno Sinarum adjacentes nondum reperi.

108. In alveis fluminum pendet influxus et refluxus a fluminum cursu. Nam cursus ille facit aquam tardiùs influere ex mari, et in mare citius et velocius refluere atquè adeò diutius refluere quàm influere, præsertim si longè in flumen ascenditur ubi minor est vis maris. Sic in fluxio Avonæ ad tertium lapidem infrà Bristoliam refert Sturmius aquam horis quinis influere, septenis refluere suprà Bristoliam, ut ad Canesham vel Bathoniam differentia procul dubio major est. Pendet etiam hæc differentia a magnitudine fluxûs et refluxûs. Nam prope luminarium syzygias, vehementior maris motus facilius

Porro fieri potest ut æstus propagetur ob oceano per freta diversa ad eundem portum, et citius transeat per aliqua freta quàm per alia: quo in casu æstus idem, in duos vel plures successivè advenientes divisus, componere possit motus novos diversorum generum. Fingamus æstus duos æquales a diversis locis in eundem portum venire, quorum prior præcedat alterum spatio horarum sex, incidatque in horam tertiam ab appulsu Lunæ ad meridianum portus. Si Luna in hocce suo ad meridianum appulsu versabatur in æquatore, venient singulis horis senis æquales affluxus, qui in mutuos refluxus incidendo eosdem affluxibus æquabunt, et sic spatio diei illius efficient ut aqua tranquillè stagnet. Si Luna tunc declinabat ab æquatore, fient æstus in oceano vicibus alternis majores et minores, uti dictum est; et inde propagabuntur in hunc portum affluxus bini majores et bini minores, vicibus alternis. Affluxus autem bini majores component aquam altissimam in medio inter utrumque, affluxus major et mi-

superando resistentiam fluminum faciet aquam citius ac diutius influere, adeóque minuet hanc differentiam: intereà verò dum Luna ad syzygias properat, necesse est ut flumina ob cursus suos per magnitudinem æstuum impeditos magis impleantur et propterea maris refluxum paulò magis impediant proximè post syzygias quàm proximè antè. Eâ de causâ æstus omnium tardissimi non incident in ipsas syzygias, sed paulò præcedent. Dixi æstus etiam antè syzygias retardari vi Solis. Conjungatur causa utraque, et æstuum retardatio et major erit et syzygias magis præcedet. Quæ omnia ità se habere colligo ex tabulis æstuum quas Flamsteedius ex observationibus quamplurimis construxit.

109. Æstuum magnitudo non parum etiam pendet a magnitudine marium, ut in Opusculo citato observat clariss. autor. Sit C centrum Terræ, E A D B oblonga maris figura, C A semi-axis major, C B semi-axis minor priori in-



sistens ad angulos rectos. Sumatur D punctum medium inter A et B, sitque E C F, vel ipsi æqualis e C f angulus ad centrum Terræ, quem subtendit latitudo maris littoribus E, F, vel e, f, terminari; versetur autem punctum A, in medio inter puncta E, F, et punctum D in medio inter puncta e, f. Si per differentiam altitudinum C A, C B, exponatur quantitas æstûs in mari satis profundo Terram totam cingente, excessus altitudinis C A super altitudinem C E vel C F designabit maximam quantitatem æstûs in medio maris E F littoribus E, F terminati, et excessus altitudinis C e super altitudinem C f, exponet maximam quantitatem æstûs ad littora ejusdem maris. (Nam, differentia inter diametrum bisecantem angulum datum quem faciunt duæ diametri ellipseos et alterutram ex illis diametris major esse non potest ex naturâ ellipseos quàm si illa diameter bisecans sit semi-axis major et differentia inter illas duas ipsas diametros angulum datum constituentes major esse nequit quàm si diameter angulum bisecans faciat angulum cum axe semi-rectum.) Unde patet æstus ad littora esse propèmodum ut maris latitudo E F, arcu quadrantali non major. Hinc fit ut nullus aut ferè nullus observetur aquarum motus in maribus non satis latè patentibus, nisi cum oceano ipso liberè communicent. Si enim nihil aut parum cum oceano communicent, ut accidit in mari Mediterraneo, æstus quoquè eam ob causam minor deprehenditur. Hinc est etiam quod prope æquatorem ubi mare inter Africam et Americam angustum est, æstus sint multo minores quàm hinc inde in zonis temperatis ubi maria latè patent, et in maris Pacifici littoribus fere singulis tam Americanis quàm Sinicis et intrà tropicos et extrà. Contingere tamen potest ut æstus qui in oceano mediocris est, in fluviis evadat maximus propter transitûs angustias littorumque seorsim coëuntium convergentiam. Hæc de maris æstu pro præsenti dicta sint: de hâc nobilissimâ inter physicos quæstione plurima in decursu, ubi recurret occasio, adjungemus. Prolixius foret prosequi factas a diligentissimis philosophis æstuum observationes; legantur quæ huc et illuc tum in Transact. Angl. tum in Mon. Paris. dispersa inveniuntur, sed ea præsertim quæ clariss. viri Halleius Num. 226. Transact. et Cassinus in Mon. Paris. an. 1712. 1713. scripta reliquerunt.

nor faciet ut aqua ascendat ad mediocrem altitudinem in medio ipsorum, et inter affluxus binos minores aqua ascendet ad altitudinem minimam. Sic spatio viginti quatuor horarum, aqua non bis ut fieri solet, sed semel tantum perveniet ad maximam altitudinem et semel ad minimam: et altitudo maxima, si Luna declinat in polum supra horizontem loci, incidet in horam vel sextam vel tricesimam ab appulsu Lunæ ad meridianum, atque Lunæ declinationem mutante mutabitur in defluxum. Quorum omnium exemplum in portu regni Tunquini ad Batsham sub latitudine boreali 20 gr. 50′. Halleius ex nautarum observationibus patefecit. Ibi aqua die transitum Lunæ per æquatorem sequente stagnat, dein Lunâ ad boream declinante incipit fluere et refluere, non bis, ut in aliis portubus, sed semel singulis diebus; et æstus incidit in occasum Lunæ, defluxus maximus in ortum. Cum Lunæ declinatione augetur hic æstus, usque ad diem septimam vel octavam, dein per alios septem dies iisdem gradibus decrescit, quibus antea creverat; et Lunâ declinationem mutante cessat, ac mox mutatur in defluxum. Incidit enim subinde defluxus in occasum Lunæ et affluxus in ortum, donec Luna iterum mutet declinationem. Aditus ad hunc portum fretaque vicina duplex patet, alter ab oceano Sinensi inter Continentem et insulam Luconiam, alter a mari Indico inter Continentem et insulam Borneo. An æstus spatio horarum duodecim a mari Indico, et spatio horarum sex a mari Sinensi per freta illa venientes, et sic in horam tertiam et nonam lunarem incidentes, componant hujusmodi motus; sitne alia marium illorum conditio, observationibus vicinorum littorum determinandum relinquo.

Hactenus causas motuum Lunæ et marium reddidi. De quantitate motuum jam convenit aliqua subjungere.

EDITOR LECTORI.

FELICIUS commentari non possumus ea quæ tradit autor noster de Maris Æstu, quàm huic propositioni subjungendo eas dissertationes quæ præmio fuêre condecoratæ a celebri Parisiensi Scientiarum Academiâ. Id quidem primum nobis fuerat propositum, ut ea quæ in illis dissertationibus momentosiora viderentur et ad Newtonianæ philosophiæ illustrationem pertinerent, brevi compendio comprehensa notis adjiceremus; verùm trunca ac ingenii nostri vitio detrita exhibere hæc illustrissimorum virorum scripta meritò piguit, et non dubitavimus nos meliùs consulturos tùm lectoribus nostris, tùm ipsis eorum scriptorum authoribus, si qualia sunt edita hîc illa insereremus: cùmque authorum a typothetis absentiâ factum sit ut in editione Parisinâ plurima irrepserint menda, nullo errorum catalogo correcta, ea demonstrationibus ac calculis accuratè repetitis emendavimus, figurasque ad loca, quibus respondent, aptari curavimus.

Quatuor quidem dissertationes Parisinis typis fuerunt evulgatæ, quarum prior a Patre Cavallieri Jesuitâ, secunda a Daniele Bernoullio, tertia a D. D. Mac-Laurino, quarta a Leonardo Eulero fuêre ad Academiam missæ. Prior in eo occupatur ut Cartesianæ hypotheseos circa causam æstûs marini vitia et hiatus corrigat et resarciat, quod quidem ingeniosè admodum præstat; tres reliquæ ex legibus gravitatis aquarum Maris in Solem, Lunam et Terram, omnes phænomeni propositi circumstantias explicant et calculis determinant: has ergo tres, omissâ priore, hujus esse loci credidimus.

In dissertatione Mac-Laurini occurrit solutio synthetica Problematis de figurâ Terræ, quale illud proposueramus in notis nostris ad Prop. XIX. quodque parum felici successu analyticè solvere tentaveramus; ex ejus solutione patet meridianum esse veram ellipsim in hypothesi quòd Terra sit homogenea: cùm autem hæc in manus nostras non devenerint, nisi cùm notæ ad eam Propositionem XIX. prælum subiissent, inde fac-

tum est ut in iis notis de illo Problemate ut nondum soluto egerimus: quæ in his tribus dissertationibus ingeniosa sunt, enumerare longiùs foret; intelligit lector quæ sint ipsi speranda a tantis viris, et quàm facilis, his intellectis et perlectis, futurus sit transitus ad ea quæ sequuntur de Lunæ motu, de præcessione æquinoctiorum, aliisque; lectorem itaque rogamus ut nobis vitio non vertat, quod typographo indulserimus hæc qualia sunt edere, ne, et ipse lector et typographus, eam paterentur moram quæ ad condendam epitomem istarum dissertationum necessaria fuisset.

TRAITE

SUR

LE FLUX ET REFLUX DE LA MER.

PAR MR. DANIEL BERNOULLI PROFESSEUR D'ANATOMIE ET DE BOTANIQUE À BASLE.

Devise—*Deus nobis hæc otia fecit.*

Pour concourir au Prix de 1740.

CHAPITRE PREMIER.

Contenant une introduction à la question proposée.

I.—Dans le grand nombre des systêmes sur le Flux et Reflux de la Mer, qui sont parvenus à notre connoissance depuis l'antiquité la plus reculée, il n'y a plus que ceux des Tourbillons et de l'Attraction ou Gravitation mutuelle des corps célestes et de la Terre, qui partagent encore les philosophes de notre tems : l'un et l'autre de ces systêmes ont eu les plus grands hommes pour défenseurs, et ont entraîné des nations entieres dans leur parti. Il semble donc que tout le mérite qui nous reste à espérer sur cette grande question, est de bien opter entre ces deux systêmes, et de bien manier celui qu'on aura choisi pour expliquer tous les phénomenes qu'on a observés jusqu'ici sur le Flux et Reflux de la Mer, pour en tirer de nouvelles propriétés, et pour donner des uns et des autres les calculs est le mesures.

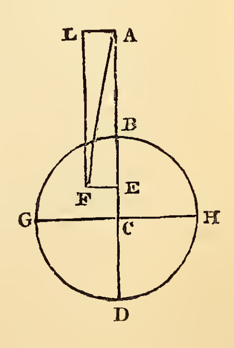
II.—J'ai commencé d'abord par l'idée de Kepler, qu'on nomme avec justice le Pere de la vraie philosophie. Elle est fondée sur l'Attraction ou Gravitation mutuelle des corps célestes et de la Terre : cet incompréhensible et incontestable principe, que le grand Newton a si bien établi, et qu'on ne sçauroit plus revoquer en doute, sans faire tort aux sublimes connoissan-

ces et aux heureuses découvertes de notre siécle. Après un examen fort scrupuleux, j'ai vû que cette gravitation mutuelle, considérée dans les globes de la Terre, de la Lune et du Soleil, nonseulement pouvoit produire tous les phénomenes du Flux et Reflux de la Mer, mais même qu'elle le devoit necessairement, et qu'elle le devoit: suivant toutes les loix qu'on a observées jusqu'ici. Avec ces heureux succès, j'ai poussé mes recherches aussi loin qu'il m'a été possible de les porter. En chemin faisant, je suis tombé sur les Théoremes de M. Newton, dont je n'avois pû gueres voir la source auparavant; mais en même tems j'ai remarqué le peu de chemin qu'on a encore fait dans cette matiere, et même l'insuffisance de la méthode usitée, lorsqu'elle est appliquée à des questions un peu détaillées. J'ai suivi une toute autre route; j'ai poussé mes recherches bien plus loin, et je suis entré dans un détail tel que l'Academie m'a paru le demander; et je dois dire à l'avantage des principes que nous adopterons, que j'ai trouvé par-tout un accord merveilleux entre la théorie et les observations, accord qui doit être d'autant moins suspect, que je n'ai consulté les observations, qu'après avoir achevé tous mes calculs, de maniere que je puis dire de bonne foi, d'avoir deviné la pluspart des observations, sur lesquelles je n'étois pas trop bien informé, lorsque j'ai entrepris cet ouvrage.

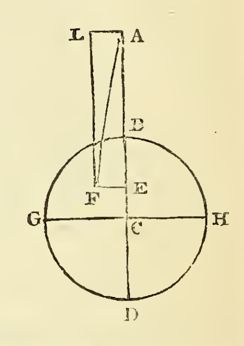
III.—Quant aux tourbillons, j'avouë qu'il est bien difficile d'en demontrer le faux à ceux qui veulent s'obstiner à les défendre: mais aussi il n'en est pas de la physique, comme de la géometrie. Dans celle-ci on n'admet, ni ne rejette rien, que ce dont on peut absolument démontrer la vérité ou la fausseté, pendant que dans la physique il faut se rapporter souvent à un certain instinct naturel de sentir le faux et le vrai, après avoir bien pesé toutes les raisons de part et d'autre. Quant à moi, je ne trouve point ce caractere de vérité, ni dans l'hypothese des tourbillons, ni dans les conséquences que l'on en tire. Si nous disons que le tourbillon a la même densité, la même direction et la même vitesse que la Lune, ce tourbillon ne sçauroit faire aucun effet; et si au contraire nous supposons ces trois choses n'être pas les mêmes de part et d'autre, il me paroît bien clair et bien certain, que l'effet du tourbillon devroit se manifester infiniment davantage dans le mouvement de la Lune, que dans celui des eaux de la Terre. Cependant on sçait parfaitement bien que la Lune, quoique subjette à beaucoup d'irrégularités dans ses mouvemens, n'en a aucune qui puisse être attribuée à l'action aussi sensible d'un tourbillon. Si nous passons par dessus toutes ces différentes difficultés, nous en rencontrerons d'autres également embarassantes. C'est contre les loix de

l'hydrostatique, que la Lune, qui nage dans le tourbillon, puisse causer des variations dans la compression des parties du fluide. C'est une propriété essentielle des fluides de se remettre aussi-tôt à l'equilibre, lorsque ses parties en sont sorties. Si une colonne de tourbillon, entre la Lune et la Terre, étoit plus comprimée qu'une autre colonne semblable, rien ne sçauroit empêcher ses parties de s'échaper de côté jusqu'au retablissement de l'equilibre. Qu'on s'imagine, par exemple, l'air de notre atmosphere tout d'un coup extrêmement échauffé; ce changement feroit en même tems hausser à proportion le mercure dans le barometre, puisque l'air chaud a plus de ressort que l'air froid; mais comme rien n'empêche l'air de s'échaper de côté jusqu'à la parfaite conservation de l'equilibre, cela fait qu'un tel changement n'en sçauroit faire aucun sur le barometre; aussi n'observe-t-on dans le barometre aucune variation du jour à la nuit, qui cependant, par un raisonnement tout-à fait semblable à celui des tourbillonnaires pour expliquer les marées, devroit être trèssensible. Pareillement si les eaux d'une riviere donnent contre un pieu, on ne remarquera aucune différence dans la surface des eaux, que bien près du pieu, et le fond du lit de la riviere sera toujours également pressé. En voilà assez et trop sur cette matiere; car ce sera toujours aux sectateurs de Descartes de montrer l'esset des tourbillons sur l'océan, avec la même clarté qu'on peut le faire, moyennant le principe de Kepler, principe d'ailleurs qui n'est plus contesté; sçavoir, que la Terre et tous les corps célestes ont une tendance mutuelle à s'approcher les uns des autres. Ce principe posé, il est facile de faire voir, que la Terre que nous supposerons devoir être sans cette tendance parfaitement ronde, en changera continuellement sa figure, et que c'est ce changement de figure qui est la cause du flux et reflux de la mer: comme ce changement dans la figure de la surface de la Terre est produit de differentes façons, j'en ferai ici un dénombrement, et je tâcherai dans la suite d'en donner la mesure.

IV.—Si A est le centre de la Lune, ou du Soleil: B G D H la Terre; si l'on tire par les centres de la Lune ou du Soleil et de la Terre la droite A D, et qu'on prenne au dedans de la Terre un point quelconque F, on tirera F E perpendiculaire à B D, avec la droite F A, et on achevera le rectangle F L A E. Chaque point F est tiré ou poussé vers A, et cette force étant representée par F A, elle sera considérée comme composée des deux laterales F L et F E:



cela étant, on voit que la force F E étant appliquée dans chaque point de la Terre, ne sçauroit que l'allonger autour de B D: et comme c'est une même raison pour tous les plans qui passent par B D, il est clair que la Terre formera ainsi un sphéroïde produit par la rotation d'une courbe B G D autour de B D.



On remarquera, que cet allongement ne sçauroit être qu'extrêmement petit. *Premierement*, à cause de la petitesse des lignes F E par rapport à F A. *En second lieu*, à cause du peu de rapport qu'il y a entre la pesanteur du point F vers A, à la pesanteur du même point vers le centre de la Terre C. Nous verrons dans la suite que cet allongement ne peut aller qu'à un petit nombre de pieds, ce qui est fort peu considérable, par rapport au diametre de la Terre.

On remarquera encore, que l'allongement total étant imperceptible par rapport au diametre de la Terre, la différence des allongemens pour l'hemisphere supérieur G B H, et pour l'inférieur G D H, doit être insensible par rapport à l'allongement total; à la rigueur, il faudroit dire, que les forces exprimées par F E, sont tant soit peu plus grandes dans l'hemisphere G B H, que dans l'hemisphere opposé, dont les parties sont plus éloignées du point A, et qu'ainsi ledit hemisphere G B H sera un peu plus allongé que l'autre hemisphere: mais on sent bien que la différence doit être insensible. On peut donc prévoir que les poles B et D resteront également éloignés du point C, et que la courbe G B H pourra être censée la même que G D H. Nous donnerons un calcul juste et détaillé de tout cela dans la suite de ce traité.

Venons à une seconde considération, qui produira le même resultat, que celle dont nous venons de parler.

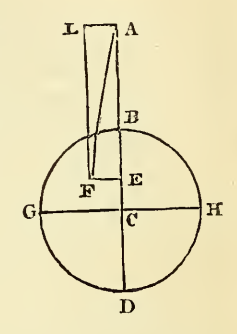
V.—Comme la Terre tâche continuellement à s'approcher du Soleil et de la Lune, il faut qu'il y ait en même tems d'autres forces qui la retiennent; et ce sont les forces centrifuges de la Terre, qu'elle a par son mouvement autour du Soleil, et autour du centre de gravité (je l'appelle ainsi, pour me conformer à l'usage) qui est entre la Terre et la Lune. Je démontrerai aussi ci-dessous, que cette force centrifuge doit être supposée egale dans toutes les parties de la Terre, et parallele à la ligne A D, pendant que l'autre force se répand inégalement sur les parties de la Terre. Elle est plus grande dans les parties les plus proches de A, et plus petite dans les parties qui en sont plus éloignées, et cela en raison

quarrée reciproque des distances. Cette raison supposée, le calcul fait voir, que pourvû que les couches concentriques de la Terre autour du point C, soient homogenes, la force moyenne, qui pousse les parties de la Terre vers A, est précisément celle qui répond au centre de la Terre C; et que c'est dans ce centre C, où la force centrifuge est précisément égale à la force centripete. Ainsi chaque partie qui est entre C et B, est plus poussée vers A, qu'elle n'est repoussée; et au contraire chaque partie située entre C et D, est moins poussée vers A, qu'elle n'est repoussée; de sorte qu'en s'imaginant deux canaux communiquans entre eux G H et B D, on voit que chaque goute dans la partie C B, est tirée vers A, et que chaque goute dans la partie C D, est poussée dans un sens contraire. Cela diminue l'action de la pesanteur vers le centre de la Terre dans le canal B D, pendant que cette même pésanteur n'est pas diminuée dans le canal G H, d'où il arrivera encore un allongement autour de l'axe B D, ce que je m'étois proposé de faire voir.

Le calcul montre que cette raison est en soi-même de fort peu d'importance; qu'elle ne sçauroit allonger l'axe B D considérablement. Mais son resultat est assez comparable avec celui de l'allongement exposé auparavant. On prévoit d'ailleurs encore que l'allongement produit par cette raison, doit être égal dans les canaux B C et C D, la différence ne pouvant être sensible; et ainsi les points B et D resteront encore également éloignés du centre C.

VI.—Une troisiéme raison, qui peut allonger davantage l'axe B D, est que par l'allongement même, produit par les deux causes précedentes, pesanteur terrestre qui fait descendre tous les corps vers le centre C, est changée. Cette pesanteur peut être considérée comme égale dans les canaux G C et B C, ou D C à des distances égales du centre C, tant que la Terre est supposée sphérique; mais cette sphéricité ôtée, il est naturel que cette égalité ne pourra plus subsister. Il est aussi vraisemblable que la pesanteur est diminuée dans les canaux C B et C D, et qu'ainsi l'axe doit encore être prolongé. Pour calculer cet allongement, nous aurons recours au systême de M. Newton, qui suppose la pesanteur produite par l'attraction commune de la matiere en raison quarrée reciproque des distances. Ce n'est pas que je croye cette hypothese bien démontrée; car la conclusion de la gravitation mutuelle des corps du systême du monde en raison quarrée reciproque des distances, qu'on ne sçauroit plus nier, à une semblable attraction universelle de la matiere, de laquelle M. Newton déduit la pésanteur; cette conséquence, dis-je, demande beaucoup d'indulgence. Mais je l'adopterai pour ce sujet,

parce que tous les autres systêmes sur la pesanteur me seroient inutiles: c'est le seul, qui étant du ressort de la géometrie, donne des mesures assurées et fixes; et il est d'ailleurs digne de l'attention de tous les géometres et physiciens.



VII.—Les trois causes que je viens d'exposer, comme pouvant et devant allonger la Terre autour de la ligne qui passeroit par le centre du Soleil et de la Lune, sont d'une force assez égale; de sorte qu'il faudra tenir compte de toutes, quoique chacune soit si petite, qu'elle ne sçauroit allonger la Terre au delà d'un petit nombre de pieds, et peut-être moins d'un pied. Il sera bon de remarquer ici que ce qui, après le calcul, exprime les dits allongemens, est toujours un certain multiple, ou sous-multiple de $\frac{b}{a}\frac{g}{G} \times b$, entendant par b le rayon de la Terre, par a la distance du luminaire en question, et par $\frac{g}{G}$ la raison qui est entre la pesanteur d'un corps placé en B vers A, et sa pesanteur vers C, laquelle raison est extrêmement petite.

J'ai jugé à propos d'alleguer ici cette formule, que le calcul m'a enseigné, afin que ceux qui voudroient le faire après moi, sçachent d'abord quels termes on peut rejetter, comme inutiles, qui rendent les calculs extrêmement pénibles, et qui se trouvent au bout du calcul, n'être d'aucune importance. Ce seroit une chose ridicule, de vouloir faire ici attention à des parties d'une ligne qui proviendroient, si la dite quantité $\frac{b}{a}\frac{g}{G} \times b$ étoit encore multipliée par $\frac{b}{a}$, ou par $\frac{g}{G}$.

VIII.—Notre dessein est d'abord de chercher et d'exprimer analytiquement les allongemens dont nous venons de parler. On peut les trouver par rapport aux deux premieres causes, indépendamment de la figure de la Terre; mais par rapport à la troisiéme cause exposée au fixiéme article, il faut supposer la Terre, c'est-à-dire, le méridien B G D H d'une figure donnée; et c'est l'hypothese la plus naturelle, de la supposer elliptique, ayant pour axes les lignes B D et G H; quelle qu'elle soit, elle n'en sçauroit être sensiblement différente, et si elle l'étoit, cela ne sçauroit produire un changement bien considérable sur le rapport des deux axes B D et G H, que nous cherchons. Outre cela nous verrons

que c'est ici un Probléme, qui dépend encore de la loi des changemens dans les densités des couches de la Terre. M. Newton suppose la Terre par-tout homogene. Il ne l'a fait apparemment, que pour faciliter le Problême, qui est affez difficile dans toute autre hypothese. Mais cette supposition de M. Newton n'a aucune vraisemblance; je dirai même, qu'elle seroit fort peu favorable à notre systême, comme nous le verrons dans la suite. C'est pourquoi je n'ai pas voulu restreindre si fort la solution du Problême en question. J'ai cru que je payerois trop cher l'avantage d'applanir les difficultés du Problême, et les peines du calcul. J'ai donc rendu notre question infiniment plus générale, pour en tirer tous les Corollaires, et pour choisir ceux qui conviennent le plus à notre sujet, et qui rendront par là même plus vraisemblables les hypotheses, auxquelles ils appartiennent.

IX.—Voici à present nos hypotheses. Nous considererons la Terre, comme naturellement sphérique, et composée des couches concentriques: nous supposerons ces couches homogenes, chacune dans toute son étendue; mais qu'elles sont de différentes densités entre elles, et que la loi des variations de leur densité soit donnée. Quant à la sphericité de la Terre, que nous supposerons, on voit bien qu'il seroit ridicule de s'y arrêter, puisque l'élevation des eaux de l'océan, causée par les deux luminaires, ne sçauroit différer sensiblement, que la Terre soit un peu applatie, ou un peu allongée. La supposition de l'homogénéïte des couches concentriques, ne doit pas non plus nous faire de la peine, puisqu'on ne sçauroit donner aucune raison, pourquoi elles devroient être hétérogenes.

CHAPITRE II.

Contenant quelques lemmes sur l'Attraction des Corps.

I.—Je prie encore une fois le lecteur, de ne considérer ce chapitre, que comme hypothétique. Je ne suppose l'attraction universelle de la matiére, que parce que c'est la seule hypothese, qui admette des calculs, et qu'elle est d'ailleurs assez bien fondée, pour mériter l'attention de tous les philosophes du monde.

On appelle au reste attraction qu'exerce un corps A sur un corps B, la force accéleratrice, que le corps B acquiert à chaque instant, en tom-

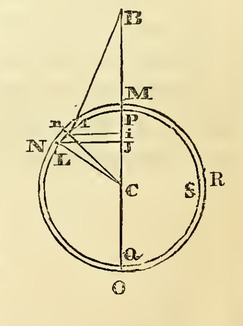
bant vers A. On voit donc que l'effet de l'attraction du corps A sur le corps B, est de communiquer à celui-ci une pesanteur, qu'on suppose proportionnelle à la masse du corps A divisée par le quarré de la distance; et cette pesanteur doit encore être multipliée par la masse du corps B, pour avoir la force que ce corps exerce s'il est empêché de s'approcher du corps A.

PROBLEME.

II.—Soit une couche sphérique homogene, infiniment mince, et d'une épaisseur égale, comprise entre les surfaces sphériques M N O R et P L Q S, trouver l'attraction, ou la force accéleratrice, que cette couche exercera sur un corps placé au point B, pris hors de la surface extérieure.

SOLUTION.

Qu'on tire la droite B O par le point B et le centre C, dans laquelle on prendra deux points infiniment proches J et i: on tirera ensuite les deux perpendiculaires J L et i l, et par les points L et l, on tirera du centre les droites C N et C n. Soit à présent C B = a; C J = x; J i = d x; C P = b; P M ou L N (que nous regardons comme infiniment petite) = $\mathfrak{c}$: la densité de la matiere de la couche = m.



On voit que pendant la révolution autour de l'axe M O, la petite partie N L l n garde toujours une même distance du point B, et que cette distance sera = $\sqrt{(a\,a - 2\,a\,x + b\,b)}$: or, comme il faut toujours diviser par le quarré des distances, il faudra pour trouver la force accéleratrice en question d'abord prendre $\frac{1}{a\,a - 2\,a\,x + b\,b}$, et cette quantité doit être multipliée par la raison de B i à B l, et on aura $\frac{a - x}{(a\,a - 2\,a\,x + b\,b)^{\frac{3}{2}}}$: et cette quantité doit encore être multipliée par la masse de l'anneau, que la partie N L n l forme par sa revolution, et la masse doit être exprimée par la densité m et la capacité de l'anneau, c'est-à-dire (en nommant n la raison de la circonférence d'un cercle à son rayon) par m × N L × L l × n × L J: ou par

$m \times \varsigma \times \frac{b\,d\,x}{\sqrt{(b\,b - x\,x)}} \times n \times \sqrt{(b\,b - x\,x)}$ ou enfin par $n\,m\,b\,\varsigma\,d\,x$; de sorte qu'on a la force accéleratrice absoluë produite par le dit anneau $= \frac{n\,m\,b\,\varsigma\,(a - x)\,d\,x}{(a\,a - 2\,a\,x + b\,b)^{\frac{3}{2}}}$, dont l'intégrale exprimera l'attraction cherchée de toute la couche. Pour trouver cette intégrale, nous supposerons $a\,a - 2\,a\,x + b\,b = y\,y$, et nous aurons $\int \frac{nmb\varsigma(a-x)dx}{(aa-2ax+bb)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{-nmb\varsigma(aa-bb+yy)\,dy}{2\,a\,a\,y\,y}$ $= \frac{n\,m\,b\,\varsigma}{2\,a\,a} \times \left(\frac{aa-bb-yy}{y} + C\right) = \frac{nmb\varsigma}{2aa} \times \left(\frac{2\,a\,x - 2\,b\,b}{\sqrt{aa - 2ax + bb}} + C\right)$, entendant par C une constante convenable : pour la trouver il faut remarquer, que l'intégrale doit être $= o$, lorsque $x = -b$, d'où l'on tire $C = \frac{2\,a\,b + 2\,b\,b}{a + b} = 2\,b$: substituant cette valeur, on obtient pour l'intégrale en question $\frac{n\,m\,b\,\varsigma}{a\,a}\left(\frac{a\,x - b\,b}{\sqrt{a\,a - 2\,a\,x + b\,b}} + b\right)$, et mettant enfin b à la place de x, on obtient la force accéleratrice cherchée $= \frac{2\,n\,m\,b\,b\,\varsigma}{a\,a}$.

C. q. f. t.

COROLLAIRE.

III.—Comme la quantité de la matiere de toute la couche (pour laquelle nous venons de déterminer la force accéleratrice, qu'elle exerce sur le corps placé au point B) est $= 2\,n\,m\,b\,b\,\varsigma$, nous voyons que cette force accéleratrice est exprimée par la quantité de matiere divisée par le quarré de la distance du point B au centre C, et par conséquent la même, que si cette quantité de matiere étoit concentrée au centre.

SCHOLIE.

IV.—On remarquera que cette solution n'a lieu, que lorsque le point B est placé hors de la couche, parce que dans notre calcul nous avons supposé, que chaque anneau formé par la revolution de la partie N L l n produit une force accéleratrice du même côté, ce qui n'a plus lieu, lorsque le point B est placé entre les deux surfaces, ou au-dedans de la surface intérieure. Je ne dirai rien de ces deux cas, dont chacun demande une solution particuliere, parce que nous n'en aurons pas besoin, et qu'ils ont déja été résolus par l'auteur de ces Problêmes. Je n'aurois même rien

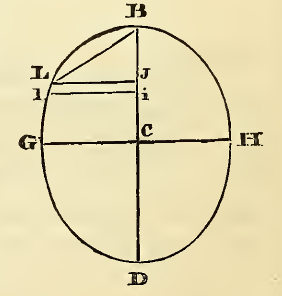
dit du cas que nous venons de résoudre, comme pareillement résolu par M. Newton, si je n'avois pas crû, qu'il étoit convenable de suivre toutes les traces qui nous menent à l'intelligence de notre question principale: aussi ces précautions sont-elles necessaires, pour pouvoir toujours exprimer d'une même façon les quantités constantes; et ainsi nous nous souviendrons toûjours dans la suite d'exprimer la force accéleratrice d'un corps infiniment petit, par la masse divisée par le quarré de la distance, et de dénoter la masse par le produit de son étenduë, et de sa densité.

PROBLEME.

V.—Trouver l'attraction pour un corps placé en B, causée par une sphere solide, composée de couches homogenes; mais de différentes densités entr'elles.

SOLUTION.

Il paroît par le troisiéme article, qu'on n'a qu'à concevoir la masse de toute la sphere ramassée au centre C, et qu'elle causera la même attraction, tant que le point B est hors de la sphere: nommant donc M la masse du globe, ou la somme des masses de toutes les couches, l'attraction cherchée sera $= \frac{M}{a\,a}$. C. q. f. t.



PROBLEME.

VI.—Soit B G D H une ellipse presque circulaire, c'est-à-dire, dont la différence des axes B D et G H soit regardée comme infiniment petite; et qu'on conçoive cette ellipse former par sa rotation autour de l'axe B D, un sphéroïde homogene. On demande la force accéleratrice, ou l'attraction que ce sphéroïde produira sur un corps placé au pole B.

SOLUTION.

Soit la densité de la matiere exprimée par μ; le petit demi-axe G C $= b$; le grand demi-axe B C $= b + \epsilon$; B J $= x$; J i $= d\,x$; on aura

la perpendiculaire $LJ = \frac{b + \epsilon}{b} \times \sqrt{2(b + \epsilon)x - xx}$. On voit facilement * que l'attraction causée par la couche, qui répond au rectangle $LJil$, est $= n\mu dx - n\mu dx \times \frac{BJ}{BL}$, c'est-à-dire, par $n\mu dx -$ $n\mu x dx : \sqrt{xx + \frac{bb}{(b + \epsilon)^2} \times (2bx + 2\epsilon x - xx)}$ ou par $n\mu dx -$ $(b + \epsilon) n\mu x dx : \sqrt{(2b\epsilon xx + \epsilon\epsilon xx + 2b^3 x + 2bb\epsilon x)}$: dans cette derniere quantité, nous rejettons le terme $\epsilon\epsilon xx$, comme devant être comparé aux infiniment petits du second ordre, et nous changerons le signe radical du dénominateur en signe exponentiel de numerateur; et de cette maniere nous aurons $n\mu dx - (b + \epsilon) n\mu x dx \times (2b^3 x + 2b\epsilon xx + 2bb\epsilon x)^{-\frac{1}{2}}$: or on sçait par la formation des suites de M. Newton, que $(2b^3 x + 2b\epsilon xx + 2bb\epsilon x)^{-\frac{1}{2}}$ est $= (2b^3 x)^{-\frac{1}{2}}$ $- (2b^3 x)^{-\frac{3}{2}} \times (b\epsilon xx + bb\epsilon x)$: substituant donc cette valeur, on obtient $n\mu dx - \frac{(b + \epsilon) n\mu x dx}{\sqrt{2b^3 x}} + \frac{(b+\epsilon) n\mu x dx (b\epsilon xx + bb\epsilon x)}{2b^3 x \sqrt{2b^3 x}}$, qui marque l'action de la couche formée par la rotation du rectangle $LJil$; à la place de cette quantité, on peut encore, en multipliant les quantites à multiplier, et rejettant les termes affectés de la seconde dimension de ϵ, poser $n\mu dx - \frac{n\mu dx \sqrt{x}}{\sqrt{2b}} - \frac{\epsilon n\mu dx \sqrt{x}}{2b\sqrt{b}} + \frac{\epsilon n\mu x dx \sqrt{x}}{2bb\sqrt{b}}$, et l'intégrale de cette quantité (qui doit être $= 0$, lorsque $x = 0$) est $=$ $n\mu x - \frac{2n\mu x \sqrt{x}}{3\sqrt{2b}} - \frac{\epsilon n\mu x \sqrt{x}}{3b\sqrt{2b}} + \frac{\epsilon n\mu xx \sqrt{x}}{5bb\sqrt{2b}}$; et faisant enfin $x =$ $2b + 2\epsilon$, on trouve, en rejettant toujours les infiniment petits du second ordre $2n\mu b + 3n\mu\epsilon - 2n\mu b - 2n\mu\epsilon - \frac{2}{3}n\mu\epsilon + \frac{4}{5}n\mu\epsilon$, ou bien enfin

$$\frac{2}{3}n\mu b + \frac{2}{15}n\mu\epsilon,$$

qui marque la force accéleratrice causée par l'action de tout l'ellipsoïde sur un petit corps placé au pole B. C. q. f. t.

PROBLEME.

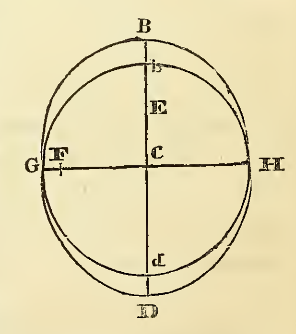
VII.—Les hypotheses étant les mêmes, que dans la Proposition précedente, trouver la même chose pour un petit corps placé en G, qui est sous l'equateur de l'ellipsoïde.

* Ceci se trouve demontré par le Cor. I. de la Prop. XC. du 1er. Livre de Mr. Newton; on y voit que l'attraction du point B par le cercle dont L J est le rayon, est $1 - \frac{BJ}{BL}$ qu'il faut multiplier par la masse du petit cylindre dont ce cercle est la base et dont J i est la hauteur, pour avoir l'attraction causée par la couche qui répond au rectangle L J i l.

SOLUTION.

Il est facile de démontrer par la géometrie, que toute section de l'ellipsoïde parallele à l'axe de rotation B D, fait une ellipse semblable à l'ellipse génératrice B G D H. Considérons l'ellipsoïde comme composée de la sphere inscrite, ayant pour diametre le petit axe G H, et de l'écorce formant un double menisque: l'action de la sphere doit être exprimée par $\frac{2}{3}$ n μ b, comme nous avons démontré au 5. §. Car la masse de cette sphere est $\frac{2}{3}$ n μ b^3, et la distance du point G au centre est = b. Il nous reste donc à chercher quelle action resulte du double menisque.

Concevons pour cet effet tout l'ellipsoïde partagé en couches paralleles et perpendiculaires à G H. Soit la distance du centre d'une de ces couches au point G = x; son épaisseur = d x; il n'est pas difficile de voir * que la capacité du bord de cette couche (qui fait partie du double menisque en question) est $= \frac{n\,\epsilon}{2\,b} \times (2\,b\,x - x\,x)\,d\,x$, et que ce bord étant multiplié par la densité μ, en donne la quantité de matiere $= \frac{n\,\mu\,\epsilon}{2\,b} \times (2\,b\,x - x\,x)\,d\,x$. Or toutes les parties de ce bord infiniment mince, peuvent être censées agir également, et avec une même obliquité sur le corps placé au point G: on n'a donc qu'a multiplier cette quantité de matiere par la raison de la distance du centre de la couche au point G à la distance du bord de la couche au même point G, et diviser par le quarré de cette distance, pour avoir l'attraction du bord de la couche, qui sera donc $\frac{n\,\mu\,\epsilon}{2\,b} \times (2\,b\,x - x\,x)\,d\,x \times \frac{x}{\sqrt{2\,b\,x}} \times \frac{1}{2\,b\,x}$, ou bien $\frac{n\,\mu\,\epsilon\,d\,x}{4\,b\,b\,\sqrt{2\,b}} \times (2\,b\,\sqrt{x} - x\,\sqrt{x})$ dont l'intégrale est $= \frac{n\,\mu\,\epsilon}{4\,b\,b\,\sqrt{2\,b\,b}} \times (\frac{4}{3}\,b\,x\,\sqrt{x} - \frac{1}{5}\,x\,x\,\sqrt{x})$ puisqu'il ne faut point ajoûter ici de constante; et pour avoir enfin l'attraction de tout le double menisque, il faut mettre x = 2 b, après quoi on aura simplement $\frac{4}{15}$ n μ ϵ. Si on ajoûte à cette quantité



* Car l'aire de l'ellipse éloignée de G de la quantité x est $\frac{n}{2\,b} \times \overline{b + \epsilon}\,(2\,b\,x - x\,x)$ et l'aire du cercle inscrit est $\frac{n}{2}\,(2\,b\,x - x\,x)$. Donc ôtant cette aire du cercle de celle de l'ellipse reste $\frac{n\,\epsilon}{2\,b}\,(2\,b\,x - x\,x)$ pour l'aire de menisque.

l'action de la sphere inscrite, on aura l'attraction cherchée de tout l'ellipsoïde sur un corps placé au point G $= \frac{2}{3} n \mu b + \frac{4}{15} n \mu \varsigma$. C. q. f. t.

COROLLAIRE.

VIII.—On voit par ces deux dernieres Propositions, que les forces accéleratrices au pole, et sous l'equateur dans un ellipsoïde homogene, sont comme $\frac{2}{3} n \mu b + \frac{2}{15} n \mu \varsigma$ à $\frac{2}{3} n \mu \varsigma + \frac{4}{15} n \mu \varsigma$, ou comme $5 b + \varsigma$ à $5 b + 2 \varsigma$, laquelle raison peut passer pour celle de 1 à $1 + \frac{\varsigma}{5 b}$. Je vois que cela est conforme à ce que M. Newton dit à la page 380. * des Princip. Math. Phil. Nat. edit. II. pour déterminer la proportion de l'axe de la Terre au rayon de son equateur. Quant à son raisonnement, il n'y a peut-être que lui, qui pût y voir clair; car ce grand homme voyoit à travers d'un voile, ce qu'un autre ne distingue qu'à peine avec un microscope.

LEMME.

Dans un sphéroïde elliptique homogene, la force accéleratrice pour un point quelconque, est à la force accéleratrice pour un autre point pris dans le même diametre, comme la distance du premier point au centre, à la distance pareille du second point.

† M. Newton a démontré cette Proposition à la 199 page de son Livre, que nous venons de citer: et comme il ne s'agit ici que de la proportion entre les deux forces accéleratrices, sans qu'il soit question de les exprimer analytiquement, il seroit superflu, pour mon dessein, de la démontrer à ma façon.

PROBLEME.

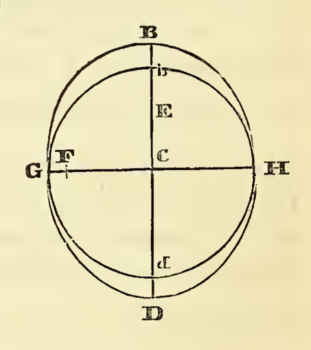
X.—Soit encore le double menisque, tel que nous l'avons décrit au septieme article, compris entre la surface de l'ellipsoïde G B D H, et G b H d, qui marque la surface de la sphere inscrite; il s'agit de trouver la force accéleratrice, que ce double menisque produira au point E, pris dans l'axe de rotation B D.

* Ceci se raporte à la page 60. et suiv. de ce Vol., et nous avons essayé d'éclaircir cet endroit de M. Newton dans la note (r) et suivantes.

† C'est le Cor. 3. de la Prop. XCI. du Livre 1er. Vol. 1er. pag. 400.

SOLUTION.

Nous garderons les dénominations de ci-dessus: or on voit qu'on trouvera l'action du double menisque, en prenant celle de tout l'ellipsoïde consideré comme homogene avec les menisques, et en retranchant celle de la sphere inscrite. L'action de tout le sphéroïde est en vertu des VI. et IX. Articles $= (\frac{2}{3} n \mu b + \frac{2}{15} n \mu \varepsilon) \times \frac{CE}{CB}$, et celle de la sphere $= \frac{2}{3} n \mu b \times \frac{CE}{Cb}$: de là on tire la force accéleratrice, qui convient aux menisques $= \frac{2}{3} n \mu b + \frac{2}{15} n \mu \varepsilon) \times \frac{CE}{CB} - \frac{2}{3} n \mu b \times \frac{CE}{Cb}$. Substituons à la place de $\frac{CE}{Cb}$ cette quantité



$\frac{CE}{CB - Bb}$, qui peut être censée égale à $\frac{CE}{CB} + \frac{Bb \times CE}{CB^2}$ (à cause que nous traitons la petite B b, comme infiniment petite, par rapport à C B) et nous trouverons la force accéleratrice pour les ménisques

$$= \frac{2}{15} n \mu \varepsilon \times \frac{CE}{CB} - \frac{2}{3} n \mu b \times \frac{Bb \times CE}{CB^2} = \frac{2}{15} n \mu \varepsilon \times \frac{CE}{CB} - \frac{2}{3} n \mu \varepsilon \times \frac{CE}{CB}$$

$$\left(\text{puisque } \frac{Bb}{CB} = \frac{\varepsilon}{b + \varepsilon} = \frac{\varepsilon}{b}\right) = -\frac{8}{15} n \mu \varepsilon \times \frac{CE}{CB}.$$ C. q. f. t.

COROLLAIRE.

XI.—Le signe négatif fait voir, que la gravitation au point E, causée par l'action des deux ménisques, se fait vers le pole B, et non vers le centre C. Au reste on remarquera, que cette Proposition n'est vraie que pour les points compris entre C et b, en excluant tous les points, qui sont au-delà de b; et cela à cause que le Lemme du IX. §. ne sçauroit être appliqué à trouver la force accéleratrice causée par l'action de la sphere pour le point E, si ce point est pris hors de la sphere inscrite au sphéroïde. Ainsi par exemple, au point B, la gravitation causée par les ménisques se feroit vers le centre avec une force accéleratrice $\frac{22}{15} n \mu \varepsilon$. Je restreins ces Propositions, quoique ma méthode suffise pour des solutions beaucoup plus générales; et cela pour ne me point engager dans des longueurs qui nous meneroient au-delà de notre sujet.

PROBLEME.

XII.—Trouver la même chose que dans l'Art. X. pour un point quelconque F, pris dans une ligne G H perpendiculaire à B D.

SOLUTION.

On obtient encore l'action des ménisques, en retranchant celle de la sphere de celle du sphéroïde. Or celle de la sphere est $= \frac{2}{3} n \mu b \times \frac{CF}{CG}$, et celle du sphéroïde $= (\frac{2}{3} n \mu b + \frac{4}{15} n \mu \text{c}) \times \frac{CF}{CG}$, en vertu des §. §. VII. et IX. Donc la gravitation au point F se fait vers le centre C par la simple action du double ménisque, et la force accéleratrice y sera $= \frac{4}{15} n \mu \text{c} \times \frac{CF}{CG}$. C. q. f. t.

XIII.—Voilà les Propositions qui nous seront nécessaires, pour mesurer les haussemens et baissemens des eaux dans la mer libre par l'action de l'un des deux luminaires, entant que ces variations répondent à la relation qui se trouve entre la pesanteur et la figure de la Terre. Ceux qui voudront employer l'analyse pure pour la solution de nos deux derniers Problêmes, se plongeront dans des calculs extrêmement pénibles, et verront par là l'avantage de notre méthode.

CHAPITRE III.

Contenant quelques considérations astronomiques et physiques préliminaires, pour la détermination du Flux et Reflux de la Mer.

Comme le flux et reflux de la mer dépendent de la Lune et du Soleil, on voit bien que notre sujet demande une exacte théorie du mouvement de ces deux luminaires. Quant au mouvement apparent du Soleil, on le connoit avec toute l'exactitude requise ici. Mais on est encore bien éloigné de sçavoir avec la même précision la théorie de la Lune, qui est cependant d'une plus grande importance. Une idée qui m'est venuë ladessus, d'employer le principe de la conservation de ce que l'on appelle

communément *forces vives* (principe déja employé sous un autre nom par le grand et incomparable M. Huyghens, pour trouver les loix du choc des corps parfaitement élastiques, et auquel on est redevable d'une grande partie des connoissances nouvelles dans la dynamique, tant des fluides, que des solides:) cette idée, dis-je, m'a conduit par un chemin fort abregé, à déterminer beaucoup plus exactement, que l'on n'a fait jusqu'ici, les mouvemens de la Lune, que l'on appelle communément irréguliers, mais qui sont tous sujets aux loix méchaniques. Je m'étois proposé d'inserer ici ma nouvelle théorie sur la Lune; mais, comme notre sujet n'est déja que trop étendu, et qu'il demande des discussions assez pénibles, je la differerai à une autre occasion, où je la donnerai en forme d'addition, si l'Académie trouve ce traité digne de son attention. Je ne ferai donc ici qu'indiquer en gros les connoissances tirées du systême du monde, qui servent à donner un systême général du flux et reflux de la mer; et quand nous viendrons au détail, nous supposerons les mouvemens de la Lune parfaitement connus.

II.—On sçait que la Lune et la Terre font un systême à part: l'un et l'autre de ces corps tournent autour d'un point, et font leur revolution dans un même tems, décrivant chacun une ellipse: l'action du Soleil sur l'un et l'autre corps, change un peu ces ellipses, et fait même que la proportion des distances du dit point aux centres de la Lune et de la Terre, ne demeure pas exactement le même: mais, comme nous ne prétendons jusqu'ici que d'exposer en gros les choses nécessaires à notre question, nous ne ferons point d'attention à ces inégalités, et considérerons la Terre et la Lune, comme faisant des ellipses parfaites et semblables entre elles autour d'un même point.

III.—Par la dite revolution, les deux corps tâchent à s'éloigner l'un de l'autre; et cet effort est contrebalancé par leur gravitation mutuelle: et comme la Terre fait autant d'effort pour s'approcher de la Lune, que celle-ci en fait pour s'approcher de la Terre, il faut que les forces centrifuges soient aussi égales: d'où il suit que le point autour duquel ces deux corps tournent, doit être placé, en sorte que les forces centrifuges soient égales: c'est là la premiere idée. Il vaudroit donc mieux appeller ce point, *centre de forces centrifuges*, ou bien, puisque les vitesses gardent dans notre hypothese une proportion constante, *centre de masses*, que *centre de gravité*. Il est vrai que ces mots reviennent au même, à prendre celui du centre de gravité dans le sens commun: mais quelle idée y peut-on attacher, lorsque la pesanteur est inégale dans les différentes parties du corps? Il n'y a aucun point alors, qu'on puisse nommer

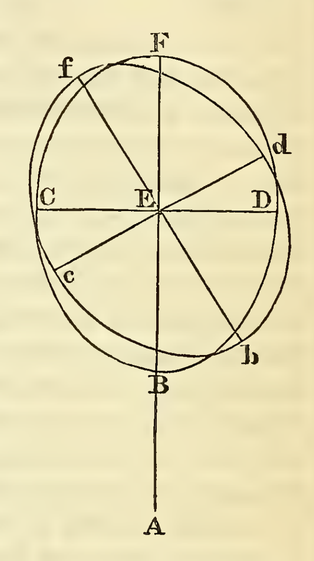
tel, quelque définition qu'on donne à ce mot. Quoi qu'il en soit, il est certain que les distances du point en question aux centres de la Terre et de la Lune, sont en raison reciproque des masses ou quantités de matiére de ces corps.

IV.—Si la Lune et la Terre étoient des corps parfaitement homogenes dans toute leur étenduë, ou du moins chacun composé de couches concentriques parfaitement homogenes, et qu'ils fussent parfaitement sphériques, sans avoir aucun mouvement, imprimé originairement, ou produit par une cause physique, autour d'un axe passant par leur propre centre de gravité, il est clair, que toutes les parties des corps garderoient pendant leur revolution un parallélisme; de sorte que les deux corps vûs du centre de gravité commun, paroîtroient faire précisément le tour en sens contraire autour d'un axe perpendiculaire au plan des orbites, pendant chaque revolution des corps. Cependant cela ne se fait point dans la Lune: car nous sçavons qu'elle nous montre constamment une même face (je ne fais pas encore attention à quelques legers changemens;) et cela est contraire au parallélisme, que nous venons d'alléguer: quoique ce ne soit pas ici proprement l'endroit pour expliquer ce phénomene de la Lune, je ne laisserai pas de le faire, pour nous préparer à ce que nous aurons à dire sur la Terre, comme essentiel à notre matiere.

V.—Considérons donc, que la parfaite homogénéïté dans les couches concentriques de la Lune, aussi bien que sa parfaite sphéricité, sont moralement impossibles: mais il n'est pas encore expliqué, comment on peut déduire de là, pourquoi la Lune nous montre toujours une même face. Il ne suffit pas de dire que le centre de gravité de la Lune pris dans le sens commun, tâche toûjours à s'éloigner, le plus qu'il est possible, du centre de revolution. Quelques inégales que fussent les couches, et quelque irréguliere que fut la figure, la Lune garderoit toujours le parallélisme des faces, s'il n'y avoit pas une autre raison; sçavoir, celle de l'inégalité de pesanteur de ses parties vers la Terre: les parties ayant d'autant plus de pesanteur, qu'elles sont plus près de la Terre: c'est cette raison, qu'il faut joindre à l'une des deux autres, ou à toutes les deux ensemble; de sorte que quand même la Lune seroit parfaitement homogene, sa seule figure, jointe à l'inégalité de pesanteur de ses parties vers le centre de la Terre, pourroit même produire le phénomene en question.

Soit A le centre de la Terre: B C F D, par exemple, une ellipse, dont l'axe B F soit le plus grand, et C D le plus petit: que cette ellipse

forme par sa revolution autour de l'axe B F, le corps de la Lune. Supposons après cela la Lune homogene et mobile autour de son centre E, et servons-nous de l'hypothese ordinaire, que la pesanteur de chaque partie de la Lune vers A, soit en raison quarrée reciproque des distances au point A. Cela étant, je dis, que la Lune montrera constamment au point A la face C B D, et que l'axe F B passera toujours par le point A, et que la Lune reprendroit cette situation, dès qu'elle en seroit détournée. Comme cette matiere est assez intéressante, tant pour l'astronomie, que pour la physique, je l'expliquerai par un exemple, qui rendra fort sensible tout ce que nous venons de dire. Je dis donc qu'on doit regarder, à cet égard, la Lune, comme un corps flottant dans un fluide; car les parties d'un tel corps, sont pareillement animées de différentes pesanteurs : or on sçait qu'un corps flottant, qui n'est pas sphérique, ou qui étant tel, n'est pas homogene, n'est pas indifférent à chaque situation; mais qu'il affecte constamment de certaines situations, qu'il reprend aussi-tôt qu'il en a été détourné. Quelquefois le corps n'a quu'ne seule situation d'equilibre; d'autres fois plusieurs, suivant la structure du corps: mais on se tromperoit toujours, si l'on croyoit, que le centre de gravité du corps tâche à se mettre dans l'endroit le plus bas qu'il est possible; de même qu'on se trompe, en disant, que le centre de gravité de la Lune, tâche à s'éloigner, le plus qu'il est possible, du centre de la Terre. On voit donc assez, que la cause principale de ce que la Lune nous présente toujours une même face, est l'inégalité de pesanteur; et à cette cause, il faudra joindre, ou la non-parfaite sphéricité, ou la non-parfaite homogénéïté des couches de la Lune, ou les deux causes à la fois.



VI.—Comme la question que nous venons d'expliquer, entraîne celle d'une legere nutation de la Lune en longitude, que les astronomes ont observée, il ne sera pas hors de propos de faire voir comment cette nutation découle de notre théorie. Nous avons vû que le sphéroïde C B D F mobile autour d'un point E, doit toujours montrer au point A la face C B D tant que le point E reste dans sa place. Supposons à présent, que ce corps s'éloigne un peu de cette situation, en faisant une rotation

infiniment petite autour du point E, la force qui tend à la remettre dans sa situation naturelle, est de même infiniment petite; ce qui fait voir, que le point E faisant sa revolution autour du point A, ce ne sçauroit plus être exactement la face C B D, qui regarde vers A, parce qu'à chaque petit mouvement du point E, la Lune fait une petite rotation autour de ce point, pour garder le parallélisme, et la force qui tâche à tourner vers le point A la face C B D, étant encore infiniment petite, ne sçauroit s'en acquitter assez-tôt: et ce sera la même chose pendant que le point E parcourt un second elément, et ainsi de suite, jusqu'à-ce qu'à la fin la Lune se place assez obliquement, pour que la force, qui tâche à mettre la Lune dans sa situation naturelle, soit assez grande, pour réparer, à chaque moment, une nouvelle petite inclinaison, qui survient par la rotation du point E autour du point A. [Cette explication pourra nous servir dans la suite, pour démontrer un des principaux phénomenes des marées.] La Lune prendra donc la situation oblique c b d f, si sa revolution autour du point A est supposée se faire de E vers D. Mais cette situation oblique demeureroit encore la même à l'égard de la ligne F A, sans que la Lune eût aucune nutation, si le point E faisoit sa revolution autour du point A dans un cercle parfait, et avec une vitesse constante: c'est donc l'inégalité des distances A E, et des vitesses du point E, qui fait que l'obliquité de la situation f c b d varie; et c'est cette variation qui fait la nutation de la Lune en longitude.

VII.—Venons maintenant à la Terre, et examinons quel mouvement elle doit avoir autour du centre de gravité, qui est entre-elle et la Lune; cette recherche est nécessaire pour notre question, et elle ne sera plus difficile, après ce que nous avons dit de la Lune dans cette vûë. Nous remarquerons donc, que si la Terre est parfaitement homogene, soit dans toute son étendue, soit seulement dans chacune de ses couches concentriques; et si elle est en même tems parfaitement sphérique, elle doit conserver parfaitement un parallélisme dans la situation de ses parties, pendant sa révolution. Cependant cette parfaite homogénéïté est moralement impossible; et la parfaite sphéricité a été refutée par les observations les plus exactes. Ce parallélisme seroit donc alteré, de même qu'il l'est dans la Lune, et la Terre ne manqueroit pas de presenter à la Lune une même face, sans le mouvement journalier de la Terre. Ce mouvement empêche l'action de la Lune; et l'effet de cette action étant, à cause du dit mouvement journalier, tantôt d'un côté de la Terre, tantôt de l'autre, il ne pourroit plus produire qu'une legere nutation journaliere dans l'axe de la Terre, et quelque petite inégalité dans le mouvement journalier de

la Terre. Mais l'une et l'autre doivent être tout-à-fait insensibles, à cause de la grandeur de la masse de la Terre, de l'extrême petitesse de l'action de la Lune, et de la rapidité du mouvement journalier.

VIII.—On voit donc que la Terre fera sa revolution autour du centre de gravité, qui lui est commun avec la Lune, de telle maniere que son axe gardera constamment une situation parallele. Si nous considérons donc le mouvement journalier de la Terre à part, il est clair que l'autre mouvement doit être supposé se faire d'une maniere à garder un parallélisme dans toutes les sections de la Terre. Cela étant, il s'ensuit que chaque point de la Terre fait, à l'égard de cet autre mouvement, une même ellipse; que chaque partie a une même force centrifuge, et que les directions des forces centrifuges sont par-tout paralleles entre elles. Et c'est ici le point principal, que je me suis proposé d'établir, et de bien démontrer dans ce Chapitre.

IX.—Ce que nous venons de démontrer du mouvement de la Terre à l'égard de la Lune, doit aussi s'entendre à l'égard du Soleil; en sorte que la force centrifuge des parties de la Terre, par rapport à son orbite annuelle, doit être censée la même, et leurs directions paralleles entre elles. Mais cette Proposition n'est pas si essentielle à l'égard de l'orbite annuelle, comme à l'égard de l'orbite, qui se fait autour du centre de gravité, qui est commun à la Terre et à la Lune, à cause de l'extrême petitesse de cette derniere orbite.

CHAPITRE IV.

Qui expose en gros la Cause des Marées.

I.—Après avoir expliqué au premier Chapitre trois différentes raisons, qui peuvent allonger la Terre autour des deux axes, qui passent par les centres des deux luminaires, il n'est pas difficile de voir comment on doit déduire de ces allongemens le flux et reflux de la mer, pourvû qu'on ait égard en même tems au mouvement journalier de la Terre. Il est clair que ce mouvement journalier doit faire continuellement changer de place les deux axes d'allongement. Mais il faut remarquer ici par avance, que l'action composée des deux luminaires, peut toujours être considerée comme une action simple, quoi-qu'à la vérité fort irréguliere. Cependant

cette considération suffit, pour voir en gros, que la mer doit en chaque endroit s'élever et se baisser environ deux fois dans un jour. Mais il s'agit de mettre cette cause en tout son jour, d'en développer tous les effêts, et de les reduire à leur juste mesure, autant que les circonstances peuvent le permettre.

II.—La question qui se présente d'abord, et qui est en même tems la plus importante pour notre sujet, est de trouver la quantité de l'allongement causé par chacun des deux luminaires. Nous ne considérerons donc qu'un seul luminaire. Voici, avant toutes choses, les suppositions dont je me servirai dans les calculs, et que j'ai déjà exposées en partie.

1. Nous supposerons que la Terre est naturellement sphérique. Cette hypothese n'est que pour abréger le calcul, et on voit bien que l'effet des deux luminaires doit être sensiblement le même sur une Terre ronde, ou un peu applatie, ou un peu allongée.

2. Que les couches concentriques de la Terre sont d'une même matiere, ou d'une même densité. Cette supposition est sans doute fort naturelle; car les inégalités ne peuvent qu'être tout-à-fait insensibles: mais il me semble qu'il n'y a aucune vraisemblance de supposer que la Terre est homogene dans toute son étendue, comme M. Newton l'a fait.

3. Que la Terre, que nous supposons, sans l'action des luminaires, ronde, est changée par l'action de l'un des deux luminaires en ellipsoïde, dont l'axe passe par le centre du luminaire agissant. C'est l'hypothese de M. Newton; et quoi qu'on ne puisse pas le démontrer pour le système des attractions, elle ne doit pas nous arrêter; car quelle que soit la figure de la Terre après ce petit changement, on voit assez qu'elle ne sçauroit s'éloigner sensiblement de l'ellipsoïde. Aussi trouvons-nous cette figure elliptique dans toutes les hypotheses, qu'on pourroit se former sur la pesanteur, susceptibles d'un calcul et tant soit peu naturelles. D'ailleurs un petit changement dans cette figure extérieure de la Terre, n'en sçauroit produire, qui soit sensible, entre l'axe du sphéroïde, et le diametre qui lui est perpendiculaire.

4. Nous supposerons, que les luminaires ne sçauroient faire changer de figure toutes les couches qui composent la Terre jusqu'au centre. Car vraisemblablement la Terre est, dans sa plus grande partie, solide; et quand même elle seroit toute fluide, sa masse seroit trop grande, pour être mise toute entiere en mouvement, et pour obéïr assez vîte à une action aussi petite. Ces refléxions m'ont engagé à considérer la Terre, comme un noyau sphérique, composé de couches parfaitement sphériques et inaltérables par l'action des deux luminaires, et inondé d'un fluide

homogene, tel que sont les eaux de la mer; et à supposer, qu'il n'y a que ce fluide inondant, qui recoive des impressions des luminaires, et que sa profondeur n'est pas sensible par rapport au rayon de la Terre. Cette hypothese est sans contredit la plus naturelle, lorsque la Terre n'est pas supposée homogene dans toute son étenduë, mais, si on la supposoit homogene, comme M. Newton l'a fait, contre toutes les apparences de vérité, notre hypothese n'entre plus en ligne de compte.

5. Enfin nous substituerons à la place des forces centrifuges, qui empêchent la Terre de tomber vers les luminaires, une autre force qui agisse de la même façon, afin que nous puissions considérer d'abord la Terre, comme dans un parfait repos, et un entier équilibre dans toutes ses parties. Cette force à substituer, doit être supposée égale dans toutes les parties de la Terre (§. VIII. Chap. III.) et parallele à la ligne qui passe par les centres de la Terre et du luminaire, dont il sera question.

III.—La force centrifuge dont nous venons de parler, doit être prise pour notre sujet, précisément telle, qu'elle soit égale à la force totale de l'attraction du luminaire, tout comme si la Terre se soutenoit dans sa distance, en décrivant un cercle parfait; et cela est vrai, quelle que soit la force centrifuge réelle de la Terre. C'est ici une Proposition, dont on ne sent la vérité, qu'après quelque réflexion; et elle est fondée sur ce que la différence entre la force centrifuge, telle que nous venons de la décrire, et la force centrifuge réelle, n'est employée qu'a pousser ou repousser la Terre, et ne sçauroit lui faire changer sa figure, puisque nous avons démontré au VIII. Art. du précedent Chapitre, que chaque partie est poussée également et parallelement.

IV.—La force centrifuge totale devant être parfaitement égale à la gravitation totale de la Terre vers le luminaire, et la premiere force étant la même dans toutes les parties, on voit bien qu'on pourroit supposer la force centrifuge égale à la gravitation vers le luminaire, telle qu'elle est au centre de la Terre. Car la gravitation qui répond au centre, peut être censée la moyenne entre toutes les gravitations du globe; et cela, quelque relation qu'on suppose entre les distances et les gravitations, puisque la différence des distances est insensible, par rapport à la distance totale; et que par conséquent la gravitation diminue comme également pour des égales augmentations de distances, et qu'il se fera ainsi une juste compensation pour l'hemisphere tourné au luminaire, et pour l'hemisphere opposé. Cette Proposition n'est pourtant pas géometriquement vraie; mais la fin du calcul m'a fait voir, qu'elle peut

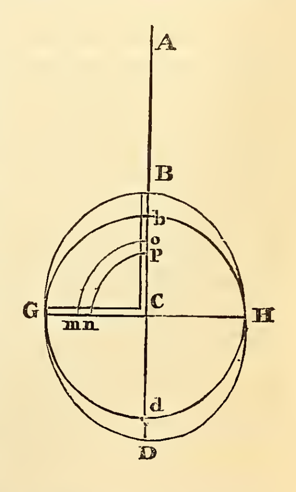
être censée vraie pour notre sujet: et comme elle abrége fort le calcul, je l'ai mise ici, pour en faire usage dans la suite.

PROBLEME.

V.—Soit A le centre du Soleil, B G D H la Terre; A D une ligne tirée par les centres du Soleil et de la Terre: trouver la différence entre B D et sa perpendiculaire G H, qui passe par le centre C.

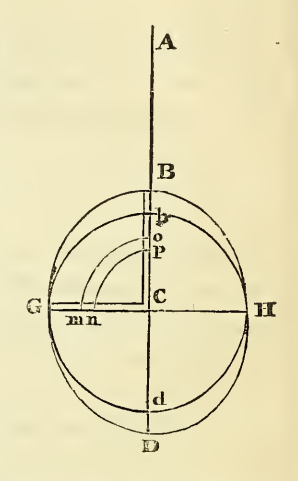
SOLUTION.

Qu'on s'imagine deux canaux B C et G C, communiquans entre eux au centre C, rempli d'un fluide de différentes densités, telles qu'on suppose dans les couches de la Terre. Pour déterminer ces couches, nous considérerons la sphere inscrite G b H d, et nous supposerons tout ce noyau immuable pendant la revolution journaliere de la Terre, fondés, à cet égard, sur ce que nous avons dit dans la quatriéme hypothese du II. §. Quand même on feroit attention aux changemens de figure dans les couches près de G b H d, cette considération ne sçauroit changer sensiblement le resultat du calcul, parce que ces changemens de figure sont tout-à-fait insensibles, et que, selon toutes les apparences, ils ne sçauroient se faire au-delà d'une certaine profondeur assez petite à l'égard du rayon de la Terre. Après cette remarque, nous déduirons la solution de notre Problême, de ce que le fluide doit être en équilibre dans les canaux G C et B C. Pour satisfaire à cette loi, et pour observer un ordre, nous diviserons la solution en trois parties: dans la premiere, nous chercherons la pression totale du fluide B C au point C: dans la seconde, nous ferons la même chose à l'égard du fluide G C; et enfin nous ferons le calcul, en faisant les deux pressions totales égales entre elles.



1. Soit A C = a; G C, ou b C = b; la cherchée B b = ϛ: qu'on tire du centre C deux quarts de cercles infiniment proches p n, o m; soit C p ou C n = x; p o ou n m = d x; la densité variable en p o ou n m = m, la densité uniforme de l'eau (qui couvre le noyau sphérique, et qui

forme le double ménisque) $= \mu$. Soit la gravitation au centre C vers le centre du Soleil A $=$ g, et la force centrifuge, qui agit parallelement à B D, sera par-tout $=$ g (§. VIII. Chap. III. et §. IV. Chap. IV.) qu'on nomme G la force accéleratrice en G ou b, causée par l'action du globe G b H d, et Q la même force accéleratrice pour les points p et n. Après toutes ces préparations, on voit que la goute p o (dont la masse doit être exprimée par la densité m, et par la hauteur d x, c'est à dire m d x) est animée par plusieurs forces accéleratrices : la *premiere* force accéleratrice est celle qui resulte de l'action du globe G b H d, que nous avons nommé Q : la *seconde* est la force centrifuge de A vers C, provenant par la revolution de la Terre autour du point A : nous avons demontré, que cette force doit être faite $=$ g : la *troisiéme* se fait vers A, et provient de la gravitation vers le Soleil : celle-ci est négative à l'égard du point C, et doit être faite $= -\frac{a\,a}{(a-x)^2} \times g$: enfin la *quatriéme* provient de l'action du double ménisque, compris entre G B H D et G b H d, et elle est encore négative à l'égard du point C ; elle est $= -\frac{8}{15} n \mu \epsilon \times \frac{x}{b}$, en vertu des §. X. et XI. Chap. II. En multipliant toutes ces pressions accéleratrices de la goute p o par sa masse, on obtient la pression absolue qu'elle exerce sur le point C, et cette pression absolue sera $\left(Q + g - \frac{a\,a\,g}{(a-x)^2} - \frac{8\,n\,\mu\,\epsilon\,x}{15\,b}\right) \times m\,d\,x$.



On remarquera ici en passant, que comme a est sensé infiniment plus grand que x, on peut poser $\frac{a^2}{(a-x)^2} = 1 + \frac{2\,x}{a}$, et ainsi cette pression devient

$$\left(Q - \frac{2\,x\,g}{a} - \frac{8\,n\,\mu\,\epsilon\,x}{15\,b}\right) x\,m\,d\,x.$$

dont l'intégrale donnera la pression de la colonne p C ; sçavoir ;

$$\int Q\,m\,d\,x - \int \frac{2\,g\,m\,d\,x}{a} - \int \frac{8\,n\,\mu\,\epsilon\,m\,x\,d\,x}{15\,b},$$

après quoi on aura la pression de toute la colonne b C, en substituant dans l'intégrale b à la place de x. A cette pression, il faut encore

ajoûter celle de la petite colonne B b, dont la gravitation ou pesanteur vers C doit être censée uniforme dans toute sa hauteur, et égale à G: il faut aussi remarquer, que toutes les autres forces qui agissent sur cette petite colonne B b peuvent être négligées, comme infiniment inférieures à l'action G, qui exprime proprement la pesanteur près la surface de la Terre vers son centre; ainsi donc la pression de la petite colonne B b doit être simplement estimée par sa hauteur ϵ, sa densité μ et sa pesanteur G, ce qui fait $\mu \epsilon G$. Il résulte enfin de tout cela, que la pression totale de toute la colonne B C sur le point C est

$$\mu \epsilon G + \int Q m d x - \int \frac{2 g m x d x}{a} - \int \frac{8 n \mu \epsilon m x d x}{15 b},$$

en prenant après l'intégration $x = b$.

2. Pour trouver à présent la pression de la colonne G C, il faut chercher toutes les forces qui animent la goute m n, dont la masse est encore m d x. La *premiére* de ces forces provient de l'attraction du globe G b H d; et est encore = Q, puisque cette force est la même en n et en p: la *seconde* force, provenant de la force centrifuge des parties de la Terre, entant qu'elle se tourne autour du point A, est = o, cette force étant par-tout perpendiculaire à G C (§. VIII. Chap. III.). La *troisiéme* force provient de la gravitation des parties de la Terre vers A, cette gravitation est au point n vers le point A $= \frac{a a g}{a a + x x}$, et étant décomposée, la gravitation resultante vers C doit être exprimée par $\frac{a a g x}{(a a + x x)^{\frac{3}{2}}}$: dans cette derniere expression on peut rejetter au dénominateur le terme $x x$, comme le calcul me l'a fait voir; ainsi il provient $\frac{g x}{a}$, qui marque la troisiéme force vers C resultante de la gravitation vers A. La *quatriéme* force accéleratrice, qui anime la goute m n à descendre vers le centre, provient de l'action du double ménisque, qui en vertu du XII. §. Ch. II. est $= \frac{4}{15} n \mu \epsilon \times \frac{x}{b}$. En prenant la somme de toutes ces forces accéleratrices, la force totale sera $Q + \frac{g x}{a} + \frac{4 n \mu \epsilon x}{15 b}$; cette force accéleratrice totale doit être multipliée par la petite masse m d x; et du produit il faut prendre l'intégrale, qui marquera la pression qu'exerce la colonne m C sur le centre C: cette pression est donc $\int Q m d x + \int \frac{g m x d x}{a} + \int \frac{4 n \mu \epsilon m x d x}{15 b}$; et pour avoir la pression, qui ré-

ponde à toute la colonne G C, il faut encore après l'intégration faire $x = b$.

3. Après avoir exprimé analytiquement les valeurs des pressions des colonnes B C et G C, il ne reste plus pour achever la solution de notre Problême, qu'à faire une équation entre les deux dites valeurs trouvées dans la premiére et seconde partie. On aura donc $\mu G \varepsilon + \int Q m d x - \int \frac{2 g m x d x}{a} - \int \frac{8 n \mu \varepsilon m x d x}{15 b} = \int Q m d x + \int \frac{g m x d x}{a} + \int \frac{4 n \mu m \varepsilon x d x}{15 b}$. et cette équation arrangée donne

$$5 \mu G a b \varepsilon - \int 4 n \mu a \varepsilon m x d x = \int 15 g b m x d x,$$

et de là on tire la valeur cherchée de ε, qui est constante; savoir,

$$\varepsilon = \frac{\int 15 g b m x d x}{5 \mu G a b - \int 4 n \mu a m x d x}. \quad \text{C. q. f. t.}$$

COROLLAIRE.

VI.—On voit par notre solution, que généralement B b doit être égale à D d; car la valeur de ε est la même, soit que l'on prenne x affirmativement, soit nègativement. Aussi auroit-il été ridicule de supposer la courbe B G D H une ellipse, si les deux parties G B H et G D H n'étoient pas devenues par le calcul également allongées, et la supposition auroit renfermé une contradiction.

Au reste ces deux petites lignes ne seroient pas égales à la rigueur. Cette égalité n'est fondée que sur ce que nous avons rejetté plusieurs fois dans notre solution de certaines petites quantités, mais qu'on pouvoit négliger réellement, comme tout-à-fait insensibles, non-seulement par rapport à la ligne B C, mais même par rapport à la petite ligne B b, qui ne sçauroit être que d'un petit nombre de pieds. Cependant je crois encore nécessaire d'avertir ici, qu'il faut être sur ses gardes, en rejettant dans le calcul de certains termes; car comme dans l'équation resultante, plusieurs termes se détruisent, et qu'il n'en reste que des termes d'une fort petite valeur, on ne doit rejetter que des quantités qui sont insensibles, même par rapport aux quantités restantes dans l'équation.

Ce n'est qu'avec une telle précaution, que j'ai négligé dans ma solution plusieurs termes, et je ne les aurois point négligés, si la fin du calcul ne m'avoit enseigné, qu'ils peuvent et doivent être négligés.

SCHOLIE.

VII.—Pour avoir une juste idée de notre équation, remarquons que μ signifie la densité de l'eau de la Mer, qui inonde la Terre, et m la densité quelconque de la couche, dont la distance au centre est égale à x : n exprime la circonference du cercle, dont le rayon est égal à l'unité : b est le rayon de la Terre : a la distance entre les centres du Soleil et de la Terre : g exprime la force accéleratrice vers le Soleil, d'un corps placé au centre de la Terre ; et enfin G exprime la force accéleratrice, ou la pesanteur des corps à la surface de la Terre vers son centre.

Or, pour voir que tous les termes de notre équation sont homogenes et comparables entre eux, et en même tems de quelle maniere il faut faire usage de notre équation, il faut remarquer qu'en vertu du III. §. Chap. II. G doit être exprimée par la masse de toute la Terre, divisée par le quarré de son rayon ; c'est-à-dire, qu'il faut supposer $G = \frac{\int 2\,n\,m\,x\,x\,d\,x}{b\,b}$, et comme on connoît pour le Soleil le rapport entre g et G, aussi-bien que celui d'entre a et b, on voit qu'on peut enfin exprimer $\mathfrak{C}$ simplement par b : mais il faut pour cet effet intégrer auparavant les quantités m x x d x et m x d x : c'est ce que nous allons faire dans quelques hypotheses particulieres.

VIII.—Soit d'abord la densité de la Terre uniforme, et nommément celle de l'eau de la mer : c'est ici l'hypothese de M. Newton.

En ce cas m est une constante et égale à μ ; et ainsi notre équation finale du V. §. est $\mathfrak{C} = \frac{15\,g\,b\,b}{2\,a\,(5\,G - 2\,n\,\mu\,b)}$.

Mais par le VII. §. on obtient $G = \frac{2}{3}\,n\,\mu\,b$, ou bien $2\,n\,\mu\,b = 3\,G$, et substituant cette valeur pour le second terme du dénominateur, il provient $\mathfrak{C} = \frac{15\,g\,b}{4\,G\,a} \times b$.

Nous verrons dans la suite, que cette expression analytique donne précisément la hauteur indiquée par M. Newton (†) simplement en pieds,

(†) C'est dans le Corollaire de la Prop. XXXVI. du Liv. III. ; M. Newton dit que la hauteur de l'eau de la mer sous le Soleil ou au point opposé au Soleil, surpasse la hauteur de l'eau de la mer à 90d. de ces points de 1 pied. $11\frac{1}{8}$ pouc., et c'est à peu près à cela que revient l'expression $\frac{15\,g\,b}{4\,G\,a}$ b, car (par Cor. 1. Prop. VIII. de ce Livre) la gravité à la surface du Soleil est à la gravité à la surface de la Terre comme 10000 a 435. Le demi-diamêtre du Soleil étant vû de la Terre sous l'angle de 16′. 4″. ce diametre est à sa distance du centre de la Terre comme 1 à 214, ainsi la gravité de la Terre sur le Soleil (qui est g) est à la gravité à la surface de la Terre (qui est G) comme $\frac{10000}{\overline{214}|^2}$ à 435 ; d'où l'on trouve le log. de $\frac{g}{G} = -$ 4.7002107. Le diametre du Soleil étant à celui

pouces et lignes, sans en donner le calcul, ou du moins sans le mettre à la portée, je ne dirai pas de tout le monde, mais uniquement de ceux qui voudroient bien prendre la peine nécessaire pour l'approfondir. Notre methode comprend donc le cas tout particulier de M. Newton. Mais ce cas donne une si petite quantité, qu'il ne me paroît pas possible d'en déduire les phénomenes des marées, tels que les observations les donnent. C'est ce que je ferai voir plus au long dans la suite. Je n'ai donc jamais pû comprendre, comment M. Newton, et tous ceux de sa nation, qui ont écrit sur cette matiere, ont pû s'y attacher. On voit par là, combien il est essentiel d'étendre les hypotheses des densités des couches de la Terre. J'ai remarqué que la loi de ces densités contribue beaucoup au haussement et baissement des eaux dans les marées; qu'on en peut déduire tel effet qu'on trouvera nécessaire pour l'explication des phénomenes indiqués par l'expérience; je ferai même voir que cet effet pourroit être infini dans de certaines hypotheses. Mais ce que je souhaite sur-tout que l'on remarque, c'est que les mêmes hypotheses qui donnent plus d'effet aux luminaires, pour hausser et baisser les eaux dans les marées, sont d'ailleurs extrêmement vrai-semblables par plusieurs raisons physiques, toutes très-fortes. Mais venons à d'autres exemples.

IX.—Supposons la Terre creuse en dedans, jusqu'à une distance donnée c depuis le centre, et que la croute (dont l'épaisseur sera $= b - c$, soit encore par-tout d'une densité égale à celle de l'eau de la mer.

Nous avons en ce cas encore m égale à la constante μ, et ainsi le calcul se fera comme dans le précedent Article, avec cette restriction, que les intégrales des quantités $m\,x\,x\,d\,x$, et $m\,x\,d\,x$ doivent être $= o$, lorsque $x = c$: de cette maniere on obtient $\int m\,x\,d\,x = \frac{1}{2}\mu\,x\,x - \frac{1}{2}\mu\,c\,c$, ou (en faisant $x = b$) $= \frac{1}{2}\mu\,b\,b - \frac{1}{2}\mu\,c\,c$; substituant cette valeur dans l'équation finale du V. §. il vient

$$\epsilon = \frac{15\,g\,b\,(b\,b - c\,c)}{10\,G\,a\,b - 4\,n\,\mu\,a\,(b\,b - c\,c)};$$

et (par le VII. §.) G est $= \frac{\int 2\,n\,m\,x\,x\,d\,x}{b\,b} = \frac{2\,n\,\mu}{3\,b\,b} \times (x^3 - c^3) =$ (puisqu'il faut poser $x = b$) $\frac{2\,n\,\mu}{3\,b\,b} \times (b^3 - c^3)$: de cette derniere équation,

de la Terre comme 10000 à 109, on aura que le rayon de la Terre $= b$ est à la distance du Soleil $= a$ comme 1 à $214 \times \frac{10000}{109}$, ainsi le log. de $\frac{b}{a} = - 5.7070265$, et L $\frac{g\,b}{G\,a} = -$ 8.4072372. Enfin, reduisant le rayon de la Terre b en pouces à raison de $1145\frac{1}{2}$ lieuës de 2855 toises chacune pour le rayon, son log. est 8.3718709. Ainsi le log. de $\frac{g\,b}{G\,a}\,b = 0.7791081$ dont le nombre est 6.014 dont les $\frac{15}{4}$ sont $22\frac{1}{2}$ pouces, à peu près comme M. Newton a trouvé.

on peut tirer celle-ci $\mu = \frac{3\,b\,b\,G}{2\,n \times (b^3 - c^3)}$; et enfin $4\,n\,\mu\,a\,(b\,b - c\,c) = \frac{6\,a\,b\,b\,G\,(b\,b - c\,c)}{b^3 - c^3}$ et substituant cette valeur dans le second terme du dénominateur de notre équation, on a $\mathfrak{C} = \frac{15\,g}{2\,G} \times \frac{b + x}{a} \times \frac{b^3 - c^3}{2\,b\,b + 2\,b\,c + 5\,c\,c}$.

Cette quantité est la même que celle du précedent article, lorsque $c = o$; mais elle devient plus petite, à mesure qu'on suppose la Terre plus creusée, et elle deviendroit tout-à-fait nulle, si on supposoit la Terre presque entierement creuse en forme d'une voute sphérique, dont l'épaisseur fût peu considérable, par rapport au rayon de la Terre. Cette remarque suffit seule, pour refuter le sentiment de ceux qui croyent que la Terre pourroit bien n'être qu'une croute voutée; car il ne pourroit y avoir en ce cas aucun flux et reflux de la mer, au moins dans notre systême.

X.—Si l'on supposoit la loi des densités des couches de la Terre exprimée par cette équation $m = \frac{x}{b}\,\mu$, c'est-à-dire, que les densités fussent proportionelles aux distances des couches au centre, on trouveroit la hauteur

$$\mathfrak{C} = \frac{15\,g\,b}{7\,G\,a} \times b,$$

et par conséquent beaucoup plus petite, que si la Terre étoit par-tout d'une même densité, sçavoir en raison de 7. à 4. Aussi cette hypothese n'est-elle aucunement vraisemblable, y ayant apparence que les couches plus denses sont plus bas que les couches plus legeres.

XI.—Si la loi des densités est exprimée par $m = \frac{b\,\mu}{x}$, c'est-à-dire, si l'on suppose les densités, suivre la raison inverse des distances des couches au centre, on trouveroit

$$\mathfrak{C} = \frac{15\,g\,b}{G\,a} \times b,$$

ce qui fait la valeur de $\mathfrak{C}$ quatre fois plus grande, que dans la supposition de M. Newton, de la parfaite homogenéïté de la Terre.

XII.—Supposons enfin la loi des densités exprimée par $m = \left(\frac{b}{x}\right)^{\frac{4}{3}}\mu$

il faudra mettre $\frac{3}{2}\,\mu\,b\,b$ pour $\int m\,x\,d\,x$, et l'équation du VI. §. divisée par μ sera

$$\varepsilon = \frac{45\,g\,b}{10\,G\,a - 12\,n\,\mu\,a\,b} \times b:$$

mais en vertu du VII. §. on a $G = \int \frac{2\,n\,m\,x\,x\,d\,x}{b\,b} = \int \frac{2\,n\,\mu\,x^{\frac{2}{3}}\,d\,x}{b^{\frac{2}{3}}} = \frac{6\,n\,\mu\,x^{\frac{5}{3}}}{5\,b^{\frac{2}{3}}}$ $=$ (en faisant $x = b$) $\frac{6}{5}\,n\,\mu\,b$. D'où l'on voit que le dénominateur de notre équation fondamentale devient $= 0$, et par consequent $\varepsilon = \infty$. Ainsi l'élevation des eaux seroit infinie.

XIII.—J'ai mis cette derniere hypothese, non qu'elle soit possible, puisque la densité ne sçauroit être infinie, comme elle devroit être au centre; mais pour faire voir l'avantage et la supériorité de notre théorie, puisqu'elle ne met point de bornes à l'élevation des eaux: si les marées étoient cent ou mille fois plus grandes qu'on ne les observe, nous pourrions lui assigner une cause suffisante. Ayant au reste bien examiné tous les phénomenes du flux et reflux de la mer, je suis entiérement convaincu, que la force assignée par M. Newton ne sçauroit suffire pour les produire: il faut donc dire dans le systême même de ce philosophe, que les densités de la Terre ne sont pas uniformes, mais qu'elles croissent vers le centre. Cette hypothese n'est-elle pas fort probable d'ailleurs d'elle même? L'eau est-elle le seul fluide que nous connoissions? et ne faut-il pas que les fluides plus pesants, soient plus proches du centre de la Terre? le mercure est près de quatorze fois plus pesant que l'eau: la grande compression que souffrent les parties proches du centre de la Terre, ne pourroit-elle pas contribuer à rendre la matiere plus compacte et plus dense?

Si nous considérons outre cela, combien les planetes et la Terre, qui nagent sans doute dans un milieu resistant, quoique extrêmement subtil, conservent leur mouvement, sans en perdre la moindre partie considérable pendant une longue suite de siécles, nous pourrions facilement croire, que tous ces corps ont beaucoup plus de matiere, que Mr. Newton ne marque. Enfin de quel côté que j'envisage cette question, tout me fait croire, que les couches de la Terre augmentent de densité vers le centre.

XIV.—Si, tout le noyau ou tout le globe de la Terre restant, l'eau de la mer, qui inonde la Terre, changeoit de densité, la quantité ε suivroit la raison reciproque des densités des eaux de la mer. Il suit de là que si la Terre étoit inondée de mercure, les marées seroient quatorze fois plus petites, qu'elles ne sont actuellement. Et si au contraire l'air étoit un fluide homogene pesant, mais sans élasticité, sa hauteur seroit environ de 850 ε plus grande à ceux qui ont le Soleil au zenith, qu'à ceux qui

l'auroient à l'horison. Cela feroit 1700 pieds de différence dans la hauteur de l'atmosphere, à ne donner que deux pieds de valeur à ϵ; et cette différence en produiroit une sur le barometre de plus de 20 lignes. D'où vient donc, demandera-t-on, qu'on n'observe point à cet égard aucune variation dans le barometre ? C'est l'élasticité de l'air qui en est la cause, cette élasticité fait que la hauteur du barometre doit être constamment la même dans toute la surface de la mer, en faisant abstraction seulement des causes accidentelles et passageres, qui peuvent survenir tout d'un coup, et qui n'agissent sur l'air, que parce que celuici ne sçauroit obéïr assez promptement, ni se mettre dans un instant dans son état naturel d'équilibre. On remarquera ici qu'il est faux que la pression du mercure soit égale à la pression, ou plûtôt au poids de la colonne d'air verticale couchée dessus, ce que l'on affirme ordinairement; mais la pression du mercure est égale au poids moyen de toutes les colonnes d'air verticales, qui environnent la Terre, c'est à-dire, égale au poids de tout l'atmosphere (dont la hauteur est considérée comme infiniment petite, par rapport au rayon de la Terre) multiplié par la raison de la base de la colonne du mercure à toute la surface de la Terre. Cette Proposition fait voir que la hauteur moyenne du barometre doit être la même sous l'equateur et sous le cercle polaire, quoique le poids absolu de la colonne d'air verticale sous l'equateur pendant les plus grandes chaleurs ne soit pas la moitié si grand que celui d'une pareille colonne d'air sous le cercle polaire en hyver. On voit de tout ce que nous venons de dire, pourquoi, ni le Soleil, ni la Lune ne changent pas sensiblement la hauteur du barometre, quoi qu'ils élevent les eaux considérablement. La véritable raison n'en est que l'élasticité de l'air, qui doit faire presser également tous les endroits de la surface de la Terre; et cette seule refléxion démontre entierement l'insuffisance des inégales compressions de la matiere des tourbillons, pour expliquer les marées, comme nous avons déja remarqué au III. §. Chap. I.

XV.—Tous les cas particuliers, que nous venons d'examiner, font voir, et il n'est pas difficile de le démontrer généralement par l'équation du V. §. que la quantité ϵ (qui exprime la différence entre la plus grande hauteur de la mer, et la plus petite, entant qu'elle est produite par la seule action du Soleil) est toujours $= \frac{n g b}{G a} \times b$: le coefficient n dépend des différentes densités des couches de la Terre, le rapport $\frac{b}{a}$ est connu par les observations astronomiques: il ne reste donc qu'à voir comment

on pourra déterminer la quantité $\frac{g}{G}$: c'est en comparant les effets que les forces g et G produisent; la premiere, en retenant la Terre dans son orbite annuelle; la seconde, en retenant la Lune dans celle qu'elle fait autour de la Terre. Si la distance moyenne de la Lune au centre de la Terre est nommée α, la force centrifuge de la Lune sera $= \frac{b\,b}{\alpha\,\alpha}\,G$, et la force centrifuge de la Terre est $= g$: or la force centrifuge moyenne de la Terre dans son orbite, est à la force centrifuge moyenne de la Lune autour de la Terre, ou plutôt autour du centre de gravité du systême de la Terre et de la Lune, comme la distance du Soleil divisée par le quarré du tems périodique de la Terre autour du Soleil, est à la distance de la Lune au centre de gravité commun de la Terre et de la Lune, [M. Newton suppose cette distance $= \frac{39}{40}\,\alpha$, voyez ses Princ. Math. Phil. Nat. Edit. II. pag. 430.; il fonde cette supposition sur quelques phénomenes des marées, mais mal choisis à mon avis; elle est donc encore fort douteuse; mais comme elle n'est pas de conséquence pour notre sujet, je ne laisserai pas de l'adopter ici] divisée par le quarré du tems périodique de la Lune: on a donc, en nommant le tems périodique de la Terre T, et celui de la Lune t, cette analogie $g : \frac{b\,b}{\alpha\,\alpha}G :: \frac{a}{T\,T} : \frac{39\,\alpha}{40\,t}$;

ce qui donne $\frac{g}{G} = \frac{40\,a\,b\,b\,t\,t}{39\,\alpha^3\,T\,T}$, et par consequent

$$\mathfrak{E} = \frac{n\,g\,b}{G\,a} \times b = \frac{40\,n\,b^3\,t\,t}{39\,\alpha^3\,T\,T} \times b.$$

REMARQUE.

Pour voir que cette formule s'accorde avec celle de M. Newton pour la supposition de l'homogenéïté de la Terre, nous remarquerons, qu'en ce cas on a $n = \frac{15}{4}$ (§. VIII.) et M. Newton suppose $\frac{b}{\alpha} = \frac{1}{60\frac{1}{4}}$ (Princip. Math. Phil. Nat. Edit. II. pag. 430.) $\frac{t\,t}{T\,T} = \frac{1000}{178725}$ (Princip. Math. pag. 395.) et enfin $b = 19695539$ pieds après la mesure de M. Cassini. De tout cela il resulte

$$\mathfrak{E} = \frac{40.\ 15.\ 1.\ \ 1000.\ 19695539}{39.\ \ 4.\ \ (60\frac{1}{4})^3.\ \ 178725.}\ \text{pieds},$$

cela fait $\mathfrak{E} = 1$ pied 11. pouces et un quart. M. Newton trouve 1 pied

11 pouces et un huitieme. (Princ. Math. pag. 419.) La différence me paroît trop petite, pout en rechercher l'origine.

XVI.—Tout ce que nous venons de dire par rapport à l'action du Soleil, doit être entendu aussi de la Lune, sans y rien changer; de sorte que les équations fondamentales des §. V. et VII. servent également pour la Lune, en entendant par a la distance entre les centres de la Terre et de la Lune, et par g la pesanteur d'un corps placé au centre de la Terre vers la Lune. Et comme nous avons dit au XV. §. que quelque hypothese qu'on prenne pour exprimer les différentes densités dans les couches de la Terre, on trouvera toujours

$$\epsilon = \frac{n g b}{G a} \times b,$$

nous dirons par rapport à la Lune, qu'on trouvera toujours

$$\delta = \frac{n \gamma b}{G \alpha} \times b,$$

prenant pour δ la différence des hauteurs des eaux à ceux qui ont la Lune au zenith, et à l'horison, pour α la distance entre les centres de la Lune et de la Terre, et pour γ la pesanteur d'un corps placé au centre de la Terre vers la Lune.

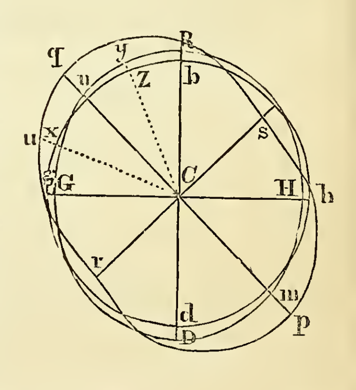
XVII.—Ce qui m'a engagé à ne parler d'abord que de l'action du Soleil sur la mer, est qu'on connoît parfaitement bien la valeur de g pour le Soleil, comme nous avons vû au XV. §. au lieu que la Lune, qui n'a point de satellites, ne sçauroit donner immédiatement la force accéleratrice qu'elle cause au centre de la Terre, et que nous avons nommé γ. Je trouve par ma nouvelle théorie de la Lune, dont j'ai déja fait mention ci-dessus, plus générale, plus exacte, et sur-tout infiniment plus facile, que celle de M. Newton, qu'on peut déterminer la valeur γ avec toutes les autres qui en dépendent; sçavoir la masse de la Lune, comparée avec celle de la Terre, et leur commun centre de gravité, moyennant quelques irrégularités dans les mouvemens de la Lune, pourvû qu'on puisse les observer assez exactement. M. Newton a tâché de déterminer la force accéleratrice γ, en comparant les effets de la Lune sur la mer avec ceux du Soleil; cette methode seroit fort bonne, si on sçavoit bien séparer les effets des deux luminaires. Il a prétendu le faire, en comparant les marées bâtardes, qui suivent les quadratures, avec les plus grandes marées, qui suivent les syzygies. Nous verrons ci-dessous ce que l'on peut trouver à redire à cette methode, et comment on pourra en substituer d'autres plus exactes.

XVIII.—Au reste, il est clair que la Lune et le Soleil produiront leurs

effets independamment l'une de l'autre: tout ce que le Soleil pourroit contribuer au moins dans la pure théorie, pour troubler l'action de la Lune, est qu'il allonge un peu la Terre: mais il est aussi bien évident, que la Lune changera également la surface de la mer sur une Terre parfaitement ronde ou allongée d'un petit nombre de pieds: nous avons déja dit la même chose dans la premiere hypothese du second Article.

Voici donc comment il faudroit déterminer la surface de la mer, si les deux luminaires pouvoient produire dans un instant tout leur effet, c'est-à-dire, si l'eau n'avoit point d'inertie, et qu'elle pût prendre incontinent sa juste figure; car c'est de cette inertie, qu'il faudra tirer dans la suite plusieurs inégalités, et autres phénomenes, qu'on a observés dans les marées.

Soit b g d h le globe de la Terre parfaitement spherique, et considérons d'abord le Soleil, que nous supposerons placé dans la ligne prolongée b d passant par le centre de la Terre C: notre globe se changera en sphéroïde, tel que B G D H, les eaux baissant autour de g h, et montant autour de b et d. Soit ensuite la Lune dans la ligne prolongée q p; il est clair qu'elle agira sur le sphéroïde de la même façon qu'elle feroit sur le globe parfait, duquel le sphéroïde differe d'une quantité tout-à fait insensible: ainsi donc la Lune fera monter et baisser les eaux par dessus la surface du sphéroïde, tout autant qu'elle feroit à l'égard de la surface sphérique, sans l'action du Soleil. Il faut donc prendre n q, ou m p, à b B, ou d D en



raison des forces lunaire et solaire, c'est à-dire, comme $\frac{\gamma}{\alpha}$ à $\frac{g}{\alpha}$, tracer ensuite les courbes q r p s, telles qu'en prenant un angle quelconque u C q, égal à un angle y C B, la perpendiculaire u x interceptée entre les surfaces des sphéroïdes, ait à la perpendiculaire y z, interceptée entre le premier sphéroïde et le globe, la raison de n q à B b. Voilà donc une construction géometrique générale, qui montre à chaque moment, et à chaque endroit, la hauteur de la mer, et les variations de cette hauteur. Mais elle demande des calculs longs et pénibles. Nous verrons dans la suite, comment on pourra s'y prendre, pour les faire, en commençant par les circonstances et les hypotheses les plus simples, et en ajoûtant des corrections et équations à faire pour chaque circonstance changée.

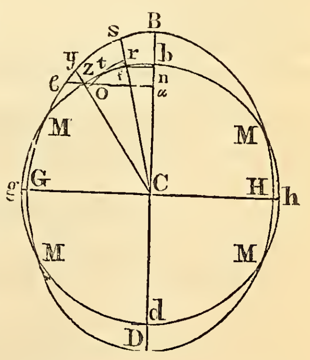
XIX.—Voici donc les cas et les hypotheses, par lesquelles nous commencerons. Nous supposerons d'abord, que la Lune fait des cercles parfaits autour de la Terre, et pareillement la Terre autour du Soleil: que ces orbites sont dans le plan de l'equateur de la Terre: que toute la Terre est inondée: que la surface de la mer prend dans un instant sa juste figure, tout comme si l'eau n'avoit point d'inertie, ni resistances; et enfin qu'il ne faille déterminer les loix des marées, que sous l'equateur. Mais avant de faire les calculs, il sera bon d'exposer préliminairement quelques Lemmes géometriques.

CHAPITRE V.

Contenant quelques Propositions de géometrie préliminaires pour l'Explication et le Calcul des Marées.

PROBLEME.

I.—Soit, comme ci-devant, le cercle b g d h et l'ellipse presque circulaire B G D H, et supposons la sphere et le sphéroïde, décrits par la rotation du cercle et de l'ellipse autour de l'axe B D, égaux; trouver le rapport entre les petites lignes B b et G g.



SOLUTION.

Nous supposerons pour nous servir des mêmes expressions, que nous avons employées jusqu'ici, B b + G g = ε; G g = x, et B b = ε — x; C b ou C g = b; n la circonference du cercle, dont le rayon est égal à l'unité. Ceci posé, on sçait que la sphere sera = $\frac{2}{3}$ n b^3: on sçait aussi, qu'un ellipsoïde (dont le grand axe est = 2 A, et le plus petit diametre = 2 B) est = $\frac{2}{3}$ n B B A; cela donne notre sphéroïde = $\frac{2}{3}$ n $(b - x)^2 \times (b + \varepsilon - x)$ = $\frac{2}{3}$ n $(b^3 - 3\,b\,b\,x + b\,b\,\varepsilon)$ si l'on néglige les infiniment petits du second ordre. Faisant à présent par la condition du Problême la sphere égale au sphéroïde, on a $\frac{2}{3}$ n b^3 = $\frac{2}{3}$ n $(b^3 - 3\,b\,b\,x + b\,b\,\varepsilon)$ c'est-à-dire, $x = \frac{1}{3}\varepsilon$. C. q. f. t.

COROLLAIRE.

II.—Si $G g = \frac{1}{3} \mathfrak{C}$, il faut que $B b$ soit $= \frac{2}{3} \mathfrak{C}$, et par conséquent double de l'autre. Ainsi donc l'eau monte deux fois plus autour de la ligne, qui passe par le centre de l'un des luminaires, et celui de la Terre, qu'elle ne descend à la distance de 90 dégrés.

PROBLEME.

III.—Si l'on tire du centre C une droite quelconque C y, trouver la petite ligne y z, qui marque la hauteur verticale du point y pris dans l'ellipse, par dessus le point z pris dans le cercle.

SOLUTION.

Qu'on tire par le point z la droite $\mathfrak{C}\,\alpha$ perpendiculaire à l'axe: on voit qu'en conséquence de nos hypotheses, l'angle $\mathfrak{C}\,y\,z$ doit être pris pour un droit, et le petit triangle $\mathfrak{C}\,y\,z$ censé semblable au triangle $C\,\alpha\,z$, d'où l'on tire

$$y\,z = \frac{\alpha\,z}{C\,z} \times \mathfrak{C}\,z.$$

Soit à présent $C\,\alpha = s$; $z\,\alpha = \sqrt{b\,b - s\,s}$; on aura par la nature de l'ellipse

$$\alpha\,\mathfrak{C} = \frac{C\,G}{C\,B} \times \sqrt{B\,\alpha \times \alpha\,D} = \frac{b - \frac{1}{3}\mathfrak{C}}{b + \frac{2}{3}\mathfrak{C}} \times \sqrt{(b + \frac{2}{3}\mathfrak{C} - s) \times (b + \frac{2}{3}\mathfrak{C} + s)}.$$

Si on change cette quantité en suites, et qu'on rejette toujours les infiniment petits du second ordre, on trouvera enfin

$$\alpha\,\mathfrak{C} = \sqrt{b\,b - s\,s} + \frac{3\,s\,s - b\,b}{3\,b\sqrt{b\,b - s\,s}} \times \mathfrak{C}.$$

De là on tire $\alpha\,\mathfrak{C} - \alpha\,z = \mathfrak{C}\,z = \frac{3\,s\,s - b\,b}{3\,b\sqrt{b\,b - s\,s}} \times \mathfrak{C}$, et par consequent

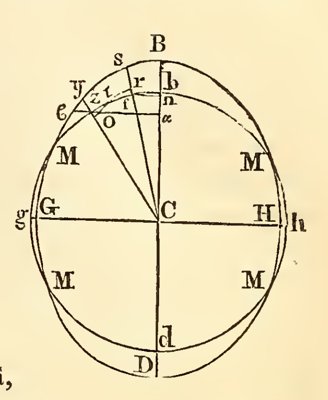
$$y\,z = \frac{3\,s\,s - b\,b}{3\,b\,b} \times \mathfrak{C}. \quad \text{C. q. f. t.}$$

COROLLAIRE I.

IV.—Pour trouver les points M, où l'ellipse coupe le cercle, on n'a qu'à faire $y\,z = o$, ce qui donne $s = b\sqrt{\frac{1}{3}} = o,\,5773\,b$, et l'arc o M de $54^o.\,44'$.

COROLLAIRE.

V.—Si la Terre tournoit autour d'un axe perpendiculaire au plan de notre figure, et que le cercle b g d h représentât ainsi l'equateur de la Terre, dans lequel l'un des luminaires est supposé se trouver: si par cette rotation de la Terre le point B est parvenu en y, le luminaire restant dans l'axe B D, l'angle b C z sera l'angle horaire, dont le cosinus est appellé s, le sinus total b; et on voit que la différence des hauteurs de l'eau avant et après la dite rotation sera représentée par B b — y z, c'est-à-dire par $\frac{2}{3}\beta + \frac{bb - 3ss}{3bb} \times \beta$, ou par $\frac{bb - ss}{bb} \times \beta$, ou enfin (en nommant le sinus de l'angle horaire σ) par $\frac{\sigma\sigma}{bb}\beta$. Nous conclurons de là,



que les baissemens des eaux sont proportionnels aux quarrés des sinus des angles horaires, qui commencent du moment de la haute-mer.

COROLLAIRE III.

VI.—Les variations qui répondent à de petits intervalles de tems égaux, sont pour chaque point z, proportionnelles aux aires du triangle C α z Car l'intervalle de tems doit être exprimé simplement par un petit arc de cercle, qui est $= \frac{-bds}{\sqrt{bb - ss}}$, en considerant s comme variable; et si nous faisons cette quantité égale à un petit élement de tems d t, nous aurons $\frac{-bds}{\sqrt{bb - ss}} = dt$ et $ds = \frac{-dt\sqrt{bb - ss}}{b}$. Or par le V. §. tout le baissement des eaux étant $= \frac{bb - ss}{bb} \times \beta$, sa différentielle sera $= \frac{2\beta s dt \sqrt{bb - ss}}{b^3}$; et comme les quantités β, b et d t sont constantes, nous voyons, que les variations verticales des marées, qui se font en de petits intervalles de tems égaux, sont proportionnelles aux quantités répondantes $\sqrt{bb - ss}$, ou aux aires des triangles C α z.

SCHOLIE.

VII.—On voit que ces proprietés tendent à déterminer les haussemens et baissemens d'une même marée pour chaque moment, et nous verrons dans la suite, combien elles répondent aux observations. Ces Propositions suffiroient pour ce dessein, si nous ne voulions considérer que ce qui arrive aux conjonctions et oppositions des deux luminaires : mais comme cette restriction ne feroit qu'un cas très-particulier de toute la théorie des marées, nous passerons plus outre. Remarquons cependant encore une fois, que chaque luminaire peut être consideré, comme agissant sur la mer, indépendamment l'un de l'autre ; puisque les petites variations causées par l'un des deux, ne changent pas sensiblement toute la figure de la Terre : une quantité de quelques pieds ne sçauroit être sensible par rapport à tout le diametre de la Terre. Nous allons donc considérer les deux luminaires à la fois, et dans une position en longitude quelconque, quoique toujours dans le plan de l'equateur. Nous considérerons aussi sur la Terre un point quelconque dans l'equateur, pour voir combien la mer doit être plus haute ou plus basse dans ce point, qu'elle ne seroit sans l'action des luminaires. C'est ici une question des plus essentielles pour notre sujet. Souvenons-nous cependant, que β signifie la hauteur de toute la variation des eaux d'une marée, entant qu'elle est produite par la seule action du Soleil, et δ la même chose pour la Lune.

PROBLEME.

VIII.—Soit b β d δ, l'equateur de la Terre parfaitement circulaire, tel qu'il seroit sans l'action des deux luminaires : supposons le Soleil dans la ligne prolongée d b, et la Lune dans la ligne prolongée δ β ; et soit un point z donné de position : trouver la hauteur y z, qui marque l'élevation de la mer pour le dit point z produit par les deux luminaires.

SOLUTION.

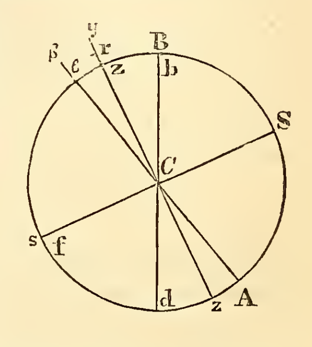
Supposons que le Soleil éleve les eaux en b de la hauteur B b, et la Lune de la hauteur B β au point β. On aura par les précedentes Propositions B b $= \frac{2}{3}\beta$, et B $\beta = \frac{2}{3}\delta$: qu'on partage la hauteur cherchée y z en deux parties y r, et r z, dont la premiere convienne à l'action de la Lune, et l'autre à l'action du Soleil : soit le sinus total $= 1$, le sinus de

l'angle donné b C z $= \frac{\sigma}{b}$; le sinus de l'angle ϵ C z pareillement donné $= \frac{\varrho}{b}$: de cette maniere, nous aurons en vertu du III. §. $rz = \frac{3ss - bb}{3bb} \times \epsilon = \frac{2bb - 3\sigma\sigma}{3bb} \times \epsilon$, et pareillement $yr = \frac{2bb - 3\varrho\varrho}{3bb} \times \delta$, et par conséquent

$$yz = \frac{2bb - 3\sigma\sigma}{3bb} \times \epsilon + \frac{2bb - 3\epsilon\epsilon}{3bb} \times \delta. \quad \text{C. q. f. t.}$$

COROLLAIRE.

IX.—On voit par cette solution la loi qu'il faudroit observer pour construire une table, qui marquât pour chaque âge de la Lune, et pour chaque moment, les hauteurs des marées, en supposant le point z changer continuellement de position, jusqu'à-ce qu'il ait fait le tour: voyons à présent quel est le point z, qui marque la plus grande hauteur y z, les poles b et ϵ étant donnés de position.



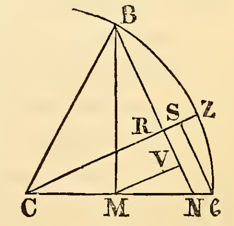
LEMME.

X.—Si le sinus de l'angle b C z est appellé, comme ci-dessus, $\frac{\sigma}{b}$; le sinus de l'angle ϵ C z, $\frac{\varrho}{b}$; le sinus de la somme de ces deux angles, c'est-à-dire, le sinus de l'angle b C ϵ, $\frac{m}{b}$; je dis qu'on aura

$$\varrho = \frac{m\sqrt{(bb - \sigma\sigma)} - n\sigma}{b}, \text{ * et}$$

$$\varrho^2 = \frac{mmbb + nn\sigma\sigma - mm\sigma\sigma - 2mn\sigma\sqrt{(bb - \sigma\sigma)}}{bb}$$

* La lettre n exprime ici $\sqrt{bb - mm}$. La démonstration de ce Lemme est fort simple, le rayon B C étant b, le sinus de tout l'angle B C ϵ étant $\frac{m}{b}$, on aura B M = m, C M = $\sqrt{bb - mm}$; ϵ S = σ, C S = $\sqrt{bb - \sigma\sigma}$, B R = ϱ. Prolongez B R en N, et menez M V parallele à C R, les triangles C ϵ S et B M V seront semblables à cause des angles droits S et V et des angles égaux C ϵ S et M B N; donc on aura C ϵ (b) : C S ($\sqrt{bb - \sigma\sigma}$) = B M (m) : B V = $\frac{m\sqrt{bb - \sigma\sigma}}{b}$; on trouverà de même que C ϵ (b) : ϵ S (σ) = C N : N R = C M (n) : R V = $\frac{n\sigma}{b}$; donc B R (ϱ) = B V — R V = $\frac{m\sqrt{bb - \sigma\sigma}}{b} - \frac{n\sigma}{b}$: C. q. f. t.



Je n'ajoûterai pas la démonstration de ce Lemme: mais il est pourtant bon d'avertir ici, qu'en cherchant la valeur de ϱ, qui marque le sinus de la différence de deux angles donnés par leurs sinus, on tombe facilement dans une autre expression beaucoup plus prolixe, et qui rend le calcul du Problême, que nous allons exposer, presque impraticable.

PROBLEME.

Trouver les points z, où les hauteurs y z soient les plus grandes.

SOLUTION.

La nature de notre Problême demande, que la différentielle de y z, sçavoir $\frac{-2\,\varepsilon\,\sigma\,d\,\sigma - 2\,\delta\,\varrho\,d\,\varrho}{b\,b}$ (§. VIII.) soït $= 0$, ou bien $\varrho\,d\,\varrho = \frac{-\varepsilon}{\delta}\,\sigma\,d\,\sigma$.

Et si l'on différentie l'équation seconde du précedent Lemme, on trouve, prenant les quantités m, n et b pour constantes, et σ pour variable,

$$\varrho\,d\,\varrho = \frac{n\,n\,\sigma\,d\,\sigma - n\,m\,\sigma\,d\,\sigma}{b\,b} + \frac{2\,m\,n\,\sigma\,\sigma - n\,m\,b\,b}{b\,b\,\surd\,(b\,b - \sigma\,\sigma)}\,d\,\sigma.$$

En comparant ces deux valeurs de $\varrho\,d\,\varrho$, on trouve une nouvelle équation, à laquelle on pourra donner une telle forme,

$$\left(-\frac{\varepsilon}{\delta}\,b\,b\,\sigma + m\,m\,\sigma - n\,n\,\sigma\right)\surd\overline{b\,b - \sigma\,\sigma} = 2\,m\,n\,\sigma\,\sigma - m\,n\,b\,b:$$ si

l'on suppose pour abréger la formule $\frac{-\varepsilon\,b\,b}{\delta\,m\,n} + \frac{m}{n} - \frac{n}{m} = A$, on trouve aprés une reduction entiere de l'équation, le sinus de l'angle b C z, ou

$$\frac{\sigma}{b} = \pm\surd\left(\tfrac{1}{2} \pm \frac{A}{2\,\surd\,(4 + A\,A)}\right). \quad \text{C. q. f. t.}$$

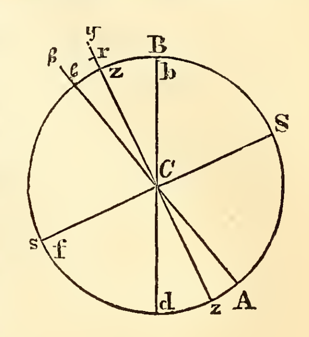
SCHOLIE.

XII.—Il ne sera pas difficile de reconnoître dans chaque cas, quel choix on doit faire des signes ambigus. Mais pour faciliter la chose, et pour en donner une idée d'autant plus distincte, on pourra faire les remarques qui suivent.

1°. Que notre formule marque en même tems quatre points z, Z, s et S; que les deux premiers diametralement opposés, marquent que la mer y est la plus haute, et les deux autres diametralement opposés marquent que la mer x est la plus basse, et que l'arc z s est toujours de 90°, ce que

l'on connoit de ce que $\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{A}{2\sqrt{4 + AA}}}$, exprimant le sinus d'un angle, son cosinus est exprimé par $\sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{A}{2\sqrt{4 + AA}}\right)}$.

2°. Que l'angle $b\,C\,\varepsilon$ étant aigu, le point z tombe entre les points b et ε, que si cet angle est droit, le point z tombe précisément sur ε (en supposant la force lunaire plus grande que la force solaire, comme elle l'est sans doute); et enfin, lorsque l'angle $bC\varepsilon$ est obtus, que le point z tombe au-delà du point ε, l'arc b z devenant plus grand que l'arc $b\,\varepsilon$, avec cette loi que le point z s'approche reciproquement du point d, tout comme il s'étoit éloigné du point b. Enfin, qu'il y a autant de racines inutiles, qu'il faut rejetter, mais qu'il faudroit adopter, si la force solaire surpassoit la force lunaire.



COROLLAIRE I.

XIII.—On trouve le sinus de l'angle $\varepsilon\,C\,z$ exprimé par $\frac{\varepsilon}{b}$ de la même façon, que nous avons trouvé le sinus de l'angle b C z. On voit même que sans faire le calcul de nouveau, on n'a qu'à renverser les lettres ε et δ dans la valeur de A, indiquée au §. XI. et supposer $-\frac{\delta\,b\,b}{\varepsilon\,m\,n} + \frac{m}{n} - \frac{n}{m} = B$, et on aura $\frac{\rho}{b} = \pm\sqrt{\left(\frac{1}{2} \pm \frac{B}{2\sqrt{(4 + BB)}}\right)}$.

COROLLAIRE II.

XIV.—Considérant l'angle $b\,C\,\varepsilon$ comme variable, on voit que l'angle $\varepsilon\,C\,z$, qui marque l'angle horaire entre le moment de la plus haute marée, et celui du passage de la Lune par le méridien, peut faire un *maximum*, ou plus grand, puisqu'il est = o, tant lorsque l'angle $b\,C\,\varepsilon$ est nul, que lorsqu'il est égal à un droit: nous allons déterminer cet angle dans la Proposition suivante.

PROBLEME.

XV.—Déterminer l'angle $b\,C\,\varepsilon$ tel que son angle $\varepsilon\,C\,z$ devienne le plus grand qu'il est possible.

SOLUTION.

Pour déterminer l'angle en question, il faut faire d $\varrho = o$, or ϱ étant exprimé par des constantes, et par la variable B (§. XIII.) il faut supposer d B = o, c'est-à-dire, que la différentielle de la quantité $\frac{-\delta b b}{\mathfrak{C} m n} + \frac{m}{n} - \frac{n}{m}$, doit être supposée égale à zero, en considérant les lettres m et n comme variables: substituons pour n sa valeur $\sqrt{bb - mm}$ (§. X.) nous aurons

$$B = \frac{-\delta b b + 2 \mathfrak{C} m m - \mathfrak{C} b b}{\mathfrak{C} m \sqrt{bb - mm}},$$

dont la différentielle devient nulle, en faisant

$$\frac{m}{b} = \sqrt{\frac{\mathfrak{C} + \delta}{2 \delta}}.$$

COROLLAIRE.

XVI.—Si $\mathfrak{C}$ étoit $= \delta$, c'est-à-dire, si les deux luminaires avoient une force égale, pour mettre la mer en mouvement, on auroit m = b. Mais la force lunaire étant plus grande que la force solaire, m devient plus petit que b: cependant l'angle b C $\mathfrak{C}$ ne deviendra jamais moindre que de 45°.

On remarquera aussi, qu'il y a quatre points, tels que $\mathfrak{C}$, dont deux sont autant éloignés du point b, que les deux autres le sont du point d; et que dans ces quatre points, la haute marée vient alternativement après et avant le passage de la Lune par le méridien.

Nous allons voir à présent comme on doit appliquer tout ce que nous venons de dire pour trouver l'heure des marées, et pour faire voir, combien notre théorie bien ménagée s'accorde là-dessus avec les observations.

CHAPITRE VI.

Sur l'heure moyenne des Marées pour toutes les Lunaisons.

I.—On a été de tout tems soigneux à bien remarquer l'heure des hautes et basses marées, pour établir là-dessus, autant qu'il est possible, des

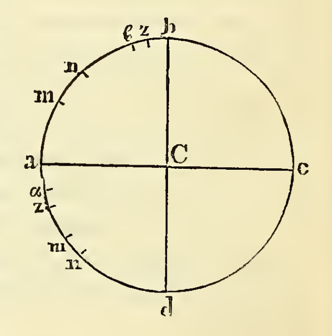
regles pour l'utilité de la navigation; et quoi qu'il soit impossible de donner des regles générales et exactes, on n'a pas laissé de continuer ces recherches. Mais je ne sçache pas qu'on se soit encore avisé de raisonner là-dessus autrement, que par *induction* sur un grand nombre d'observations, pendant que c'est ici une matiere, qui dépend beaucoup de la géometrie pour l'essentiel, et que ce n'est que par rapport à quelques circonstances, qu'on est obligé de recourir aux observations, pour établir des regles: et cela est si vrai, que la seule théorie m'a fait voir plusieurs points, dont je n'étois pas encore instruit par la lecture. Voyons donc avant toutes choses, jusqu'où la théorie peut aller, pour éclaircir notre sujet: nous nous attacherons encore aux hypotheses marquées au XIX. §. du Chap. IV. que je prie le lecteur de relire. Nous irons ensuite plus loin, et nous examinerons, quelle correction il faudra employer à l'égard de chaque hypothese, lorsqu'elle est en quelque façon changée.

II.—Il est bon d'avertir ici le lecteur, lorsque je parlerai des deux marées qui se suivent, que j'entends deux marées pareilles, qui se suivent au bout de 24 heures, en sautant la marée intermediaire; nous éviterons par-là de certaines petites inégalités, qu'on a observées, lorsqu'on a comparé ensemble les deux marées, qui se font dans un même jour. Si l'on veut comparer ensemble des marées, qui ont plusieurs jours d'intervalle, nous choisirons celles qui se font pendant que la Lune est au-dessus de l'horison.

III.—Il est clair, que si la Lune avoit infiniment plus de force que le Soleil, la haute marée répondroit précisément au passage de la Lune par le méridien, et l'intervalle d'une marée à l'autre seroit d'un jour lunaire précis: et si au contraire la force du Soleil surpassoit infiniment la force lunaire, la marée se feroit au moment du passage du Soleil par le méridien, et l'intervalle d'une marée à l'autre, seroit précisément d'un jour solaire. Mais comme les deux dites forces sont, suivant toutes les observations, comparables entre elles, on voit que le vrai tems de la haute marée doit dépendre du passage par le méridien de l'un et de l'autre luminaire: mais il aura toujours plus de rapport avec la Lune, qu'avec le Soleil, parce que la force lunaire est, sans contredit, plus grande que la force solaire. Nous verrons dans la suite, qu'il y a quatre situations de la Lune, dans lesquelles l'intervalle de deux marées, qui se suivent, est précisément d'un jour lunaire; et qu'en deçà, ou en delà de ces quatre points, les marées doivent nécessairement avancer ou retarder sur le tems du jour lunaire: nous déterminerons ces accélerations et retardemens, qui sont fort inégaux, et nous ajoûterons plusieurs autres remarques sur

cette matiere, qui l'éclairciront plus que toutes les observations, qu'on a faites jusqu'ici. Il est vrai que ces déterminations dépendent du rapport qu'il y a entre les forces des deux luminaires, que ce rapport est encore incertain, et qu'il est même variable: mais j'indiquerai quels sont les moyens les plus sùrs, pour le déterminer d'abord dans de certaines circonstances, et ensuite généralement. Avant que de traiter cette question, qui est une des plus utiles, et des plus essentielles, nous déterminerons généralement le vrai tems des hautes et basses marées, en supposant le rapport entre les forces des deux luminaires connu.

IV.—Soit b a d c l'equateur, dans le plan duquel les deux luminaires sont encore supposés se mouvoir de b vers a, pendant que l'equateur de la Terre se tourne dans le même sens autour de son centre C. Prenons dans l'equateur un point b, et considérons les luminaires se trouver dans leur conjonction au point b, c'est-à-dire, étant l'un et l'autre dans la ligne prolongée d b; on voit qu'en ce cas la haute marée doit être dans ce moment-là en b, et précisément à midi.



V.—Voyons à présent ce qui doit arriver un, deux, trois, &c. jours après: supposons pour cet effet, que le Soleil se trouvant encore à midi au point b, la Lune réponde au point ϵ: la haute marée répondra dans ce moment au point z, et les arcs b z, ϵ z se déterminent par les §. XI. et XIII. du Chap. V. il faut donc que le point b parcoure dans l'equateur l'arc b z, pour se trouver dans l'endroit de la plus haute marée; car on peut négliger les petits arcs, que les luminaires parcourent, dans le tems que le point b de l'equateur parcourt l'arc b z. On voit donc, que si l'on veut regler le tems des hautes marées après le tems vrai, on doit prendre l'arc b z, pour l'arc horaire, qui marque l'heure de la haute marée de ce jour-là.

Cette regle suppose le point ϵ en repos, pendant le tems qui convient au dit arc horaire b z; mais il est facile de corriger cette supposition : car nous verrons dans la suite, que l'arc b z est presque égal à l'arc b ϵ; et cela étant, il est clair, qu'on n'a qu'à substituer des heures lunaires aux heures solaires, qui répondent à l'arc b z, pour corriger la dite supposition.

VI.—Nous venons de montrer, comment on peut déterminer le vrai tems des hautes marées, en le rapportant au midi, c'est-à-dire, au passage

du Soleil par le méridien : voici à présent, comment on peut déterminer l'heure des hautes marées, en la rapportant au passage de la Lune par le méridien, qu'on connoît par les ephémerides : on peut le faire immédiatement par le moyen de l'arc $\mathfrak{C}$ z : nous verrons que le point z ne sçauroit s'éloigner du point $\mathfrak{C}$ au-delà d'environ dix degrés, qui répond à 40 minutes de tems, pendant lequel cet arc ne sçauroit varier sensiblement ; d'où il suit que ce petit arc $\mathfrak{C}$ z marquera toujours l'arc horaire entre le moment du passage de la Lune par le méridien et le moment de la haute marée.

VII.—L'arc $\mathfrak{C}$ z étant tantôt négatif, tantôt affirmatif, comme il paroît par le XIII. Art. du Chap. V. on voit que la haute marée suivra le passage de la Lune par le méridien, depuis les syzygies jusqu'aux quadratures, et qu'elle le précèdera depuis les quadratures jusqu'aux syzygies : on voit encore par l'Art. XV. du Chap. V. que l'arc $\mathfrak{C}$ z fait un *maximum*, lorsque le sinus de l'arc b $\mathfrak{C}$ est $= \sqrt{\frac{\mathfrak{C} + \delta}{2\,\delta}}$: c'est alors que la haute marée retarde ou avance le plus sur le passage de la Lune par le méridien : et comme vers ce tems-là les points $\mathfrak{C}$ et z peuvent être censés avoir un mouvement égal, l'intervalle d'une marée à l'autre, sera alors précisément d'un jour lunaire : et cet intervalle peut être appellé intervalle moyen entre deux marées qui se suivent : il est de 24 heures $50\frac{1}{2}$ minutes, en prenant 29 jours 12 heures 44 minutes, pour le tems moyen d'une conjonction à l'autre.

On remarquera encore que l'intervalle d'une marée à l'autre, est le plus petit dans les syzygies, et le plus grand dans les quadratures.

VIII.—Pour déterminer analytiquement les propriétés, que nous venons d'indiquer en gros, nous supposerons, que la Lune répondant au point m, et la haute marée étant dans ce moment là au point n, l'arc m n soit alors le plus grand qu'il est possible. Soit outre cela encore le sinus total = 1, le sinus de l'arc m b = m, son cosinus = n. Cela étant, nous avons déja dit, et nous le remarquerons encore ici :

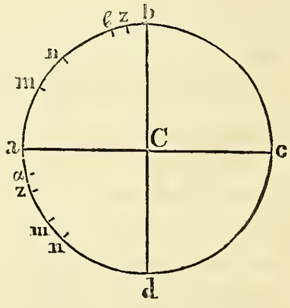
1°. Qu'on aura m $= \sqrt{\frac{\mathfrak{C} + \delta}{\delta}}$.

2°. Qu'on peut déterminer la grandeur de l'arc m n par le moyen du XIII. §. Chap. V. où nous avons démontré, que généralement le sinus de cet arc est

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2} \pm \frac{B}{2\sqrt{4 + BB}}\right)}$$

en supposant $B = \frac{-\delta b b}{\epsilon m n} + \frac{m}{n} - \frac{n}{m}$. Pour appliquer cette regle générale à notre cas particulier, il faut supposer $b = 1$; $m = \sqrt{\frac{\epsilon + \delta}{2\delta}}$, et $n = \sqrt{\frac{\delta - \epsilon}{2\delta}}$: après ces substitutions, on trouve le sinus de l'arc m n $= \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\delta\delta - \epsilon\epsilon}}{2\delta}\right)}$; et comme δ est beaucoup plus grand que ϵ, on peut censer le sinus de l'arc m n être simplement $= \frac{\epsilon}{2\delta}$.

3°. Qu'on déterminera la grandeur de l'arc n b, par le moyen du XI. §. du Chap. V. Il est remarquable que cet arc ne dépend point du rapport, qui est entre la force lunaire δ, et la force solaire ϵ; car il est toujours de 45 degrés.



4°. Que si la Lune est supposée dans un point quelconque ϵ, les arcs b z et ϵ z peuvent se déterminer par le moyen des XI. et XIII. §. du Chap. V. comme nous avons déja dit: mais si l'on suppose le point ϵ bien près du point b, nos formules font voir, qu'on peut censer alors le sinus de l'arc $\epsilon z = \frac{\epsilon}{\delta + \delta} \times m$, et le sinus du petit arc $b z = \frac{\delta}{\epsilon + \delta} \times m$. Cette formule nous servira à determiner combien les marées priment vers les syzygies.

5°. Que si la Lune se trouve en α bien près de a, la haute marée répondra dans ce moment au point z au-delà du point α, et on trouvera par le XIII. Art. du Chap. V. si l'on traite bien l'équation qui y est marquée, le sinus du petit arc $\alpha z = \frac{\epsilon}{\delta - \epsilon} \times n$, en prenant pour n le cosinus de l'arc b α, ou ce qui revient au même, le sinus du petit arc a α. Cette valeur du petit arc α z nous servira à déterminer, combien les marées retardent vers les quadratures.

Ces deux dernieres remarques sont fondées sur ce que m ou n, étant comme infiniment petits, les quantités A et B deviennent comme infiniment grandes, et alors on peut substituer simplement $\frac{1}{A}$ et $\frac{1}{B}$ à la place des quantités.

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{A}{3\sqrt{4 + AA}}\right)} \text{ et } \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{B}{2\sqrt{4 + BB}}\right)}:$$

et après ces substitutions, on trouve les sinus des petits arcs, comme nous les avons déterminés.

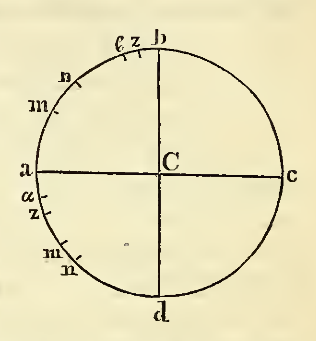
IX.—Toutes ces propriétés, que nous venons d'établir, sont tout-à-fait conformes aux observations. Mais pour en sentir toute la force, il faudroit toujours sçavoir le rapport qu'il y a entre les forces δ et $\mathfrak{C}$, et c'est ce que j'ai déja dit, qu'on ne sçauroit déterminer immédiatement par les principes d'astronomie, faute d'observations assez justes sur la Lune; il faut donc s'en tenir aux effets physiques, que la Lune produit sur la Terre, pour en déduire sa force; et je n'en connois point d'autres, que les marées mêmes: mais il s'en faut servir avec beaucoup de circonspection. Comme c'est ici un point très-essentiel, je n'ai pas voulu manquer de le considérer avec toute l'attention qu'il mérite. Voici mes refléxions là-dessus.

X.—On pourroit déduire le rapport moyen entre les forces δ et $\mathfrak{C}$ du rapport des plus hautes marées, qui se font près des syzygies, et des plus petites marées aux quadratures. Car on voit par le VIII. §. Chap. V. que la hauteur de la plus grande marée doit être à celle de la plus petite marée, comme $\delta + \mathfrak{C}$ est à $\delta - \mathfrak{C}$. Mais les hauteurs des marées dans les ports, où l'on fait les observations, dépendent de tant de circonstances, qu'elles ne peuvent être tout-à-fait proportionnelles aux hauteurs des marées dans la mer libre; et c'est ce qui fait, qu'on trouve le rapport moyen entre les plus grandes et les plus petites marées, assez différent dans différents ports.

M. Newton, qui a suivi cette méthode, rapporte une observation faite par Sturm au-dessous de Bristol, où cet auteur a trouvé que les hauteurs de la plus grande et de la plus petite marée, ont été, comme 9 à 5, d'où il faudroit conclure, que $\delta = 3\frac{1}{2} \times \mathfrak{C}$. Cette observation est bien éloignée de celle que j'ai reçûe dernierement faite à Saint Malo par M. Thouroud. La voici: " Dans les grandissimes marées, la mer s'éleve de 50 pieds en " plomb au-dessus du bas de l'eau: dans les marées bâtardes, elle ne diffĕre que de quinze pieds." Si j'ai bien compris cette observation, la plus grande marée étoit à la plus petite, comme 50 à 15, ou comme 10 à 3; ce qui donneroit $\delta = \frac{13}{7} \times \mathfrak{C}$. Ces deux resultans sont bien différens: il est vrai, que le rapport de δ à $\mathfrak{C}$ est variable, mais cette variation ne sçauroit aller si loin; si la plus petite valeur de $\frac{\delta}{\mathfrak{C}}$ est $=$ m, la plus grande valeur de $\frac{\delta}{\mathfrak{C}}$ sera environ $= \frac{5}{2}$ m.

Il y a une autre réflexion à faire sur cette méthode de trouver le

rapport entre les forces des deux luminaires : c'est que les marées font une espece d'oscillations, qui se ressentent toujours des oscillations précedentes : cette raison fait que les variations des marées, ne sçauroient être aussi grandes qu'elles devroient être, suivant les loix hydrostatiques. Concevons un pendule attaché à une horloge animée successivement par des poids différens : on sçait, que plus ces poids sont grands, plus les oscillations du pendule deviennent grandes : mais en changeant les poids, les premieres oscillations ne prendront pas d'abord leur grandeur naturelle ; elles ne s'en approchent que peu à peu. Il n'en est pas de même des durées des oscillations, lorsque le pendule est successivement animé par différentes pesanteurs. Considérons d'abord un pendule simple animé par la pesanteur ordinaire, et qui fasse ses oscillations dans deux secondes de tems, et supposons ensuite la pesanteur devenir tout d'un coup quatre fois plus grande ; je dis que la premiere oscillation, qui suivra ce changement, se fera de même que toutes les autres suivantes dans une seconde de tems.



Cette considération me porte à croire, que les observations sur les durées et sur les intervalles des marées sont plus sûres pour notre dessein, que les hauteurs des marées : si cette refléxion est bien fondée, on pourroit faire attention aux méthodes suivantes, pour trouver le rapport moyen entre δ et β.

1°. Il faudroit pendant plusieurs mois observer, quel est le plus petit intervalle de deux marées. Nous avons dit au VI. §. que l'intervalle moyen est d'un jour moyen lunaire, que je suppose de 24 heures 50 minutes : mais il sera moindre dans les syzygies, quoique plus grand qu'un jour solaire, ou de 24 heures : supposons ce plus petit intervalle de 24 heures, et d'autant de minutes, qu'il y a d'unités dans N ; et il faudra prendre dans la figure ci-dessus un arc horaire b β de 50 minutes de tems : de cet arc b β, il faut prendre une partie β z, qui réponde à (50 — N) minutes. Or par la IV. remarque du VII. §. l'arc β z est à l'arc b β, comme $\frac{\beta + \delta}{\beta} \times$ m est à m : d'où nous tirons cette analogie,

$$50 - N : 50 :: \beta : \beta + \delta.$$

et cette analogie donne

$$\delta = \frac{N}{50 - N} \times \beta.$$

Soit N égal à 35 (c'est ainsi qu'on l'observe à peu près dans les marées regulieres) et on aura $\delta = \frac{35}{15}$ ℭ.

2⁰. On pourroit aussi faire attention aux plus grands intervalles, si ce plus grand intervalle (qui se fait ordinairement après les quadratures) étoit de 24 heures et d'autant de minutes, qu'il y a d'unités en M. On trouve par la même méthode, que nous venons d'indiquer, et par la V. remarque du VII. §. $\delta = \frac{M}{M - 50} \times$ ℭ.

Soit M = 85 minutes (c'est à peu près la valeur que l'on observe) et on trouvera

$$\delta = \frac{85}{35} \times \text{ℭ}.$$

Voilà les deux méthodes, que je crois les plus exactes; et la premiere doit l'emporter sur la seconde, parce que les marées sont plus irrégulieres après les quadratures, qu'après les syzygies. Il y a encore plusieurs autres méthodes pareilles à celles que je viens d'exposer, et dont j'ai fait en partie le calcul; mais comme je ne suis pas assez content des observations, sur lesquelles ces méthodes sont fondées, je ne les mettrai pas ici. Je me contenterai de dire, qu'après tous les examens que j'ai faits, j'ai trouvé, que pour accorder, autant qu'il est possible, toutes les observations qui déterminent le rapport entre δ et ℭ, il faut supposer la valeur moyenne de $\frac{\delta}{\text{ℭ}} = \frac{5}{2}$; la plus petite valeur de $\frac{\delta}{\text{ℭ}} = 2$, et sa plus grande valeur = 3. C'est donc sur ces suppositions que nous raisonnerons et calculerons dans la suite; et comme nous ne considérons encore toutes les circonstances variables, que dans leur état moyen, nous ferons dans tout le reste de ce Chapitre $\frac{\delta}{\text{ℭ}} = \frac{5}{2}$.

M. Newton suppose $\frac{\delta}{\text{ℭ}}$ environ = 4: mais j'ai déja dit, pourquoi sa méthode doit indiquer la valeur de $\frac{\delta}{\text{ℭ}}$ plus grande qu'elle n'est: la raison en est, que si les marées n'avoient point d'influences les unes sur les autres, comme elles ont, les plus grandes marées différeroient davantage des plus petites, et par là on trouveroit la valeur de $\frac{\delta}{\text{ℭ}}$ plus petite.

Avant que de finir cette digression sur le rapport entre la force de la Lune, et celle du Soleil, et d'en faire l'application à notre sujet, je ferai ici une refléxion sur les forces absolues de la Lune et du Soleil. Nous avons fait voir aux §. VIII. et XV. du Chap. IV. que dans l'hypothese

de l'homogenéité de la Terre adoptée par M. Newton, le Soleil ne sçauroit faire varier les eaux au-delà de deux pieds, ni par conséquent la Lune au-delà de cinq pieds. Ces deux forces combinées ensemble pour les quadratures feroient une force absolue à faire varier les eaux en pleine mer de trois pieds de hauteur verticale pendant une marée. Mais peut-on comprendre, que d'une variation de trois pieds en pleine mer, il puisse provenir tous les effets des marées aux quadratures? Encore est il très-vraisemblable, que la variation actuelle des eaux differe beaucoup de la variation entiere, que la théorie indique comme possible: peut-être même, que la variation actuelle est à peine sensible par rapport à l'autre, et cela non seulement à cause des empêchemens accidentels, tel que le frottement, l'imparfaite fluidité, &c.; mais encore à cause de l'inertie des eaux et du mouvement journalier de la Terre; car on voit bien, que si ce mouvement journalier de la Terre étoit d'une vitesse infinie, les luminaires ne pourroient avoir aucun effet pour faire varier la mer, quelque force qu'ils eussent. Je suis donc entierement persuadé, que les forces absolues des deux luminaires sont beaucoup plus grandes, que M. Newton ne les suppose, et tous ses commentateurs après lui, prenant l'homogenéité de la Terre, pour une hypothese, sur laquelle ils bâtissent tout leur systême. Ces refléxions doivent donner beaucoup de poids à tout ce que nous avons dit au Chap. IV. où nous avons démontré, qu'en supposant, que les densités des couches de la Terre augmentent depuis la circonférence vers le centre (supposition d'ailleurs extrêmement probable par plusieurs raisons physiques, dont j'ai exposé une partie au XIII. §. du Chap. IV.) on peut augmenter, tant qu'on veut, les effets de la Lune et du Soleil sur la Terre. Après cet examen sur les forces, taut relatives, qu'absolues des deux luminaires, nous allons en faire usage, pour considérer de plus près tout ce qui regarde la durée des marées, leurs intervalles, et pour faire voir le merveilleux accord entre la théorie et les observations.

XI.—Les intervalles de deux marées qui se suivent, sont les plus petits dans le tems des syzygies: leur intervalle moyen est alors de 24 heures 35 minutes, et les marées priment chaque jour de 15 minutes sur le mouvement de la Lune.

XII.—Les intervalles des deux marées qui se suivent, sont les plus grands dans le tems des quadratures: ils sont alors de 24 heures 85 minutes, c'est-à-dire, de 25 heures 25 minutes: les marées retardent de 35 minutes par jour sur le mouvement de la Lune. Cette grande inégalité doit rendre l'heure des marées plus incertaine et plus irréguliere

que dans les syzygies; et c'est aussi ce que l'on observe: mais ce n'est pas la seule raison.

XIII.—Les marées répondront précisément au passage de la Lune par le méridien, tant dans les quadratures, que dans les syzygies, si celles-ci se font aussi au moment du passage de la Lune par le méridien. Mais si les quadratures et les syzygies ne se font pas dans le moment du passage de la Lune par le meridien, il faut des corrections. Dans les syzygies, il faut une correction de 15 minutes pour un jour entier en vertu du XI. §. et par conséquent $\frac{5}{8}$ de minutes par heure, que la haute marée avancera sur le passage de la Lune par le méridien, si les syzygies se font avant ce même passage; et que la haute marée retardera sur le passage de la Lune par le méridien, si les syzygies se font après ce passage. Dans les quadratures il faut une correction de 35 minutes par jour, en vertu du §. XII. c'est à-dire, environ une minute et demie par heure, que la haute marée retardera sur le passage de la Lune par le méridien, si les quadratures se font avant le dit passage; et qu'elle avancera, si les quadratures se font après le passage de la Lune par le méridien. Car près des points b et a, les arcs β z et α z peuvent être censés proportionnels aux arcs b β et a α.

XIV.—Si au lieu de rapporter les hautes marées aux jours lunaires, on vouloit considérer les jours solaires, on voit bien qu'il faut dire, que les hautes marées, au lieu de primer de 15 minutes dans les syzygies, retardent de 35 minutes dans un jour, ou d'environ une minute et demie par heure; et qu'elles retardent de 85 minutes par jour dans les quadratures, ce qui fait environ trois minutes et demie par heure: de là nous tirerons cette regle pour les syzygies.

Il faut ajoûter à l'heure moyenne de la marée dans les syzygies une minute et demie par chaque heure, que les syzygies auront devancé la dite heure moyenne, et en retrancher une minute et demie par chaque heure, que les syzygies retarderont sur la même heure moyenne.

Et pour les quadratures nous aurons la regle suivante:

Il faut ajoûter, ou retrancher, dans les quadratures de l'heure moyenne de la marée, trois minutes et demie par chaque heure, que les quadratures avanceront ou retarderont sur la même heure moyenne.

XV.—M. Cassini, dont les remarques ingénieuses sur les marées m'ont servi de guide dans mes recherches, a donné par induction des regles pareilles, avec cette différence que dans les syzygies, il a mis deux minutes par heure, au lieu d'une minute et demie; et deux minutes et demie dans les quadratures, au lieu de trois minutes et demie.

XVI.—Enfin nous remarquerons, que l'intervalle moyen de deux marées qui se suivent, lequel intervalle est de 24 heures lunaires, ou 24 heures 50 minutes, n'est pas également éloigné des syzygies et des quadratures; mais qu'il est beaucoup plus prés des quadratures, que des syzygies: aussi pouvoit-on le prévoir facilement; car comme toutes les accélerations depuis le point b jusqu'au point m (qui est celui, dont il est question ici) doivent compenser tous les retardemens depuis le point m jusqu'au point a, et que les accélerations sont beaucoup plus petites que les retardemens, on voit d'abord, que le point m doit être plus près du point a, que du point b. Mais nous déterminerons exactement ce point m par le moyen de la premiere Remarque du VIII. §. où nous avons démontré que le sinus de l'arc m b est $= \sqrt{\frac{\epsilon + \delta}{2\,\delta}} = \sqrt{\frac{7}{10}} = 0{,}8366$ lequel sinus répond à un arc de $56^{d}.\ 47^{m}$. L'arc m b étant donc de $56^{d}.\ 47^{m}.$, l'arc m a sera de $33^{d}.\ 13^{m}.$, et les deux arcs m b et m a sont comme 3407 à 1993.

L'arc n b étant toujours de 45 dégrés (par la III. Remarque du VIII. §.) nous avons l'arc m n $= 11^{d}.\ 47^{m}.$; et cet arc m n marque le plus grand intervalle possible entre le passage de la Lune par le méridien, et la haute marée. Cet intervalle est donc de 47 minutes de tems: le passage de la Lune par le méridien suivra la haute marée depuis les syzygies jusqu'aux quadratures, et la précédera depuis les quadratures jusqu'aux syzygies. Mais le plus grand intervalle de l'un à l'autre (qui se fait environ $2\frac{3}{4}$ jours avant et après les quadratures) ne surpasse jamais 47 minutes de tems.

XVII.—Toutes ces Propositions depuis le XI. §. jusqu'ici, nous donnent une idée claire des heures des hautes marées, et de toutes leurs variations pour chaque âge de la Lune. Car, quoi-que nos démonstrations soyent fort hypothetiques, elles n'en méritent pas moins d'attention; je ferai voir dans le Chapitre suivant, comment on peut donner des corrections assez justes à l'égard de toutes les hypotheses que j'ai exposées au XIX. §. du Chap. IV. Mais pour donner toute la perfection qui est possible, à cette matiere, je montrerai plus précisément, comment on peut trouver l'intervalle entre le passage de la Lune par le méridien, et la haute marée, pour tout arc donné entre les deux luminaires; après quoi je donnerai une table, que j'ai pris la peine de calculer de dix en dix degrés. Il sera facile aprés cela moyennant les ephémerides et des interpolations, de déterminer l'heure des marées généralement.

XVIII.—Soit donc encore le Soleil en b; la Lune dans un point quelconque m: la haute marée en n. Soit le sinus de l'arc m b = m: le sinus total = 1, le cosinus de l'arc m b = n: qu'on fasse (§. XIII. Chap. V.).

$$B = \frac{-\delta b b}{6 m n} + \frac{m}{n} - \frac{n}{m} = \frac{4 m m - 7}{2 m n}:$$

on aura le sinus de l'arc m n (qui est l'arc horaire entre le passage de la Lune par le méridien et la haute marée)

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{B}{2\sqrt{4 + B B}}\right)}.$$

Si l'on change cette quantité radicale en suites, en faisant attention que B est toujours un nombre négatif beaucoup plus grand que l'unité, on verra qu'on peut, sans aucune erreur sensible, supposer le sinus de l'arc horaire m n $= \frac{1}{B} - \frac{3}{2 B^3}$, et même simplement $= \frac{1}{B}$ près des syzygies et des quadratures. Voici à présent la table dont je viens de parler.

La *premiere* colonne marque de dix en dix degrés l'angle compris entre les deux luminaires vûs du centre de la Terre environ l'heure de la marée: la *seconde* marque le nombre de minutes, qu'il faut retrancher depuis les syzygies jusqu'aux quadratures, et ajoûter depuis les quadratures jusqu'aux syzygies à l'heure du passage de la Lune par le méridien, pour trouver l'heure de la marée; et la *troisiéme* marque la vraie heure de la haute marée.

TABLE FONDAMENTALE

Pour trouver l'heure moyenne des Hautes Marées.

Distances entres les deux luminaires en degrés.	*Tems de la haute mer avant et aprés le passage de la Lune par le méridien.*	*Heure de la haute mer.*	
0 Dégrés.	0 Minutes.	0 Heur.	0 Min.
10	11½ avant.	0	28½
20	22 avant.	0	58
30	31½ avant.	1	28½
40	40 avant.	2	0
50	45 avant.	2	35
60	46½ avant.	3	13½
70	40½ avant.	3	59½
80	25 avant.	4	55
90	0	6	0
100	25 après.	7	5
110	40½ après.	8	0½
120	46½ après.	8	46½
130	45 après.	9	25
140	40 après.	10	0
150	31½ après.	10	31½
160	22 après.	11	2
170	11½ après.	11	31½
180	0	12	0

XIX.—La table que nous venons de donner, détermine généralement l'heures des hautes mers pour les hypotheses exposées au XIX. §. Chap. IV. s'il est vrai que la raison moyenne entre les forces de la Lune et du Soleil, soit comme 5 à 2. Je la crois à-peu-près telle, après avoir

bien examiné toutes les observations qui peuvent la déterminer : cependant, comme ces observations ne sont ni assez justes, ni en assez grand nombre, pour s'y fier entierement, je ne la donne pas encore pour tout-à-fait exacte : il est pourtant certain, que cette table ne sçauroit manquer d'avoir toute l'exactitude nécessaire, les marées étant sujettes à plusieurs irrégularités, dont on ne sçauroit donner aucune mesure, et qui sont de beaucoup plus grande conséquence, que tout ce qu'il y a encore d'incertain dans la table. Nous allons examiner avec quelles précautions et corrections on doit s'en servir.

CHAPITRE VII.

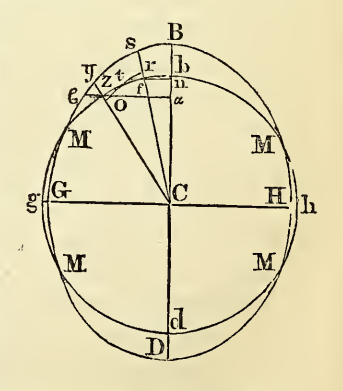
Qui contient à l'égard de plusieurs circonstances variables, les corrections nécessaires pour les Theoremes et pour la table du Chapitre précedent, et une Explication de plusieurs observations faites sur les Marées.

I.—Les vents et les courants irréguliers contribuent le plus à rendre les marées incertaines et irrégulieres. Ils accélereront et augmenteront le flux, ou le retarderont et le diminueront, selon qu'ils ont une direction commune ou contraire avec le flux naturel des eaux. Mais on voit bien qu'il faut se contenter de ces effets, et qu'il est difficile et même impossible d'en marquer le détail, ou des mesures précises.

II.—La seconde circonstance qui fait varier les marées, est la situation du port, sa profondeur, sa communication avec la mer libre, la pente de son fonds et des environs, &c. Tout cela fait qu'il est impossible de marquer l'heure absoluë des marées dans les ports, ou bayes, ou côtes differemment situées. Mais comme toutes ces circonstances demeurent toujours les mêmes, on peut supposer qu'elles font le même effet sur toutes les marées ; sçachant donc combien la marée est retardée dans les syzygies, on la sçaura aussi à-peu-près dans toutes les autres situations de la Lune. Cette supposition est la seule ressource qui nous reste : j'avoue même qu'elle doit être fort peu exacte pour les différentes déclinaisons des deux luminaires à l'égard de l'equateur : il n'est pas vraisemblable non plus, qu'elle soit également juste pour les grandes marées dans les

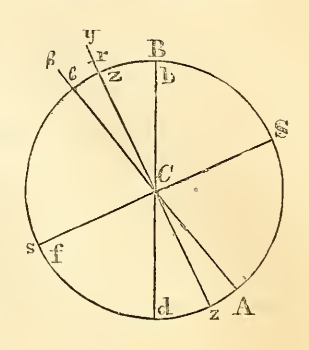
syzygies, et pour les marées bâtardes dans les quadratures. Mais avec tout cela, on ne doit pas la rejetter, plusieurs observations m'ayant fait voir, que moyennant cette correction, le cours des marées répond assez bien à la théorie. Il faut donc sçavoir par un grand nombre d'observations pour chaque endroit l'heure moyenne des hautes mers dans les syzygies, et ajoûter cette heure au tems marqué dans la seconde et troisiéme colonne de notre table: c'est cette heure moyenne des hautes mers dans les syzygies, que les mariniers appellent *heures du port:* elles varient extrêmement dans les différens ports, comprenant tout le tems et durée d'une marée.

III.—Ce retard de l'heure moyenne des pleines mers dans les syzygies, à l'égard du midi, s'observe aussi dans la mer libre, ou plutôt dans les isles qui sont en pleine mer: mais il n'est pas si grand, et vient d'une autre cause, sçavoir de l'inertie des eaux, qui les empêche d'obéir assez promptement, à cause de la vitesse du mouvement journalier de la Terre. On peut appliquer ici tout le raisonnement que nous avons fait au VI. §. du Chap. III. pour expliquer la nutation de la Lune en longitude: on pourroit douter, si cette raison doit faire avancer ou retarder les marées: supposons donc, pour nous en éclaircir, que, tant les luminaires, que la haute marée, répondent à un même point dans cette figure: comme le mouvement des luminaires n'est pas sensible, par rapport au mouvement journalier de la Terre, nous les considérerons comme demeurant dans la ligne d b: l'equateur de la Terre changera sa figure naturelle b g d h en B G D H; et cette figure B G D H tournant autour du centre C de B vers G, le sommet B viendra quelque tems après en y: cela étant, si les eaux pouvoient se composer dans un instant dans un état d'équilibre, l'élevation B b devroit se changer en y z, et la force qui devroit produire ce changement, seroit exprimée par B b — y z: mais cette force étant infiniment petite, si l'angle B C y est infiniment petit, elle ne sçauroit produire tout son effet. On voit par-là, qu'il faut supposer l'angle B C y d'une grandeur considérable, et considérer ensuite le sommet B comme transporté en y, afin que la différence des pressions soit assez grande, pour conserver le sommet des eaux au point y, malgré la rotation du globe. Le vrai sommet étant donc en y, l'angle B C y sera l'angle horaire, qui marquera les retardemens



réels des hautes marées sur le passage de la Lune par le méridien. Là-dessus nous pourrons faire les remarques qui suivent.

1°. Si les luminaires ne sont pas en conjonction, et que le Soleil soit en b, et la Lune en ℭ, on pourra considérer la chose, comme si les luminaires étoient en conjonction, mais dans la ligne C z, déterminée de position au VIII. §. du Chap. V. et augmenter toujours l'angle b C z de l'angle B C y, dont nous venons de parler: d'où il paroit que l'angle horaire B C y doit toujours être ajoûté au tems marqué dans la troisiéme colonne de notre précedente table: car la hauteur des marées ne paroît pas devoir changer la chose, puisque les changemens de pression pour un petit tems donné, sont proportionnels aux baissemens des eaux, qui doivent se faire pour conserver le sommet des eaux dans un même point y.



2°. Si le mouvement journalier de la Terre étoit infiniment lent, l'angle B C y seroit nul: mais il doit être plus grand, d'autant qu'on suppose le mouvement journalier plus grand et plus prompt; et la différence des hauteurs entre les hautes et basses marées, doit diminuer à proportion.

3°. Si la vitesse du mouvement journalier étoit comme infinie, la pleine mer répondroit presque au point G; mais aussi la différence des hautes et basses mers seroit comme nulle. Il me semble après avoir bien considéré la chose, que les hauteurs des marées dans les syzygies doivent être censées proportionnelles aux sinus des angles G C y dans la mer libre, et que si la hauteur B b sans le mouvement journalier de la Terre est = ℭ, elle sera avec le mouvement journalier de la Terre $= \frac{C\,\alpha}{C\,b} \times$ ℭ. Or, comme on a observé que dans la mer libre la haute marée suit environ de deux heures le midi dans les syzygies; il faut supposer l'angle B C y de 30 degrés, et les forces absolues des luminaires doivent être supposées plus grandes en raison de $\sqrt{}$ 3 à z pour élever les eaux, autant qu'elles le seroient sans le mouvement journalier de la Terre.

IV.—Nous avons encore fait voir, que sans le concours des causes secondes, les plus grandes marées devroient se faire dans les syzygies, et les plus petites dans les quadratures. Cependant on a observé, que les

unes et les autres se font un ou deux jours plus tard. Ce retardement est encore produit, si non pour le tout, au moins en partie, par l'inertie des eaux, qui doivent être mises en mouvement, et qui ne sçauroient obéir assez promptement aux forces qui les sollicitent, pour leur faire suivre les loix que ces forces demanderoient. Il y a peut-être encore une autre cause, et M. Cassini me paroit le soupçonner de même, quoi qu'il ne se serve pas de nos principes, la voici : c'est qu'il se pourroit bien que cette cause, qui nous est encore si cachée, et qui donne une tendance mutuelle aux corps flottans et composans le systême du monde, que cette cause, dis-je, ne se communiquât pas dans un instant d'un corps à l'autre, non plus que la lumiere. S'il y avoit, par exemple, un torrent central de matiere subtile, et d'une étenduë infinie, vers le centre de la Terre, et un semblable vers le centre de la Lune, ces deux torrens pourroient produire la gravitation mutuelle de ces deux corps, et la vitesse du premier pourroit être telle, qu'il fallût un ou deux jours à la matiere, pour parvenir depuis la Lune jusqu'a la Terre : en ce cas on voit bien que l'effet de la force lunaire sur notre océan, seroit le même, qu'il auroit été un ou deux jours auparavant dans la supposition que la gravitation se communique dans un instant. Quoi qu'il en soit, comme ce retardement a été observé le même à peu-près après les syzygies et après les quadratures, nous pouvons encore supposer, qu'il est le même, pendant toute la revolution de la Lune, c'est-à-dire, que les marées sont toujours telles, qu'elles devroient être, sans les dites causes, un ou deux jours auparavant.

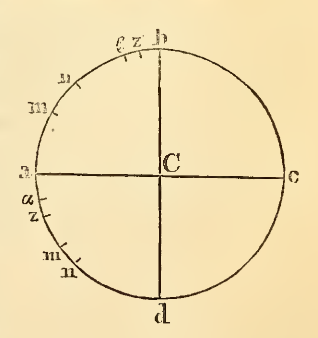
Au reste je n'ai mis ici ce que je viens de dire sur la cause qui pourroit produire la gravitation mutuelle des corps du systême du monde (gravitation, qu'il n'est plus permis de revoquer en doute) que comme un exemple : je ne prétens pas expliquer ce phénomene, j'avoue même qu'il m'est encore tout-à-fait incompréhensible : je ne crois pas non plus que l'Academie en ait voulu demander une explication ; je souhaiterois donc qu'on remarquât que ceux qui voudroient se servir d'autres principes, pour expliquer le flux et reflux de la mer, ne le feroient qu'en apparence, et que tout ce qu'ils pourroient alleguer ne seroient que des efforts d'expliquer mécaniquement la gravitation ou l'attraction mutuelle du Soleil, de la Lune et de la Terre, sans disconvenir pour cela de nos principes au fond, lesquels sont sûrs, et doivent être considérés comme des faits averés par l'expérience.

V.—Je profiterai de cette occasion, pour parler d'un des principaux phénomenes, et pour répondre à une objection, qu'on pourroit nous faire

là-dessus, et dont l'éclaircissement me paroît très-propre pour faire voir l'avantage de notre méthode et de nos calculs.

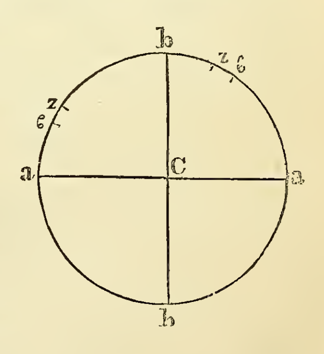
On a déterminé après un nombre infini d'observations, que dans les syzygies l'heure moyenne de la haute mer est à Brest à 3 heures 28 minutes, et dans les quadratures à 8 heures 40 minutes, et que la différence n'est que de 5 heures 12 minutes depuis les syzygies jusqu'aux quadratures. Cette différence a été observée tout-à-fait la même à Dunkerque, et dans d'autres ports; quoique les heures des marées soient différentes aux divers ports. C'est donc ici une observation qui mérite beaucoup d'attention, comme génerale et bien averée: cependant il est certain, que sans les causes secondes, que nous avons déja indiquées, la différence entre les heures du port pour les syzygies, et pour les quadratures, devroit être à-peu-près de 6 heures lunaires, c'est-à-dire d'environ 6 heures 12 minutes. Voici comment je détermine exactement cet intervalle.

L'heure moyenne de la haute mer dans les syzygies, est dans la théorie pure précisément à midi, puisqu'il faut considerer les syzygies, comme tombant précisément sur l'heure du midi. Si les syzygies se faisoient plus tard, la haute mer arriveroit plus tôt et reciproquement; et les accélerations compensent parfaitement les retardemens après un grand nombre d'observations. L'heure moyenne de la haute mer dans les quadratures, doit être de même censée celle qui se fait, lorsque la quadrature se fait précisément à midi; car, lorsqu'il est question d'un certain jour, il en faut prendre le milieu, c'est-à-dire l'heure du midi, afin que les différences se détruisent ou se compensent les unes les autres. Soit donc le Soleil au zenith b, et la Lune en a à 90 degrés du zenith, ou à l'horison: cela étant, on voit que si la haute mer est supposée se faire précisément au moment du passage de la Lune par le méridien, elle doit se faire 6 heures lunaires après midi; car le point b doit faire, par le mouvement journalier de la Terre, l'arc horaire b a α (supposant que le passage de la Lune par le méridient qui a été à l'heure du midi en b, réponde au point α); mais pour parler plus précisément, la Lune et le méridien se trouvant en α, la haute marée répondra au point z [1], et l'arc α z sera égal aux deux tiers du petit arc a α (§. XIII. Chap. VI.) c'est donc l'arc b a z [1] qui marque l'heure moyenne de la haute mer



dans les quadratures : l'arc b a est de 90 degrés ; le petit arc a α est d'environ 3 degrés, et l'arc α z^1 de 2 degrés ; et par conséquent l'arc b a z^1 de 95 degrés, qui donne un tems de 6 heures 20 minutes, qui devroit être *in abstracto* l'heure moyenne de la haute mer dans les quadratures, pendant que celle des syzygies est à midi. D'où vient donc, me demandera-t-on, que, suivant les observations, on ne trouve que 5 heures 12 minutes à la place de 6 heures 20 minutes. Je répons que c'est cette même anticipation des syzygies et des quadratures à l'égard des plus grandes et des plus petites marées, dont nous avons parlé dans le précedent article, qui en est la cause. Il est si vrai, que c'est ici la véritable raison, que la quantité de cette anticipation répond parfaitement bien à l'intervalle des heures moyennes des hautes mers pour les syzygies et les quadratures. Nous en pourrons même déterminer plus exactement la dite anticipation, sur laquelle on est encore bien divisé, les uns la faisant d'un jour, d'autres de deux, pendant qu'on a déterminé assez exactement, et d'un commun accord l'autre point.

Prenons d'abord le terme de deux jours, comme le plus généralement adopté, en considérant que les marées se reglent après les luminaires, tels qu'ils ont été deux jours auparavant : imaginons nous les syzygies se faire en b et les quadratures en b et a : l'effet des luminaires sera, en vertu de notre supposition, dans le tems des syzygies, comme si le Soleil étoit en b, et la Lune en ϵ, en prenant l'arc b ϵ d'environ $25\frac{1}{4}$ degrés ; et le même effet dans les quadratures sera comme si le Soleil étant en b, la Lune se trouvoit en ϵ^1 environ $64\frac{3}{4}$ degrés ; dans les syzygies, la haute mer répond au point z, et dans les quadratures au point z^1. C'est donc l'arc z b z^1 qui exprime l'arc horaire entre l'heure moyenne de la haute mer des syzygies et celle des quadratures (substituant toutefois des heures lunaires à la place des heures ordinaires, à cause du mouvement de la Lune). Or la table mise à la fin du précedent Chapitre, fait voir par le moyen des interpolations, que la Lune étant avant les syzygies à $25\frac{1}{4}$ degrés du Soleil, l'heure de la haute mer est à 10 heures 46 minutes du matin ; et que la Lune étant après les syzygies à $64\frac{3}{4}$ degrés du Soleil, la haute mer se fait à 3 heures 35 minutes du soir : l'intervalle est donc de 4 heures 49 minutes, tems lunaire, ou d'environ 5 heures, tems ordinaire. Ce resultat



répond déja assez bien à l'observation, qui le donne de 5 heures 12 minutes.

Mais si au lieu de deux jours on prend $\frac{8}{5}$ jours, ou environ 59 heures, qui répond à-peu-près à 20 degrés de distance de la Lune depuis les syzygies et les quadratures, l'heure moyenne de la haute mer le jour des syzygies, sera en vertu de la table, à 11 heures 2 minutes du matin, et le jour des quadratures, à 3 heures 59½ minutes du soir; et l'intervalle de l'une à l'autre sera de 4 heures 57½ minutes tems lunaire; qui fait à-peu près 5 heures 8 minutes. Et enfin on trouve une conformité exacte entre les deux points en question, en donnant un jour et demi au retardement des marées, c'est-à-dire, en supposant que l'état des marées est tel qu'il devroit être naturellement, un jour et demi plutôt: c'est alors que l'intervalle de l'heure moyenne de la pleine mer aux syzygies à heures pareilles aux quadratures, devient de 5 heures 12 minutes, tel qu'un grand nombre d'observations l'a donné: aussi ce terme d'un jour et demi, est-ce celui qui est le plus conforme aux observations, et en consultant les tables qui sont dans les Memoires de l'Académie de l'année 1710. pag. 330. et 332. et prenant la différence moyenne, on trouve fort à-peu-près la même valeur. Toutes ces circonstances, l'explication naturelle de ce phénomene, sa conformité avec toutes les observations faites jusqu'ici, et son usage pour déterminer au juste un des points des plus essentiels, qu'on n'a connu encore que par tatonnement, font bien voir la justesse et la supériorité de nos méthodes. *

VI.—Les autres corrections que l'on doit apporter aux formules et à la table du précedent Chapitre, regardent l'hypothese que nous avons faite, pour rendre d'abord la question et les calculs plus faciles; sçavoir *que les deux luminaires font des cercles parfaits autour de la Terre, et cela dans le plan de l'equateur.* Cette supposition entraîne celle d'une égalité parfaite dans les distances des luminaires à la Terre, aussi-bien que dans leur mouvement, et elle fait outre cela leur déclinaison, à l'égard de l'equateur, nulle. Voyons donc à présent ce que les différentes distances, l'inégalité des vitesses et l'obliquité des orbites peuvent faire sur l'heure des marées.

VII.—Les différentes distances des deux luminaires à l'egard de la Terre changent le rapport de leurs forces sur la mer; et c'est cependant de ce rapport que dépendent presque toutes les Propositions du précedent

* Je vois après avoir fini cette piece, que M. Cassini a deja indiqué ce que nôtre remarque contient de physique. Voy. les Mem. de l'Ac. des Sc. de 1714. p. 252.

Chapitre. Nous avons supposé ce rapport pour les distances moyennes de la Lune et du Soleil, comme 5 à 2, fondés sur un grand nombre d'observations, qui doivent nous confirmer dans cette supposition, à l'égard des variations des distances, après avoir remarqué et démontré la Proposition qui suit:

Les forces de chaque luminaire sur la mer sont en raison reciproque triplée de leurs distances à la Terre.

En voici la démonstration. Nous avons dit et démontré au Chapitre quatriéme, que la force de chaque luminaire est généralement $= \frac{ngb}{Ga} \times b$ en entendant par n un nombre constant par $\frac{G}{g}$ le rapport de la pesanteur dans la région de la Terre vers le luminaire à la pesanteur qui se fait vers le centre de la Terre, et par $\frac{b}{a}$ le rapport du rayon de la Terre b à la distance du luminaire a: or comme les différentes distances ne changent que les quantités G et a, nous voyons que la force de chaque luminaire est constamment proportionnelle à $\frac{g}{a}$, et la quantité g, qui exprime la pesanteur vers le centre du luminaire, étant reciproquement proportionnelle aux quarrés des distances a, il s'ensuit que les forces de chaque luminaire sur la mer, sont en raison reciproque triplée de leurs distances à la Terre.

M. Newton a déja démontré cette Proposition, qui se confirme aussi par toutes les observations faites sur les marées, quand on en fait une juste estime, et une application bien ménagée. La Proposition que nous venons de démontrer, nous enseigne qu'à la place de notre equation fondamentale $\delta = \frac{5}{2}\, \mathfrak{C}$, employée dans le Chapitre précedent, il faut se servir de celle-ci plus générale

$$\delta = \frac{5}{2} \times \frac{l^3}{L^3} \times \frac{S^3}{s^3} \times \mathfrak{C}.$$

en dénotant par l et s les distances moyennes de la Lune et du Soleil à la Terre, et par L et S leurs distances données quelconques; et là-dessus on pourra calculer toutes les questions traitées-ci-dessus pour des distances quelconques entre les luminaires et la Terre: mais nous ne considérerons que deux cas, 1°. Lorsque la Lune étant dans son périgée, et la Terre dans son aphelie, le rapport de δ à $\mathfrak{C}$ devient le plus grand; et 2°. Lorsque la Lune étant au contraire dans son apogée, et la Terre dans son perihelie, le rapport de δ à $\mathfrak{C}$ devient le plus petit. Nous don-

nerons 1000 parties à la distance moyenne de la Lune, 1055 à sa plus grande distance, et 945 à sa plus petite distance; et pour le Soleil, nous poserons les pareilles distances être en raison de 1000, 1027 et 983; et nous aurons pour le *premier* cas $\delta = 3{,}115$ ☾; et dans le *second* cas $\delta = 2{,}022$ ☾.

Comme il ne s'agit ici que des petites corrections, nous supposerons simplement pour le premier cas $\delta = 3$ ☾, et pour le second $\delta = 2$ ☾; et afin que nos regles soient d'autant plus faciles dans l'application, nous n'aurons point d'égard aux variations du Soleil, comme n'étant presque d'aucune importance par rapport à celles de la Lune. Disons donc simplement, que dans le perigée de la Lune, il faut mettre $\delta = 3$ ☾, et dans l'apogée $\delta = 2$ ☾. Cela étant, voici les conséquences que nous en tirons.

1°. Un jour et demi après les syzygies, l'intervalle de deux marées qui se suivent, est dans le perigée de 24 heures $27\frac{1}{2}$ minutes; et dans l'apogée de 24 heures 33 minutes.

2°. Un jour et demi après les quadratures, le même intervalle est dans le perigée de 25 heures 15 minutes; et dans l'apogée de 25 heures 40 minutes. Voyez à l'égard de ces deux Propositions le §. VII. du Chap. VI.

3°. Le plus grand intervalle entre le passage de la Lune par le méridien et la haute mer (que nous avons vû au XVI. §. du Chap. VI. devoir se faire environ $2\frac{3}{4}$ jours avant et après les quadratures, sans nos corrections, mais qui sera réellement environ $1\frac{1}{4}$ jours avant, et $4\frac{1}{4}$ après les quadratures) est de 39 minutes environ le perigée de la Lune, et d'une heure environ son apogée. Ce plus grand intervalle se fait aussi plutôt dans le perigée, et plus tard dans l'apogée; la différence est d'environ un demi jour.

4°. Pour calculer la table pareille à celle de ci-dessus, mais qui serve pour le perigée et pour l'apogée de la Lune, nous remarquerons que les sinus des petits arcs horaires, qui marquent les intervalles entre le passage de la Lune et la haute mer sont toujours

$$= \sqrt{\left(\tfrac{1}{2} + \frac{B}{2\sqrt{4 + BB}}\right)}$$

et qu'à la place de cette quantité, on peut substituer la valeur fort approchante $\frac{1}{B} - \frac{3}{2B^3}$ (§. XVIII. Chap. VI.) et même qu'on peut négliger ici, sans le moindre scrupule, le second terme, puisqu'il ne s'agit que de petites corrections. Nous considérerons donc ces petits arcs horaires, comme

reciproquement proportionnels aux quantités B, c'est-à-dire, aux quantités $\frac{-\delta b b}{\epsilon m n} + \frac{m}{n} - \frac{n}{m}$. Et dans cette derniere quantité, nous pourrons encore rejetter sans peine les deux derniers termes pour notre present dessein, et dire par conséquent, que pour les différentes valeurs de $\frac{\delta}{\epsilon}$, tout le reste étant égal, les intervalles entre le passage de la Lune, et la haute marée sont reciproquement proportionnels aux valeurs de $\frac{\delta}{\epsilon}$, ou directement proportionnels aux valeurs de $\frac{\epsilon}{\delta}$. D'où il paroît que les nombres de la seconde colonne de notre précedente table, doivent être multipliés par la fraction $\frac{5}{6}$ dans le perigée, et par $\frac{5}{4}$ dans l'apogée de la Lune, après quoi les nombres de la troisiéme colonne se déterminent comme dans la précedente table. Mais quant aux nombres de la premiere colonne, il faut les augmenter chacun d'environ 20 degrés, à cause du retard d'un jour et demi expliqué au long dans ce Chapitre, pendant lequel la Lune change de place à l'égard du Soleil d'environ 19 degrés, à la place desquels je mettrai un nombre rond de 20 degrés.

Voici donc à present une table corrigée à l'égard de toutes les circonstances exposées jusqu'ici. La premiere colonne marque la distance qui est entre le Soleil et la Lune, environ le tems de la haute mer, ou plutôt ici, environ le passage de la Lune par le méridien. Les trois colonnes suivantes marquent le nombre de minutes entre le passage de la Lune par le méridien, et la haute mer pour le perigée, pour les distances moyennes et pour l'apogée de la Lune. Et les trois dernieres marquent les heures absolues des hautes mers pour les perigées, les distances moyennes et les apogées de la Lune. Et pour se servir de cette table, il ne faudra plus qu'ajoûter aux nombres des six dernieres colonnes l'heure moyenne du port en vertu du III. §. La table n'a été calculée que de dix en dix degrés : les interpolations suppléeront avec assez de justesse à telle autre distance entre les deux luminaires, que les ephémérides indiqueront. La même méthode des interpolations peut aussi être employée, lorsque la Lune se trouve à une distance donnée de son apogée ou perigée.

TABLE PLUS GENERALE ET CORRIGÉE

Pour trouver l'heure des hautes Marées.

Distances entre les Luminaires au moment du passage de la Lune par le Meridien.	*Tems de la haute Mer avant et après le passage de la Lune par le Meridien en minutes de tems.*			*Table approchante des heures de la haute Mer, dont on peut se servir au défaut des ephémérides, qui marquent le passage de la Lune par le Méridien.*					
	Perigée de la Lune.	*Distance moyenne de la Lune.*	*Apogée de la Lune.*	*Perigée de la Lune.* *H.*	*M.*	*Distance moyenne de la Lune.* *H.*	*M.*	*Apogée de la Lune.* *H.*	*M.*
0	18 après.	22 après.	27½ après.	0	18	0	22	0	27½
10	9½ après.	11½ après.	14 après.	0	49½	0	51½	0	54
20	0	0	0	1	20	1	20	1	20
30	9½ avant.	11½ avant.	14 avant.	1	50½	1	48½	1	46
40	18 avant.	22 avant.	27½ avant.	2	22	2	18	2	12½
50	26 avant.	31½ avant.	39½ avant.	2	54	2	48½	2	40½
60	33 avant.	40 avant.	50 avant.	3	27	3	20	3	10
70	37½ avant.	45 avant.	56 avant.	4	2½	3	55	3	44
80	38½ avant.	46½ avant.	58 avant.	4	41½	4	33½	4	22
90	33½ avant.	40½ avant.	50½ avant.	5	26½	5	19½	5	9½
100	21 avant.	25 avant.	31 avant.	6	19	6	15	6	9
110	0	0	0	7	20	7	20	7	20
120	21 après.	25 après.	31 après.	8	21	8	25	8	31
130	33½ après	40½ après.	50½ après.	9	13½	9	20½	9	30½
140	38½ après.	46½ après.	58 après.	9	58½	10	6½	10	18
150	37½ après.	45 après.	56 après.	10	37½	10	45	10	56
160	33 après.	40 après.	50 après.	11	13	11	20	11	30
170	26 après.	31½ après.	39½ après.	11	46	11	51½	11	59½
180	18 après.	22 après.	27½ après.	0	18	0	22	0	27½

Cette table suppose encore le plan des orbites de la Lune et du Soleil être le même que celui de l'equateur de la Terre, ce qu'il faut sur-tout remarquer à l'égard des trois dernieres colonnes. Mais cette supposition n'a pas beaucoup d'influence sur les autres colonnes; et les ephémerides, qui marquent le passage de la Lune par le méridien, suppléeront aux trois dernieres.

VIII.—Après avoir exposé au long tout ce que les différentes distances des luminaires, et sur-tout de la Lune à la Terre, peuvent contribuer pour faire varier l'heure des marées, nous dirons aussi un mot sur l'inégalité du mouvement des luminaires.

Cette inégalité seroit d'une très-grande importance, s'il falloit construire une table pour les heures des marées, sans se rapporter aux tables et aux ephémerides: mais elle ne nous est d'aucune conséquence, puisque nous supposons l'heure du passage de la Lune par le méridien, aussi-bien que l'arc compris entre les deux luminaires, connus par les ephémerides. C'est la raison qui m'a engagé à rapporter l'heure des marées au passage de la Lune par le méridien, en donnant une table, qui marque, combien la premiere avance ou retarde sur l'autre.

IX.—Il nous reste à considérer les inclinaisons des orbites à l'égard de l'equateur: pour cet effet il faut concevoir un cercle qui passe par les centres du Soleil, de la Lune et de la Terre; et c'est proprement ce cercle que doivent représenter toutes nos figures, que nous avons considérées jusqu'ici, comme représentant l'equateur de la Terre. On voit bien après cela, que tous les points resteront dans ce cercle aux mêmes endroits; et que les arcs se conserveront tels, que nous les avons déterminés: mais les angles horaires formés sur l'equateur par ses arcs, en sont changés. On ne sçauroit sans une théorie parfaite de la Lune déterminer au juste ces angles horaires, à cause de la variabilité de l'inclinaison de l'orbite lunaire à l'égard de l'equateur; mais aussi ce changement n'est-il pas fort considérable, par rapport à l'arc horaire compris entre le passage de la Lune par le méridien, et le moment de la haute mer; nous supposerons, et nous pouvons le faire ici sans aucune erreur sensible, que les orbites de la Lune et du Soleil sont dans un même plan, ayant chacune une inclinaison avec l'equateur de $23^{d}. 30^{m}.$ et nous considérerons là-dessus la Lune dans trois sortes de situation : 1°. Lorsque sa déclinaison, à l'égard de l'equateur, est nulle; et alors il faut multiplier les nombres de la seconde, troisiéme et quatriéme colonnes de notre table par $\frac{92}{100}$, et ce qui proviendra marquera le nombre de minutes entre le passage de la Lune par le méridien, et l'heure de la haute mer. 2°. Lorsque la Lune se

trouve dans sa plus grande déclinaison à l'égard de l'equateur; et alors il faut multiplier les dits nombres de notre table par $\frac{100}{92}$. Et enfin 3°. lorsque la Lune se trouve au milieu de ces deux situations; auquel cas il faut se servir de notre table, sans y apporter aucun changement. Quant aux autres situations de la Lune en longitude, on peut se servir du principe de la proportionalité de la différence des termes. Ces regles sont fondées sur la proportion qu'il y a entre les petits arcs de l'ecliptique et de l'equateur, compris entre deux mêmes méridiens fort proches l'un de l'autre.

X.—Il suit de tout ce que nous venons de dire, que le plus grand intervalle possible entre le passage de la Lune par le méridien et la haute marée, est environ un jour avant les quadratures, et quatre jours après les quadratures, la Lune dans son apogée et dans sa plus grande déclinaison à l'égard de l'equateur de la Terre; et que dans le concours de toutes ces circonstances, le dit plus grand intervalle peut aller jusqu'à 63 minutes de tems, que la haute marée avancera sur le passage de la Lune par le méridien un jour avant les quadratures, et qu'elle retardera quatre jours après les quadratures.

XI.—Voilà mes refléxions sur le tems des marées; je me flatte qu'elles ont toute la précision qu'on peut esperer sur cette matiere, du moins quant à la méthode. Toute l'incertitude qui y reste encore, est fondée sur le rapport moyen entre les forces de la Lune et du Soleil, que je crois pourtant avoir fort bien déterminé, puisque tous nos Théoremes conviennent si bien avec les observations. Un plus grand nombre d'observations nous donnera peut-être un jour plus de précision là-dessus. Il est vrai que nous n'avons déterminé l'heure et les intervalles des marées, que sous la ligne equinoctiale; mais je ne crois pas que la latitude des lieux puisse changer sensiblement les intervalles des marées; ainsi je n'ai pas jugé nécessaire d'en parler. La latitude des lieux a cependant beaucoup de liaison avec la hauteur des marées: c'est à quoi nous ferons attention dans la suite.

CHAPITRE VIII.

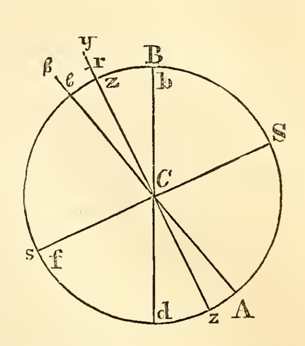
Sur les différentes hauteurs des Marées pour chaque jour de la Lune.

I.—Je me propose à présent d'examiner les diversités des hauteurs des marées, non d'un endroit à l'autre, mais d'un même endroit, que nous supposerons d'abord pris sous l'equateur, pour toutes les diverses circonstances qui peuvent se rencontrer. Nous suivrons, pour cet effet, la même methode que nous avons observée pour déterminer généralement l'heure des marées, c'est-à-dire, que nous commencerons nos recherches par les cas les plus simples, pour ne pas être arrêtés tout court en voulant surmonter trop de difficultés à la fois : nous nous servirons donc d'abord des mêmes hypotheses que nous avons employées dans le Chap. VI. et que nous avons exposées à la fin du Chap. IV. après quoi nous pousserons nos recherches dans le Chapitre suivant à tous les cas possibles, tout comme nous avons fait dans le Chapitre précedent pour déterminer généralement l'heure des marées.

II.—J'entens par la hauteur d'une marée toute la variation de la hauteur verticale des eaux, depuis la haute mer jusqu'à la basse mer suivante. Pour trouver cette hauteur, il faut d'abord faire attention aux §. XI. XII. et XIII. du Chap. V. qui déterminent l'equateur, les lieux de la Lune et du Soleil étant donnés, la position des deux points ausquels la mer est la plus haute et la plus basse; après quoi le VIII. Art. du même Chapitre donnera la hauteur cherchée, en cherchant premierement la hauteur de la haute mer, et ensuite la hauteur de la basse mer.

III.—Remarquons d'abord, que les deux points de la circonférence, qui marquent la haute et la basse mer, sont éloignés entre eux de 90 degrés. On le voit par les expressions des §. XI. et XIII. et nous l'avons démontré dans la premiere Remarque du §. XII. Chap. V. Supposant donc le Soleil répondre au point b, la Lune au point ς, et que la haute mer réponde au point z, il faut prendre l'arc z s de 90 degrés, et le point s sera celui qui répond à la basse mer. Cherchez donc par le VIII. §. du Chap. V. la valeur de y z, qui marque l'élevation des eaux pour le point z; et ensuite prenez de la même maniere la valeur de s x, qui étant négative, marque la dépression des eaux; cela étant fait, on voit que la somme de y z et de s x marquera la hauteur de la marée, mais dans l'expression analytique de s x, il faut changer les signes. Il est vrai que cette methode suppose

que pendant l'intervalle, depuis la haute mer jusqu'à la basse mer, la Lune ne change pas de place; et c'est à quoi on pourroit avoir égard, en augmentant d'environ trois degrés l'arc b ε dans le calcul de s x: mais ce seroit une exactitude hors de place, et qui augmenteroit beaucoup les peines du calcul, qui n'est déja que trop embarassé. On pourra même remedier à ce petit défaut, déja insensible par sa nature, en prenant l'arc b ε, tel qu'il est, non au moment de la haute marée, ni à celui de la basse mer, mais au milieu de leur intervalle; et c'est ce que nous supposerons dans la suite.



Soit donc comme dans le V. Chap. le sinus de l'arc b ε = m; son cosinus = n; le sinus de l'angle b C z = σ; le sinus de l'angle ε C z = ρ; le sinus total = b; et nous aurons en vertu du §. VIII. Chap. V.

$$y\,z = \frac{2\,b\,b - 3\,\sigma\sigma}{3\,b\,b} \times \varepsilon + \frac{2\,b\,b - 3\,\rho\rho}{3\,b\,b} \times \delta.$$

De là on trouvera s x en vertu du §. XII. Chap. V. en mettant b b — $\sigma\sigma$, et b b — $\rho\rho$ à la place de $\sigma\sigma$ et de $\rho\rho$: et de cette façon on aura

$$s\,x = \frac{3\,\sigma\sigma - b\,b}{3\,b\,b} \times \varepsilon + \frac{3\,\rho\rho - b\,b}{3\,b\,b} \times \delta.$$

Changez à present les signes dans la valeur de s x, et supposez la hauteur de la marée = M, et vous aurez

$$M = \frac{b\,b - 2\,\sigma\sigma}{b\,b} \times \varepsilon + \frac{b\,b - 2\,\rho\rho}{b\,b} \times \delta.$$

Cette derniere expression marque généralement la hauteur des marées, puisqu'on peut toujours déterminer les valeurs de $\sigma\sigma$ et $\rho\rho$ par les §. XI. et XIII. du Chap. V. Mais les calculs ne laissent pas d'être assez pénibles, quoi-que les formules ne soient pas prolixes. Nous tâcherons donc de rendre ces calculs plus faciles, sans déroger beaucoup à l'exactitude des formules.

IV.—Voyons donc d'abord ce qui arriveroit, si la force lunaire étoit infiniment plus grande que la force solaire. On auroit en ce cas ρ = o et σ = m,

$$M = \varepsilon + \delta - \frac{2\,m\,m}{b\,b} \times \varepsilon,$$

laquelle formule ne sçauroit manquer d'être assez approchante; elle donne même la juste valeur pour les syzygies et pour les quadratures.

V.—Pour déterminer les hauteurs des marées plus exactement encore, nous considérerons la valeur de ϱ comme fort petite, au lieu de la supposer tout-à-fait nulle, comme nous l'avons fait dans l'Article précedent : mais nous pourrons supposer hardiment $\varrho = \frac{\epsilon m n}{\delta}$, et on verra que cette supposition ne sçauroit s'éloigner beaucoup de la vérité, si l'on consulte l'Article VII. du précedent Chapitre vers la fin, et le peu d'erreur qui pourroit s'y trouver n'est presque d'aucune conséquence pour notre présent sujet. On voit outre cela, que ϱ étant fort petit, on peut supposer cette analogie

$$\varrho : m - \sigma :: b : n;$$

puisque cette analogie seroit exactement vraie, si les quantités ϱ et $m - \sigma$ étoient réellement et infiniment petites : de cette analogie on tire

$$\sigma = m - \frac{n \varrho}{b} = m - \frac{m n n \epsilon}{b \delta};$$

substituant ces valeurs exposées pour les quantités ϱ et σ, et faisant le sinus total $b = 1$, on obtient cette equation,

$$M = \epsilon + \delta - 2 m m \epsilon + \frac{2 m^2 n^2 \epsilon \epsilon}{\delta} - \frac{2 m^2 n^4 \epsilon^3}{\delta \delta}.$$

De cette maniere il paroit que les marées décroissent depuis les syzygies jusqu'aux quadratures, et qu'elles croissent avec la même loi depuis les quadratures jusqu'aux syzygies. Ceux qui voudront essayer la juste equation du §. III. et cette equation approchante, sur un même exemple, verront qu'elles ne different gueres.

VI.—Il nous sera facile à présent de calculer et de donner une table pour les hauteurs des marées, telle que nous en avons donné une à la fin du Chap. VI. pour les heures des marées, et pour laquelle nous tâcherons dans le Chapitre suivant de trouver les corrections nécessaires aux différentes circonstances, tout comme nous avons fait à l'égard de la dite table du VI. Chap. Nous supposerons encore le rapport moyen de δ à ϵ être comme 5 à 2, tant que nous n'avons pas des observations qui puissent déterminer ce rapport au juste. Nous donnerons mille parties à la hauteur de la plus grande marée.

La *premiere* colonne marquera dans cette table de dix en dix degrés les arcs compris entre les deux luminaires, environ le milieu des jusans (§. III.) c'est-à-dire, environ trois heures après le passage de la Lune par le méridien ; la *seconde* colonne donnera les hauteurs cherchées des marées, pour les susdites hypotheses ; et la *troisiéme* en marquera les differences.

TABLE FONDAMENTALE

Pour trouver les Hauteurs des Marées, ou les Descentes, verticales des eaux pendant les Jusans.

Distance entre les deux luminaires en dégrés.	*Hauteur des Marées.*	*Différence des Hauteurs.*
0 Dégrés.	1000 Parties.	
10	987	— 13
20	949	— 38
30	887	— 62
40	806	— 81
50	715	— 91
60	610	— 105
70	518	— 92
80	453	— 65
90	429	— 24
100	453	+ 24
110	518	+ 65
120	610	+ 92
130	715	+ 105
140	806	+ 91
150	887	+ 81
160	949	+ 62
170	987	+ 38
180	1000	+ 13

VII.—Si on avoit voulu construire cette table conformément à l'equation finale du §. III. qui est la vraie equation, on auroit pu profiter de la table du VI. Chap. dans laquelle les nombres de la seconde colonne

divisés par 4, donnent les degrés de l'arc, dont le sinus est appellé ϱ, après quoi on connoît aussi l'arc dont le sinus est appellé σ. Connoissant ainsi par les tables les quantités ϱ et σ, on trouve sans beaucoup de peine la valeur de M du §. III.

VIII.—On voit aussi, que si la distance entre les deux luminaires est entre deux nombres de la premiere colonne, on peut sans aucune erreur sensible employer le principe général des interpolations, de sorte que cette table peut suffire pour tous les cas.

IX.—On remarquera au reste, qu'il est ici de grande importance d'avoir substitué la vraie valeur pour $\frac{\delta}{\epsilon}$, et qu'un assez petit changement dans cette valeur, a une grande influence sur le rapport des marées. On ne doit donc encore considérer cette table, que comme un exemple de nos formules générales: le Chapitre suivant fera voir les précautions que l'on doit prendre là-dessus.

X.—Nous voyons tant par les formules que nous avons données pour les hauteurs des marées, que par la précedente table, qu'elle est *in abstracto* la nature des variations des marées. On peut faire là-dessus les Remarques qui suivent.

1°. Que les changemens des marées sont fort petits, tant aux syzygies qu'aux quadratures, et ils seroient infiniment plus petits que les autres, si l'intervalle d'une marée à l'autre étoit aussi infiniment petit.

2°. Que les plus grands changemens ne se sont pas précisément au milieu, mais plus près des quadratures que des syzygies: c'est-à-dire, que la plus grande diminution des marées se fait dans nos suppositions, lorsque la Lune est environ à 60 degrés (80 avec la correction de 20 degrés expliquée au Chap. VII.) depuis les syzygies; le plus grand décroissement se fait donc de la neuviéme à la dixiéme marée (de la douziéme à la treiziéme avec la correction): de même le plus grand accroissement se fait à environ 30 degrés depuis les quadratures (50 degrés avec la correction) qui répond au changement de la quatriéme à la cinquiéme marée (de la septiéme à la huitiéme avec la correction) depuis les quadratures. Je parle dans cette remarque de toutes les marées qui se font, tant celles du matin, que celles du soir, pour rendre leurs intervalles plus petits: on se souviendra cependant de ce que j'ai dit expressément, que je fais abstraction par-tout ailleurs des marées, qui répondent au passage inférieur de la Lune par le méridien, lorsqu'il s'agit de comparer les marées entre elles: car ces deux sortes de marées ont quelques inégalités entre elles, que je n'ai pas encore considérées.

3°. Que les petits changemens dans les syzygies, et ceux des quadratures, comparés entre eux, sont inégaux; puisque ceux-ci sont environ doubles de ceux-là. Dans l'application de cette remarque il faudra ajoûter, de part et d'autre, trois marées, ou environ un jour et demi de tems.

4°. Que le plus grand changement de deux marées qui se suivent, entre celles qui répondent à la Lune de dessus (dont l'intervalle répond à environ 13 degrés de variation dans la distance de la Lune au Soleil) fait près du quart de la variation totale de la plus grande à la plus petite marée.

XI.—Je ne doute pas que les observations ne confirment en gros les remarques que je viens de faire, et toutes les regles précedentes. On ne sçauroit plus douter de la théorie que nous avons adoptée et établie; et la théorie posée, les calculs en sont sûrs. Mais comme nous ne sommes pas encore sûrs des hypotheses secondes, qu'on ne sçauroit éviter, telles que sont le juste rapport entre la force lunaire et solaire, que nous avons supposé comme 5 à 2; le retardement des effets de la Lune sur sa position, que nous avons supposé d'un jour et demi, ou de trois marées, ou de 20 degrés, que la Lune peut parcourir en longitude pendant ce retardement, &c. nous nous croyons en droit de demander quelque indulgence pour le resultat desdites remarques et regles. Cependant comme je n'ai fait aucune supposition sans un mûr examen fondé sur les plus justes observations choisies entre toutes celles qui peuvent les déterminer, j'oserois me flatter d'un assez bon succès, si Messieurs les Academiciens vouloient se donner la peine de confronter nos tables, nos regles et nos Théoremes nouveaux avec les observations, dont ils ont un grand trésor: mais ce succès, dont je me flatte par avance, se manifestera davantage, si ils veulent encore faire attention aux corrections que je vais donner dans le Chapitre suivant, à l'égard de diverses circonstances variables, et que nous avons supposées dans ce Chapitre comme constamment les mêmes.

CHAPITRE IX.

Sur les Hauteurs des Marées corrigées, suivant differentes circonstances variables.

I.—Nous suivrons dans cet examen la même route que nous avons tenuë dans le VII. Chap. à l'égard du tems des marées. Pour commencer donc par l'effet des vents et des courants, on voit bien qu'ils peuvent augmenter et diminuer les marées, et que ces variations ne sont pas d'une nature à pouvoir être aucunement déterminées. On pourra pourtant remarquer que lorsque ces causes conservent pendant un tems un peu considérable leur force et leur direction, leur effet consistera plûtôt à hausser ou baisser la mer elle-même, qu'à augmenter ou diminuer les marées.

II.—Les circonstances attachées à chaque port ou autre endroit en particulier, telles que sont sa situation, la profondeur des eaux, la pente des fonds, la communication avec l'océan, &c., font extrêmement varier les marées. Ce sont ces causes qui font que les grandes marées ne sont que d'un petit nombre de pieds dans de certains endroits, de 8 ou 10 pieds dans d'autres, et de 50 à 60 pieds, et au-delà encore dans d'autres endroits. Ce qu'il y a de singulier, est que dans la mer libre les grandes marées ne sont que d'environ 8 pieds, pendant qu'elles vont au-delà de 50 pieds dans plusieurs ports et autres endroits, dont la communication avec la mer ouverte, est entrecoupée et empêchée de tous côtés; et qui par conséquent devroient, selon les premieres apparences, avoir les marées moins grandes, nous donnerons dans un autre Chapitre la raison hydrostatique de ce phénomene, pour ne point nous écarter de notre sujet présent. Cela fait d'abord voir, qu'on ne sçauroit rien déterminer sur les grandeurs absoluës des marées, et que tout ce que la théorie pourroit encore faire, seroit d'en marquer le rapport: mais l'expérience nous enseigne encore, que ce rapport même n'est pas constant dans les différens endroits, quoi qu'il soit renfermé dans des bornes plus étroites.

La grande marée sera double de la petite marée dans un endroit; et elle pourra être triple dans un autre: c'est que les causes qui font varier les hauteurs absoluës des marées à l'égard de différens endroits, ne gardent pas une proportion tout-à-fait constante. Mais les marées moyennes entre la plus grande et la plus petite pendant une même revolution de la Lune, peuvent être censées observer les regles que nous leur avons pre-

scrites dans le Chapitre précedent. Il y a même apparence, que les changemens qui dépendent de la différente situation des luminaires observeront à-peu-près les loix que nous avons démontrées *in abstracto.* Ces refléxions m'ont déterminé à considérer la plus grande et la plus petite marée, non telles qu'elles devroient être dans la théorie pure, mais telles qu'on les observe, lorsque les luminaires se trouvent à-peu-près dans l'equateur, et dans leurs distances moyennes à la Terre, sans qu'aucune cause accidentelle les trouble. Nous avons démontré au III. §. du Chap. VIII. que la hauteur de la grande marée doit être exprimée par $\delta + \epsilon$, et la hauteur de la petite marée par $\delta - \epsilon$; mais si l'on suppose la hauteur moyenne réelle de la grande marée A et de la petite marée B, il faudra suivant cette correction faire

$$\delta + \epsilon = A, \text{ et } \delta - \epsilon = B:$$

c'est-à dire, $$\delta = \frac{A+B}{2}, \text{ et } \epsilon = \frac{A-B}{2};$$

et ces valeurs doivent être substituées dans les equations et formules du Chapitre précedent. En supposant $\frac{\delta}{\epsilon} = \frac{5}{2}$ comme nous avons fait, on obtient $\frac{A}{B} = \frac{7}{3}$, et si cette raison étoit confirmée par les observations, il n'y auroit aucun changement à faire. On pourroit se servir de la table, telle qu'elle est, en donnant toujours 1000 parties à la hauteur de la grande marée. Mais si $\frac{A}{B}$ avoit réellement une autre valeur considérablement différente de celle que nous venons de lui assigner, il ne faudroit pas négliger la correction que nous venons d'indiquer.

L'on voit aussi après ces considérations, qu'on ne doit pas s'attendre à pouvoir déterminer avec la derniere précision les hauteurs des marées. Nous pourrons donc sans scrupule, pour rendre nos Propositions plus nettes et plus sensibles, nous servir de l'équation du §. IV. Chap. VIII. qui aussi-bien approche beaucoup de la vraie équation de l'Article qui précéde l'autre. Nous supposerons donc la hauteur des marées, toujours exprimée par $\delta + \epsilon - 2\,m\,m\,\epsilon$, et employant la correction indiquée, nous aurons à présent

$$M = A - m\,m\,A + m\,m\,B, \text{ ou plus simplement,}$$

$$M = n\,n\,A + m\,m\,B:$$

C'est donc de cette derniere équation, que nous nous servirons dans la suite de cette dissertation.

III.—Cette correction pourra en même tems remédier à un autre in-

convenient, qui provient de l'inertie et de la masse des eaux. Nous avons déja dit ailleurs que les marées sont une espéce d'oscillations qui tâchent naturellement à se conserver telles qu'elles sont: on sent bien que cette raison doit empêcher les grandes marées d'atteindre toute leur hauteur, et les petites de diminuer autant qu'elles devroient faire naturellement: qu'elle ne doit pas changer sensiblement la marée moyenne entre la plus grande et la plus petite, et qu'elle change les autres d'autant plus qu'elles sont plus éloignées de cette marée moyenne. Et on voit que notre correction satisfait à toutes ces trois conditions.

IV.—Après la dite correction qui regarde immédiatement les hauteurs des marées, il faut encore employer celle qui regarde les tems, que nous déterminons par les phases de la Lune, ou par les distances, qui sont entre les luminaires. Nous avons expliqué au long aux §. §. IV. et V. du Chap. VII. que les phases de la Lune qui répondent aux marées en question, ne doivent pas être prises telles qu'elles sont, mais telles qu'elles seroient environ un jour et demi après, c'est-à-dire, que les distances entre les luminaires doivent être augmentées d'environ 20 degrés, et moyennant cette correction, la théorie ne sçauroit manquer de satisfaire au juste aux observations.

V.—Nous n'avons considéré jusqu'ici les luminaires, que dans leurs distances moyennes à la Terre, et c'est pour ce cas que nous avons appellé la hauteur de la plus grande marée A, et celle de la plus petite marée B. Pour déterminer donc ce que les différentes distances peuvent faire sur les hauteurs des marées, il faudra se rappeller tout l'Art. VII. du Chap. VII. Nous y avons démontré, que la force lunaire doit être supposée généralement $= \frac{l^3}{L^3} \times \delta$, et la force solaire $= \frac{s^3}{S^3} \times \epsilon$. Or comme la somme de ces forces exprime toujours la hauteur de la grande marée, et que la différence des mêmes forces exprime la hauteur de la petite marée, il faudra faire ces deux analogies:

$$\delta + \epsilon : \frac{l^3}{L^3} \times \delta + \frac{s^3}{S^3} \times \epsilon :: A : \frac{l^3 S^3 \delta + L^3 s^3 \epsilon}{L^3 S^3 (\delta + \epsilon)} \times A$$

$$\delta - \epsilon : \frac{l^3}{L^3} \times \delta - \frac{s^3}{S^3} \times \epsilon :: B : \frac{l^3 S^3 \delta - L^3 s^3 \epsilon}{L^3 S^3 (\delta - \epsilon)} \times B.$$

La premiere de ces quatriémes proportionnelles marquera donc la hauteur corrigée de la grande marée, et la seconde, la hauteur corrigée de la petite marée. Par conséquent l'équation finale du II. §. sera celle-ci après sa correction:

$$M = \frac{l^3 S^3 \delta + L^3 s^3 ☾}{L^3 S^3 (\delta + ☾)} \times n\,n\,A + \frac{l^3 S^3 \delta - L^3 s^3 ☾}{L^3 S^3 (\delta - ☾)} \times m\,m\,B.$$

Je m'assure que cette équation donnera toujours les hauteurs des marées avec toute la justesse qu'on peut attendre sur cette matiere, pour les suppositions auxquelles notre théorie est encore assujettie. Mais comme il est presque impossible qu'il n'y ait absolument aucune cause étrangére, qui trouble les marées, nous ne devons pas être trop scrupuleux sur ces corrections, qui sont elles-mêmes médiocres. Ainsi pour rendre nos regles plus sensibles et plus faciles, nous ne ferons point d'attention aux changemens dans les distances du Soleil à la Terre; ces changemens sont beaucoup plus petits que dans la Lune, et ils sont en même tems de beaucoup moindre conséquence: nous supposons donc S constamment $= s$. Quant à la Lune, nous la considérerons, tout comme nous avons fait au VII. §. du Chap. VII. dans son perigée, dans sa distance moyenne et dans son apogée; et nous retiendrons les suppositions que nous avons faites au dit Article, pour les distances de la Lune, et pour les conséquences que nous en avons tirées. Nous ferons donc pour le premier cas $\delta = 3\,☾$, et $\frac{L^3}{l^3} = 0{,}8439$: pour le second cas $\delta = \frac{5}{2}\,☾$, et $\frac{L^3}{l^3} = 1{,}000$, et enfin pour le troisiéme $\delta = 2\,☾$, et $\frac{L^3}{l^3} = 1{,}174$. De cette façon nous aurons les trois équations qui suivent, exprimées en nombres décimaux.

1°. Pour le périgée de la Lune,

$$M = 1.138\,n\,n\,A + 1.277\,m\,m\,B.$$

2°. Pour les distances moyennes de la Lune,

$$M = n\,n\,A + m\,m\,B.$$

3°. Pour l'apogée de la Lune

$$M = 0.901\,n\,n\,A + 0.703\,m\,m\,B.$$

On remarquera dans ces équations, que A marque la hauteur de la grande marée, et B la hauteur de la petite marée dans les distances moyennes des luminaires à la Terre, ces luminaires étant supposés l'un et l'autre se trouver dans l'equateur: que m marque le sinus de l'arc compris entre les luminaires diminué de 20 degrés, et n le cosinus de cet arc.

On remarquera après cela, que les grandes marées sont comprises en vertu de la premiere et de la troisiéme équation dans les termes de 1138 à 901, et les marées bâtardes dans les termes de 1277 à 703; d'où l'on voit que la différence entre les grandes marées n'est pas à beaucoup près

si grande, qu'elle l'est entre les marées bâtardes, si on compare cette différence à la hauteur de la marée qui lui répond. Cela se confirme par l'expérience, et c'est une nouvelle source des irrégularités des petites marées comparées entre elles, dont nous avons déja parlé ailleurs, et que M. Cassini n'a pas manqué d'observer.

VI.—J'ajoûterai ci-dessous une table fondée et calculée sur les trois dites équations, mais qui se rapporte aux quantités A et B, qu'il faut donc connoître par expérience pour le port ou autre endroit, dont il est question. On pourra déterminer ces quantités A et B, sur un grand nombre d'observations, tant des hautes que des petites marées, en prenant des unes et des autres le milieu arithmétique.

VII.—On remarquera, quant à la construction de la table que nous allons donner, que les arcs compris entre les luminaires ont été augmentés de 20 degrés à l'égard de la table précédente, dans laquelle on n'a pas eu égard aux causes secondes et aux corrections à faire. Ces 20 degrés sont déterminés par le retard d'un jour et demi des marées, par rapport aux phases de la Lune, expliqué ci-dessus : il est vrai que cet intervalle d'un jour et demi ne demande pas tout-à-fait 20 degrés de correction : mais comme il faudroit estimer les distances entre les luminaires, telles qu'elles sont, non au moment de la haute-mer (qui doit être supposée se faire au moment du passage de la Lune par le méridien) mais au milieu du jusan, en vertu du III. §. du Chap. VIII. et que l'intervalle depuis la haute mer jusqu'au milieu du jusan, demande encore une correction d'environ un degré et demi, la somme de ces corrections peut être supposée de 20 degrés, en estimant les distances des luminaires au moment du passage de la Lune par le méridien, que les ephémérides indiquent.

VIII.—Voici donc à présent la table. La *premiere* colonne y marque les distances entre la Lune et le Soleil dans le moment du passage de la Lune par le méridien : les *trois* autres colonnes marquent les hauteurs des marées pour le périgée de la Lune, pour les distances moyennes de la Lune à la Terre, et pour l'apogée de la Lune.

TABLE PLUS GENERALE ET CORRIGÉE

Pour trouver les Hauteurs des Marées.

Distances entre les Luminaires.	*Hauteurs des Marées au Périgée de la Lune.*	*Hauteurs des Marées aux distances moyennes de la Lune à la Terre.*	*Hauteurs des Marées à l'Apogée de la Lune.*
0 Dégrés.	0,995A+0,149B	0,883A+0,117B	0,795A+0,082B
10	1,104A+0,038B	0,970A+0,030B	0,874A+0,021B
20	1,138A+0,000B	1,000A+0,000B	0,901A+0,000B
30	1,104A+0,038B	0,970A+0,030B	0,874A+0,021B
40	0,995A+0,149B	0,883A+0,117B	0,795A+0,082B
50	0,853A+0,319B	0,750A+0,250B	0,676A+0,176B
60	0,668A+0,527B	0,587A+0,413B	0,529A+0,290B
70	0,460A+0,749B	0,413A+0,587B	0,372A+0,412B
80	0,284A+0,958B	0,250A+0,750B	0,225A+0,527B
90	0,133A+1,127B	0,117A+0,883B	0,105A+0,621B
100	0,034A+1,238B	0,030A+0,970B	0,027A+0,682B
110	0,000A+1,277B	0,000A+1,000B	0,000A+0,703B
120	0,034A+1,238B	0,030A+0,970B	0,027A+0,682B
130	0,133A+1,127B	0,117A+0,883B	0,105A+0,621B
140	0,284A+0,958B	9,250A+0,750B	0,225A+0,527B
150	0,460A+0,749B	0,413A+0,587B	0,372A+0,412B
160	0,668A+0,527B	0,587A+0,413B	0,529A+0,290B
170	0,853A+0,319B	0,750A+0,250B	0,676A+0,176B
180	0,995A+0,149B	0,883A+0,117B	0,795A+0,082B

IX.—Il nous reste à considérer les déclinaisons des luminaires et les latitudes des lieux sur la Terre, pour lesquels on cherche la nature des marées. Nous avons supposé les unes et les autres nulles dans ce Chapitre. Mais cette matiere est si riche et si remarquable par plusieurs

propriétés très singulieres et elle demande d'ailleurs tant d'attention, que j'ai cru devoir la traiter à part. Ce sera donc le sujet du Chapitre suivant.

CHAPITRE X.

Dans lequel on examine toutes les propriétés des Marées, qui dépendent des différentes Déclinaisons des Luminaires et des différentes latitudes des Lieux.

I.—Les déclinaisons des luminaires à l'égard de l'equateur, et les distances des lieux sur la Terre du même equateur, ont tant de rapport entre elles, qu'on ne sçauroit bien traiter cette matiere, qui est une des plus importantes de notre sujet, sans les considérer les unes et les autres en même tems. Mais pour ne pas rendre la question trop embarrassante dès le commencement, nous ne ferons d'abord attention qu'à la Lune, tout comme si les marées étoient uniquement produites par l'action lunaire. Nous considérerons aussi la chose d'abord suivant la pure théorie, et nous verrons ensuite quelles corrections on y pourra employer.

II.—Ressouvenons-nous de tout ce que nous avons dit dans quelques-uns des premiers Chapitres, et sur-tout dans le cinquiéme, sur le changement de la figure de la Terre produit par l'action de l'un des luminaires. Nous avons considéré la Terre d'abord comme parfaitement sphérique: nous avons démontré ensuite que cette figure est changée par l'action de l'un des luminaires en ellipsoïde, dont l'axe prolongé passe par le centre du luminaire agissant; et enfin que la rotation diurne de la Terre fait que chaque point dans la surface de la Terre, doit tantôt se baisser, tantôt s'élever, afin que sa figure ellipsoïde soit conservée; mais nous n'avons calculé ces baissemens et haussemens, que pour les points pris dans l'equateur même, dans le plan duquel nous avons supposé en même tems se trouver l'axe de l'ellipsoïde. C'est pour ces cas, que nous avons démontré, (§. V. Chap. V.) *que les baissemens des eaux sont proportionnels aux quarrés des sinus des angles horaires, qui commencent du moment de la haute mer;* et l'on remarquera que ces angles horaires sont proportion-

nels alors aux arcs compris entre le pole de l'ellipsoïde et le point en question.

III.—Voici à présent comment il faut s'y prendre, pour trouver les mêmes baissemens et haussemens, qui se font pendant le mouvement diurne de la Terre dans un point quelconque, et la Lune ayant aussi une déclinaison quelconque. On voit qu'on aura toujours le même ellipsoïde, quelle que soit la déclinaison de la Lune; mais qu'il sera obliquement posé à l'égard de l'equateur: on voit aussi qu'il faut s'imaginer dans ce sphéroïde allongé une section parallele à l'equateur, qui passe par le point en question: cette section ne sera pas un cercle parfait, et sa circonférence n'aura pas tous ses points également éloignés du centre de l'ellipsoïde: c'est les différences de ses distances, qui forment la nature des marées. Il s'agit donc de déterminer ces différences.

IV.—Pour cet effet il faudra commencer par chercher les distances de chaque point du parallele au *pole de l'ellipsoïde* (j'appelle ainsi l'extrémité de l'ellipsoïde, qui prolongé, passe par le centre de la Lune) et ces distances étant connues, il est facile de trouver la distance du même point au centre de l'ellipsoïde, et les différences de ces distances. Car si le cosinus de la distance d'un point pris dans le parallele au pole de l'ellipsoïde étoit ϱ, le sinus total $= 1$, et si le demi axe de l'ellipsoïde est nommé $b + \delta$, et le plus petit demi-diametre b, la distance du point pris par le parallele jusqu'au centre de l'ellipsoïde sera généralement $= b + \varrho\,\varrho\,\delta$; nous avons démontré cette Proposition au §. V. Chap. V.

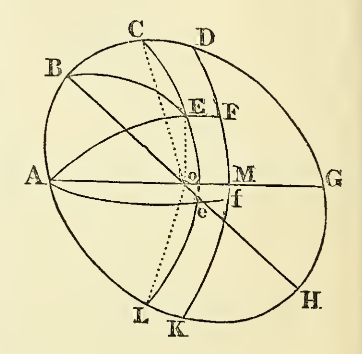
V.—Nous montrerons donc d'abord, comment il faudra déterminer la distance d'un point quelconque, pris dans un parallele donné au pole de l'ellipsoïde. La voye de la trigonometrie sphérique ordinaire nous seroit assez inutile ici, puisqu'il nous faut des expressions analytiques, applicables à tous les cas, et traitables aux calculs. Si l'on vouloit tirer de telles expressions des regles de la dite trigonometrie, les formules qui en proviendroient seroient beaucoup trop prolixes. M. Mayers nous a donné là-dessus un beau Mémoire inséré dans les Commentaires de l'Académie Impériale des Sciences de Petersbourg Tom. II. p. 12. Il y a dans ce Mémoire au XVIII. §. un Théoreme général, par le moyen duquel on pourra toujours de trois choses données dans un triangle sphérique, trouver le reste par des expressions analytiques extrémement simples. Voici le cas que notre sujet demande.

Soit dans un triangle sphérique, le sinus total $= 1$; le sinus d'un des côtés $= S$; le cosinus du même côté $= C$; le sinus d'un autre côté $= s$; le cosinus de cet autre côté $= c$; le cosinus de l'angle compris entre les

deux côtés donnés = y; le cosinus du troisiéme côté opposé à l'angle donné, que j'appellerai q, sera exprimé par cette équation

$$q = S s y + C c.$$

VI.—Soit à present A D G K le méridien de la Terre, qui passe par le centre de la Lune, et que la Lune réponde au point B, qui deviendra ainsi le pole de l'ellipsoïde, et la droite B H, qui passe par le centre O, son axe. Soit l'axe de rotation de la Terre A G, les poles A et G, D F K l'equateur; C E L un parallele, dans lequel nous prendrons un point quelconque E, et qu'on tire enfin par ce point E, et par le pole A l'arc A E F.



De cette maniere, l'arc A B sera le complément de la déclinaison de la Lune; l'arc A E sera le complément de la latitude du point E, et l'arc D F sera l'arc horaire depuis le passage du point E par le méridien, qui passe par la Lune; de sorte qu'on connoît dans le triangle B A E, les côtés B A et E A, avec l'angle compris B A E, et de là on tirera par le moyen du Théoreme exposé au précedent Article, l'arc B E, qui est la distance du point E au pole de l'ellipsoïde.

Nous nommerons donc encore le sinus total 1, le sinus du côté A B = S; son cosinus = C; le sinus du côté A E = s, son cosinus = c; le cosinus de l'arc D F, qui est la mesure de l'angle B A E, = y; le cosinus de l'arc B E = q: nous aurons $q = S s y + C c.$

VII.—Ayant ainsi trouvé l'arc B E, il est facile d'exprimer la droite E O, qui est la distance du point E jusqu'au centre de l'ellipsoïde, par le moyen du 4e. Art. qui nous marque que cette distance est toujours égale au plus petit demi-diametre, augmenté par le produit du quarré du cosinus de cet arc trouvé, et de l'excès du demi-axe B O sur le plus petit demi-diametre: c'est-à-dire, si nous retenons les dénominations, dont nous nous sommes servis depuis le IV. §. jusqu'ici, que nous aurons $E O = b + (S s y + C c)^2 \delta.$

C'est cette équation de laquelle nous devons tirer toutes les variations des marées, que la déclinaison de la Lune et la latitude du lieu peuvent produire.

VIII.—Nous voyons d'abord, que n'y ayant que la lettre y de variable, la quantité E O est toujours d'autant plus grande, que l'on prend y plus

grande. Pour avoir donc la plus grande E O, il faut faire $y = 1$. La haute mer répond donc encore au passage de la Lune par le méridien; et on aura alors la droite $C\,O = b + (S\,s + C\,c)^2\,\delta$.

IX.—Mais pour trouver la plus petite E O ou e O, il ne faut pas faire $y = o$; mais $y = -\frac{C\,c}{S\,s}$ et alors la hauteur e O est simplement $= b$. nous ferons là-dessus les remarques suivantes:

1. La différence entre la plus grande C O et la plus petite e O, faisant la hauteur de la marée, entant quelle est produite par la seule action de la Lune, il s'ensuit que cette hauteur est $= (S\,s + C\,c)^2\,\delta$. Cette formule nous apprend bien de nouvelles proprietés sur les marées, et nous sert en même tems à décider plusieurs questions, sur lesquelles les auteurs ne sont pas encore convenus.

(α) Nous voyons d'abord, que la plus grande marée se fait, lorsque la déclinaison de la Lune est égale à la latitude du lieu. Cette regle suppose toute la Terre inondée; et c'est à quoi il faut avoir égard, lorsqu'il est question de la hauteur d'un lieu. Ce n'est pas par exemple immédiatement aux ports de Picardie, de Flandre, &c. que les eaux sont élevées par la Lune: la cause principale des marées dans tous ces endroits doit être attribuée plûtôt à l'élevation et descente des eaux, qui se font dans la mer du Nord, à environ 35 degrés de latitude septentrionale, autant que j'en ai pû juger par l'inspection des cartes marines. J'avouë pourtant que ce n'est ici qu'une estime fort incertaine; il est impossible de rien dire de positif là-dessus.

On remarquera aussi que je parle ici de la hauteur de la marée, qui répond au passage supérieur de la Lune par le méridien: j'appellerai cette classe de marées, *marées de dessus*, et la classe de celles qui répondent au passage inférieur de la Lune par le méridien, *marées de dessous*.

(β) Si la déclinaison de la Lune est nulle, nous aurons $S = 1$ et $C = o$, et la hauteur de la marée de dessus sera $= s\,s\,\delta$. Nous voyons de-là, que si la Terre étoit toute inondée, et que les luminaires restassent dans le plan de l'equateur, les hauteurs des marées pour les endroits de différentes latitudes seroient en raison quarrée des sinus des distances au pole.

(γ) Si pour nos païs septentrionaux, la déclinaison de la Lune devient méridionale, les marées de dessus deviennent encore plus petites à cet égard, et cette diminution seroit très-considérable, s'il n'y avoit pas une cause hydrostatique que je marquerai ci-dessous, qui lui est un obstacle;

sans la considération de cette cause, on pourroit croire facilement que notre théorie ne répond pas assez aux observations.

(δ) Nous éclaircirons cette matiere par un exemple, en supposant la latitude du lieu de 35 degrés. En ce cas la hauteur des marées de dessus, tout le reste étant égal, devoit être,

Dans la plus grande déclinaison septentrionale de la Lune, ...	$= 0{,}963\ \delta$.
Lorsque la déclinaison de la Lune est nulle, .	$= 0{,}671\ \delta$.
Dans la plus grande déclinaison méridionale de la Lune, ...	$= 0{,}265\ \delta$.

La différence de ces marées est énorme, et surpasse de beaucoup toutes les inégalités qu'on peut soupçonner avoir quelque rapport à la déclinaison de la Lune. Nous en dirons bientôt la raison.

(ε) Si on supposoit la latitude telle que S s fût = C c, ou S s = $\sqrt{1 - SS} \times \sqrt{1 - ss}$, ou enfin s = $\sqrt{1 - SS}$ = C, le point E qui répondroit à la plus petite E O, seroit précisément au point L. En ce cas, il n'y auroit qu'une marée de dessus dans l'éspace d'un jour lunaire, et la marée de dessous s'évanouiroit entiérement. Cela arriveroit donc, par exemple, si la Lune ayant 20 degrés de déclinaison septentrionale, l'élevation du pole étoit de 70 degrés: mais en même tems la marée seroit bien petite, puisqu'elle ne monteroit qu'à environ la cinquiéme partie, qu'elle seroit sous l'equateur.

(ζ) Si s est plus petit que C, la quantité du §. VII. $(S s + C c)^2 \delta$, ne sçauroit plus devenir égale o; c'est pourquoi la mer décroitra alors continuellement depuis le passage supérieur de la Lune par le méridien, jusqu'à son passage inférieur. Il n'y aura donc plus qu'une marée par jour depuis la parallele, qui fait s = C, jusqu'au pole; et pour sçavoir la hauteur de ces marées, il faut dans cette formule, premierement supposer y = 1; et ensuite y = —1, et prendre la différence des formules: la hauteur des marées sera donc dans ces cas $= (S s + C c)^2 \delta - (- S s + C c)^2 \delta$, ou bien $= 4 S s C c \delta$. Elle ne sçauroit donc être qu'extrêmement petite.

Nous aurions un grand nombre de refléxions à faire encore sur cette matiere, s'il ne falloit pas se contenir dans de certaines bornes; et quoique tous ces Théoremes ne soient vrais que dans la théorie, où l'on suppose les eaux être constamment dans leur état d'équilibre, et toute la Terre inondée (car avec ces suppositions, ces Théorêmes seroient exactement vrais) et que diverses circonstances peuvent leur donner quelquefois une

toute autre face, ils ne laissent pas d'être très-utiles, pour expliquer en gros un grand nombre de phénomenes observés sur les marées, et pour pénétrer à fond cette matiere.

2. Nous avons démontré qu'il n'y a des marées de dessous, que tant que s est plus grand que C, lorsque la déclinaison de la Lune est septentrionale (si cette déclinaison est méridionale, il n'y aura point alors de marées de dessus dans les païs septentrionaux). Nous disposerons donc s plus grand que C, et nous chercherons là-dessus la hauteur de la marée de dessous, de la même façon que nous l'avons trouvée pour celles de dessus.

Nous avons vû que la hauteur E O est la plus petite possible, lorsqu'on prend $y = -\frac{C\,c}{S\,s}$, et qu'alors elle devient $= b$; après cela les hauteurs E O croîtront jusqu'au point L, qui fait $y = -1$. La différence de ces hauteurs fera donc la hauteur de la marée de dessous, qui sera par conséquent $= (-S\,s + C\,c)^2\,\delta$, pendant que celle de la marée de dessus étoit $= (S\,s + C\,c)^2\,\delta$. On pourra faire là-dessus les remarques suivantes.

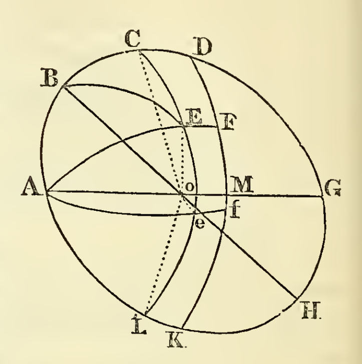
(a) Les marées de dessus sont égales à celles de dessous, lorsque la déclinaison de la Lune est nulle.

(b) Dans les païs septentrionaux, les marées de dessus sont plus grandes que celles de dessous, lorsque la déclinaison de la Lune est septentrionale, et plus petites lorsque cette déclinaison est méridionale, et généralement les déclinaisons de la Lune étant égales, mais de différens côtés, les marées de dessus deviennent les mêmes qu'étoient celles de dessous, et reciproquement.

(c) La différence des deux marées d'un même jour lunaire est $= 4\,C\,c\,S\,s\,\delta$; si l'on applique ces formules à des cas particuliers, on verra que les marées de dessus devroient différer considérablement de celles de dessous, s'il n'y avoit pas une autre raison qui doit les rendre à peu près égales. Nous exposerons cette raison ci-dessous, après que nous aurons examiné tout ce que la théorie dit sur cette matiere *in abstracto.*

3. Nous voyons aussi que les durées de deux marées d'un même jour doivent être selon la pure théorie fort différentes. Voici comme on peut déterminer ces durées. Si dans le parallele C L on suppose e être le point, la distance duquel au centre de l'ellipsoïde soit la plus petite et égale à b, et qu'on tire ensuite par ce point un arc de méridien A e f, l'arc D f sera la mesure du tems depuis la haute mer de dessus jusqu'à

la basse mer suivante, et l'arc f K la mesure du tems, depuis cette basse mer jusqu'à la haute mer de dessous. Or nous avons vû au IX. §. que le cosinus de l'arc D f (y) est $= -\frac{C\ c}{S\ s}$, ou bien si D M est de 90 degrés, le sinus de l'arc M f vers le point K $= \frac{C\ c}{S\ s}$. Là-dessus nous pourrons faire ces remarques.



(1) Dans les païs septentrionaux la déclinaison septentrionale de la Lune rend les jusans des marées de dessus plus longs, et les flots des marées de dessous plus courts; et la déclinaison méridionale fait le contraire avec les mêmes mesures; et lorsque la déclinaison est nulle, la durée du jusan est égale à celle du flot suivant.

(2) Si la déclinaison de la Lune est égale au cosinus de la latitude du lieu, le jusan durera 12 heures lunaires, et il n'y a point de flot pour l'autre marée, parce qu'il n'y a point du tout de marée de dessous.

(3) En général, la différence du tems, entre le jusan de la marée de dessus, et le flot de la marée de dessous, se détermine par le double de l'arc horaire M f, et la différence des durées des deux marées entieres, est exprimée par le quadruple de l'arc M f, dont le sinus est $= \frac{C\ c}{S\ s}$. D'où l'on voit que plus la déclinaison de la Lune est grande, plus cette différence est grande aussi.

Soit, par exemple, la latitude du lieu de 35 degrés, la déclinaison de la Lune de 25 degrés, l'arc M f sera de 15 degrés, qui répond à une heure lunaire; le jusan durera donc 7 heures lunaires, et le flot suivant 5 heures lunaires, et la différence sera de deux heures, et toute la marée de dessus durera 4 heures plus que celle de dessous.

X.—Voilà donc comme la chose seroit, si la Terre étoit toute inondée, et si les eaux étoient constamment dans une situation d'équilibre parfait. Nous avons exposé toutes les variations des marées qui sont dues à l'action de la Lune, par rapport aux différentes déclinaisons et latitudes, et par le moyen de nos remarques on connoit les differences entre les marées d'un même jour, entre celles qui se font dans différentes saisons, &c. tant à l'égard des hauteurs des marées, que de leurs durées. Il est vrai que les deux hypotheses indiquées sont bien éloignées de la vérité,

et que cela change extrêmement les mesures des variations; mais je suis pourtant sûr qu'il doit y avoir des variations, et qu'elles seront de la nature que nous avons trouvée.

Quant aux irrégularités de la surface de la Terre, il n'est pas possible d'en deviner les effets, que fort superficiellement, et comme chaque endroit demanderoit à cet égard des refléxions différentes, nous n'entreprendrons point cet examen. Nous ne considérerons donc que ce qui regarde le défaut de l'équilibre des eaux, et les mouvemens reciproques ou oscillatoires qui en résultent.

XI.—La Lune change la surface de la Terre de sphérique en ellipsoïdique, et l'axe de l'ellipsoïde passe par la Lune. Cet axe étant différent de l'axe de rotation, la figure de la Terre change continuellement, quoique toujours la même à l'égard de l'axe de l'ellipsoïde; et s'il n'y avoit pas quelques causes secondes, les dits changemens consisteroient simplement en ce que chaque goute montât et descendît alternativement et directement vers le centre.

Il est remarquable encore, que si les eaux se mouvoient librement, sans souffrir aucune resistance, ces oscillations augmenteroient continuellement à l'infini, parce qu'à chaque demi-tour de la Terre, les eaux doivent être censées avoir reçû quelque nouvelle impulsion: c'est une propriété qu'on peut démontrer par plusieurs exemples semblables, tirés de la méchanique et de l'hydrodynamique. Mais le grand nombre de resistances qui s'opposent aux mouvemens des eaux, font que celles-ci prennent bien vîte leur plus grand degré d'oscillations. Ces derniers degrés d'oscillations peuvent cependant être censés proportionnels aux forces que la Lune exerce sous différentes circonstances, pourvû que les changemens qui se font dans la Lune, se fassent assez lentement, pour donner aux eaux le tems qu'il leur faut pour changer leur mouvement. On peut donc dire à cet égard, que les changemens qui se font dans la Lune, par rapport à ses déclinaisons, doivent produire dans les marées à peu-près les phénomenes que nous avons indiqués, et à beaucoup plus forte raison les changemens de déclinaisons dans l'autre luminaire. Mais les changemens qui sont dûs à la rotation de la Terre sont trop vîtes, pour que les marées puissent s'y accommoder, car elles tâchent de conserver leur mouvement reciproque comme un pendule simple. Cette seule raison fait que si les deux marées d'un même jour doivent être suivant les différens effets de la Lune fort différentes, la plus grande augmente la plus petite, et celle-ci diminue l'autre, de sorte qu'elles sont beaucoup moins inégales qu'elles ne devroient être sans cette raison. Tout ce qu'on peut

donc dire à cet égard, est que nos Théorêmes sont vrais, quant à leur nature; mais non pas suivant les mesures que nous en avons données. On peut pourtant, moyennant une autre réfléxion, réparer en quelque façon cet inconvenient: c'est en supposant que la plus grande marée donne à la plus petite, qui est sa compagne, autant qu'elle en perd, et les supposer l'une et l'autre à peu-près égales, ce que l'expérience confirme, et de là on tirera la hauteur absoluë de chacune, en prenant le milieu arithmétique des deux marées, qui conviennent à un même jour lunaire. En corrigeant de cette façon les précédentes Propositions, nous aurons les Théorêmes suivans, qui ne sçauroient plus manquer d'être assez conformes aux observations.

XII.—La hauteur de la marée de dessus est $= (S\,s + C\,c)^2\,\delta$ (§. Remarque I.) et la hauteur de la marée de dessous $= (-S\,s + C\,c)^2\,\delta$ (§. IX. Remarque II.) en prenant donc la moitié de la somme de ces deux hauteurs, nous aurons la hauteur moyenne de la marée, qui convient aux déclinaisons de la Lune, et latitudes du lieu données, $(S\,S\,s\,s + C\,C\,c\,c)\,\delta$. De cette formule, que je crois fort juste pour la supposition de l'entiere inondation de la Terre, on pourra tirer les Corollaires suivans.

(1.) Les déclinaisons septentrionales et méridionales de la Lune font le même effet sur les marées, à l'égard de leur hauteur moyenne.

Cette propriété est confirmée par les observations. Mais il sera toujours vrai, que dans les païs septentrionaux la déclinaison septentrionale de la Lune augmente un peu les marées de dessus, et diminue celles de dessous; et que la déclinaison méridionale fait le contraire: et c'est ce que l'expérience confirme aussi. On se souviendra donc que nous parlons de la hauteur moyenne des deux marées d'un même jour lunaire.

(2.) A la hauteur de 45 degrés la hauteur moyenne de la marée est $= (\frac{1}{2}\,S\,S + \frac{1}{2}\,C\,C)\,\delta = \frac{1}{2}\,\delta$, et par conséquent constamment la même.

C'est ici une proprieté bien singuliere, que quelles que soient les déclinaisons des luminaires, les hauteurs moyennes des marées n'en soient point changées, et cette propriété nous fait voir, pourquoi dans nos païs on s'apperçoive de si peu de changement dans les marées, à l'égard desdites déclinaisons.

(3.) Si la latitude du lieu est moins de 45°. la plus grande marée moyenne se fait lorsque les déclinaisons des luminaires sont nulles, et les marées diminuent, si les déclinaisons augmentent.

L'expérience confirme encore cette propriété, et tout le monde convient que dans nos païs (dont les marées dépendent de la mer du nord, à en-

viron 35 degrés de latitude) les plus grandes marées, tout le reste étant égal, se font environ les equinoxes.

Si la latitude du lieu est plus grande de 45 degrés, c'est le contraire.

(4.) Sous l'equateur, la hauteur de la marée est $= S\ S\ \delta$, et les variations qui dépendent des différentes déclinaisons de la Lune, y seront le plus sensibles : si la déclinaison est nulle, la hauteur de la marée y est exprimée par δ; et si la déclinaison est supposée de 15 degrés (elle peut aller jusqu'à près de 29 degrés) la hauteur de la marée moyenne sera de 0,82 δ. La différence des hauteurs est de $\frac{18}{100}\ \delta$.

(5.) Les variations sont moins grandes à cet égard sur les côtes de la France, baignées par l'océan, si les marées y sont causées par la mer du Nord à la hauteur d'environ 35 degrés, la hauteur de la marée, la déclinaison de la Lune étant nulle, y sera exprimée par 0,671 δ, et si la Lune avoit 25 degrés de déclinaison, la hauteur moyenne y sera exprimée alors par 0,610 δ. La plus grande marée est donc à la plus petite à cet égard, comme 671 à 610, et la différence sera comme 61, qui fait l'onziéme partie de la grande marée.

Nous voyons par ces exemples, que les variations qui dépendent de la déclinaison de la Lune, sont toujours beaucoup plus petites, que celles qui dépendent des différentes distances de la Lune, et qui peuvent aller jusqu'au tiers de la grande marée. C'est pourquoi on a eu beaucoup de peine à s'appercevoir des variations qui répondent aux différentes déclinaisons.

(6.) Enfin nous remarquerons que cette formule $(S\ S\ s\ s + C\ C\ c\ c)\ \delta$ pour les hauteurs moyennes des marées ne doit pas être poussée au-delà du terme des doubles marées, qui est lorsque la latitude du lieu est égale à la déclinaison de la Lune : car, passé ce terme, nous avons démontré qu'il ne doit y avoir qu'une marée par jour, dont la hauteur est exprimée par $4\ S\ s\ C\ c\ \delta$, en vertu de la Remarque (ζ) de l'Art. IX. Il faudra aussi donner à ce terme une certaine latitude ; car il y apparence que ce n'est qu'à une certaine distance depuis ce terme vers l'equateur, que les marées commencent à être doubles, et à une autre distance vers le pole, qu'elles commenceroient à être simples, si la mer libre s'étendoit jusques-là ; et que dans la zone, qui est entre deux, les marées seront mêlées de l'une et l'autre espéce avec beaucoup d'irrégularité.

XIII.—Nous venons d'exposer au long, et avec toute la précision possible, le rapport réel des hauteurs des marées : nous n'avons qu'un mot à dire sur l'heure des hautes marées. Comme c'est toujours au moment du passage supérieur de la Lune par le méridien, que la mer devroit être

la plus haute, quelle que soit la déclinaison de la Lune, et la latitude du lieu : nous voyons que si les marées dépendoient uniquement de la Lune, ces deux sortes de variations ne devroient point apporter de changement à l'heure de la haute mer, et si l'on veut avoir égard aux forces du Soleil, nous avons déja montré au IX. Art. du Chap. VII. les variations qui peuvent provenir à cet égard.

Mais si la déclinaison de la Lune et la latitude du lieu n'ont pas d'influence directement sur l'heure de la haute mer, et si elles n'en ont que très-peu, lorsque l'action de la Lune est combinée avec celle du Soleil, il est remarquable, que tant la déclinaison de la Lune, que la latitude du lieu, feroient extrêmement varier l'heure des basses mers, sans cette cause seconde, que j'ai exposée au long dans le XI. Art. et qui fait que les deux marées d'un même jour lunaire sont beaucoup moins inégales, qu'elles ne devroient être. Cependant cette raison ne sçauroit rendre les deux marées tout-à-fait égales, et il sera toujours vrai, ce que j'ai dit dans la Remarque (1.) de la III. Partie du §. IX. que c'est tantôt le jusan d'une marée, qui surpasse en durée le flot de la marée suivante, tantôt celui-ci qui surpasse l'autre. C'est une propriété qui n'est point échappée aux observateurs des marées ; mais on n'avoit pas remarqué les circonstances de ces inégalités, sçavoir que dans les païs septentrionaux, la déclinaison septentrionale de la Lune rend les marées de dessus plus longues, et les marées de dessous plus courtes, et que la déclinaison méridionale fait le contraire.

On voit donc qu'à cet égard le jusan peut être différent du flot suivant, mais non pas du flot antécédent ; et si l'on remarque quelque différence entre le flot et le jusan d'une même marée, ou cette différence sera constante pendant tout le cours de l'année, et alors il faut l'attribuer à la configuration des côtes ; ou elle n'aura point de loix, et ne sera que tout-à-fait accidentelle, et causée par des vents ou courants accidentels.

XIV.—Les différences que nous avons exposées dans ce Chapitre entre les deux marées d'un même jour, tant pour leur hauteur, que pour leur durée, nous donnent un moyen de reconnoitre ces deux classes de marées, et de distinguer l'une d'avec l'autre, ce qui seroit impossible sans cela sur les côtes irrégulieres de l'Europe, où nous sçavons que les diverses heures du port comprennent toute l'étendue d'une marée, ou d'un demi-jour lunaire.

La classe des marées de dessus comprendra celles qui sont plus grandes et plus longues, la déclinaison de la Lune étant septentrionale, ou qui

sont petites et plus courtes, cette déclinaison étant méridionale, et l'autre classe sera reciproque.

XV.—Nous avons examiné avec toute l'attention requise les effets des différentes déclinaisons de la Lune, qui sont la source de tant de propriétés très-remarquables des marées. Il ne nous reste donc plus qu'à considérer encore les déclinaisons du Soleil. Cet examen nous sera très-facile, après celui que nous venons de faire sur la Lune.

Nous nommerons la force du Soleil, sa déclinaison étant nulle, ϵ, comme nous avons fait toujours dans le corps de ce traité, et nous retiendrons les dénominations du V. §. Si nous appliquons donc au Soleil tout le raisonnement que nous avons fait sur la Lune, nous voyons qu'on n'a qu'à substituer dans toutes les formules de ce Chapitre ϵ à la place de δ, pour trouver les variations qui proviennent des différentes déclinaisons du Soleil dans tous les lieux de la Terre, et de cette maniere tout ce que nous avons dit sur la Lune, sera aussi vrai à l'égard du Soleil. Si donc la hauteur de la marée, entant qu'elle est produite sous l'equateur par la seule action du Soleil au tems des equinoxes, est appellée ϵ, la hauteur de la marée sera pour telle déclinaison du Soleil, et telle latitude du lieu entre les deux cercles polaires qu'on voudra $= (TTss + EEcc)\,\epsilon$, entendant par T le sinus de la distance du Soleil au pole, et par E son cosinus.

XVI.—Pour tirer tout l'avantage, qui est possible, de nos méthodes, et leur donner la derniere perfection, nous tâcherons enfin de donner une formule générale pour tous les cas possibles. Souvenons-nous pour cet effet, que nous avons nommé au IX. Chapitre A la hauteur des marées qui se font sous la ligne dans les syzygies (ou plutôt un jour et demi après) les distances des luminaires étant moyennes, et leurs déclinaisons nulles; et que pour les mêmes circonstances nous avons nommé B la hauteur des marées bâtardes: voyons à présent, comment il faut changer ces quantités A et B, lorsque les déclinaisons des luminaires, et les latitudes des lieux sont d'une grandeur quelconque.

(1.) Quant à la quantité A, comme elle a été exprimée par la somme des forces entieres des deux luminaires, c'est-à-dire, par $\delta + \epsilon$, on voit qu'il faut mettre ici à la place de δ sa quantité corrigée $(SSss + CCcc)\,\delta$, et à la place de ϵ sa quantité corrigée $(TTss + EEcc)\,\epsilon$, et ensuite faire cette analogie

$$\delta + \epsilon : A :: (SSss + CCcc)\,\delta + (TTss + EEcc)\,\epsilon : \frac{(SSss + CCcc)\,\delta + (TTss + EEcc)\,\epsilon}{\delta + \epsilon}\,A.$$

Cette quatriéme proportionnelle marque la hauteur des marées dans les syzygies, lorsque les déclinaisons des luminaires, et la latitude du lieu sont quelconques, et si la déclinaison de l'un et l'autre luminaire est nulle, cette quantité devient simplement = s s A. Si l'on nomme donc F la hauteur de la marée dans les syzygies, les déclinaisons des luminaires étant nulles pour un lieu quelconque, il faut supposer s s A = F, et de cette maniere la dite quatriéme proportionnelle devient

$$= \frac{(S\,S\,s\,s + C\,C\,c\,c)\,\delta + (T\,T\,s\,s + E\,E\,c\,c)\,\epsilon}{s\,s\,(\delta + \epsilon)}\,F.$$

C'est cette quantité qu'il faut substituer dans les équations du §. V. Chap. IX. pour A.

(2.) La quantité qu'il faudra substituer pour B dans ces equations, que nous venons de citer, se trouve à-peu-près de la même façon ; il n'y a qu'à prendre au lieu de la somme $\delta + \epsilon$ leur différence $\delta - \epsilon$, qui exprimoit la hauteur des marées bâtardes. Si l'on appelle donc G la hauteur de la marée dans les quadratures, les déclinaisons des luminaires étant nulles, on trouvera la quantité à substituer pour

$$B = \frac{(S\,S\,s\,s + C\,C\,c\,c)\,\delta - (T\,T\,s\,s + E\,E\,c\,c)\,\epsilon}{s\,s\,(\delta - \epsilon)} \times G.$$

Nous substituerons encore dans l'équation générale du §. V. Chap. IX. à la place des lettres S et s (qui y marquent le rapport des distances du Soleil à la Terre sous diverses circonstances, et qui se trouvent employées dans ce Chapitre dans un autre sens) ces autres lettres D et d.

Après ces réflexions préliminaires nous considérerons le Problême général des hauteurs des marées sous telles circonstances, qui pourront concourir, et qui servira à déterminer ces hauteurs avec toute la précision possible. Je m'assure que tous ceux qui jetteront les yeux sur cette solution, verront sans peine, combien j'ai été attentif à examiner et éplucher toutes les circonstances qui peuvent faire varier les marées.

PROBLEME GENERAL.

Trouver généralement la hauteur des Marées, en supposant connuës toutes les circonstances qui peuvent les faire varier.

SOLUTION.

XVII.—Il faut connoître d'abord par observations les quantités F et G, qui marquent les hauteurs moyennes des grandes marées, et des marées

bâtardes, qui se font un jour et demi après les syzygies et les quadratures, les déclinaisons des luminaires étant nulles, et leurs distances à la Terre étant moyennes. Dans la théorie, deux observations suffisent pour cet effet; mais il vaut mieux dans l'application de nos méthodes observer un grand nombre de fois, comme on a déja faît presque dans tous les ports de la France, la hauteur des grandes marées, et celles des petites marées, les luminaires se trouvant à peu-près dans l'equateur, et prendre des unes et des autres le milieu arithmétique, que j'appelle F pour les grandes marées, et G pour les petites marées.

Il faut ensuite connoître le rapport moyen, qu'il y a entre les forces de la Lune et du Soleil. Nous avons donné plusieurs moyens pour cela dans le corps de cette dissertation, et nous nous croyons bien fondés de le supposer comme 5 à 2. Quoi qu'il en soit, nous nommons ce rapport $\delta : \varepsilon$.

Il faut après cela faire attention aux phases de la Lune, ou à l'arc compris entre les deux luminaires dans le moment du passage de la Lune par le méridien: cet arc doit être diminué de 20 degrés (§. VII. Chap. IX.). Nous nommons le sinus de l'arc résultant m, et le cosinus n, et le sinus total 1.

Il faut aussi connoitre les distances des luminaires à la Terre: j'appelle d la distance moyenne du Soleil; D sa distance au tems de la marée cherchée; l la distance moyenne de la Lune; L sa distance au tems de la marée cherchée.

Il faut sçavoir encore les déclinaisons des luminaires à l'égard de l'equateur: j'appelle S le sinus de la distance de la Lune au pole, C son cosinus; T le sinus de la distance du Soleil au pole; E son cosinus.

Enfin, il faut faire attention à la latitude du lieu, et à la Remarque (α) du IX. Art. que nous avons faite pour l'estimation des latitudes. Nous appellons le sinus de la distance au pole s et le cosinus c. Toutes ces dénominations faites, je dis que la hauteur de la marée sera

$$\frac{l^3 D^3 \delta + L^3 d^3 \varepsilon}{L^3 D^3 (\delta + \varepsilon)} \times \frac{nn}{ss} \times \frac{(SSss + CCcc)\delta + (TTss + EEcc)\varepsilon}{\delta + \varepsilon} \times F.$$

$$+ \frac{l^3 D^3 \delta - L^3 d^3 \varepsilon}{L^3 D^3 (\delta - \varepsilon)} \times \frac{mm}{ss} \times \frac{(SSss + CCcc)\delta - TTss + EEcc)\varepsilon}{\delta - \varepsilon.} \times G.$$

XVIII.—Je n'ai mis ici cette grande formule, que pour faire voir toute l'étendue et toute l'exactitude de notre théorie et de nos calculs, car les mesures et la table que nous avons donnés au Chapitre IX. ont assez de précision dans une question aussi sujette que celle-ci aux variations accidentelles, qui n'admettent aucune détermination.

Je ne dis rien des marées et de leurs changemens extraordinaires, qui se font dans la zone glaciale, pour ne point grossir trop ce traité, et pour ne point l'embarrasser de choses fort abstraites et assez difficiles. J'ai d'ailleurs déja exposé en gros et même assez au long ce qui en est.

Quant enfin à l'heure des hautes mers, j'ai fait voir qu'elle n'est point changée par les déclinaisons des luminaires, ni par la latitude du lieu; nous avons donc déja donné toute la perfection possible dans les Chapitres précédens à cette autre grande question. Pour l'heure des basses mers, qui dépendent beaucoup des déclinaisons des luminaires, et de la latitude du lieu, nous en avons fait voir toutes les variations et propriétés dans ce Chapitre.

CHAPITRE XI.

Qui contient l'Explication et Solution de quelques Phénomenes et Questions, dont on n'a pas eu occasion de parler dans le corps de ce Traité, sur-tout à l'égard des Mers détachées, soit en partie, soit pour le tout, de l'Océan.

I.—Suivant quelle progression les eaux montent et descendent dans une même marée, par rapport aux tems donnés.

Cette question dépend de toutes les circonstances que nous avons considérées dans ce traité; mais les variations à l'égard du changement de ces circonstances, ne font pas varier beaucoup la loi, suivant laquelle les eaux montent et descendent; je ne parlerai donc que du cas le plus simple, qui est lorsque la latitude du lieu, et les déclinaisons des luminaires sont nulles, et lorsqu'en même tems les luminaires sont dans leurs syzygies, ou dans leurs quadratures. Que l'on exprime donc tout le tems depuis la haute mer jusqu'à la basse mer par un quart de cercle, dont le rayon est égal à l'unité: je dis *que les descentes verticales des eaux depuis la haute mer doivent être exprimées par les quarrés des sinus des arcs, qui représentent les tems donnés.* Si l'on considére les marées depuis le commencement du flot, il faudra dire *que les élevations verticales des eaux, sont en raison quarrée des sinus, qui répondent aux tems donnés* §. III. Chap. V. Ceux qui voudront rendre cette Proposition plus générale, pourront consulter le §. VIII. Chap. V. et si on y ajoute enfin les §.§. VI.

et VII. du Chap. X. on verra facilement, ce qu'il faudroit faire pour tous les cas possibles. Mais la loi générale ne différera pas beaucoup de celle que nous venons d'exposer; et cela d'autant moins que les deux marées d'un même jour, qui devroient être souvent fort inégales, ne laissent pas de se composer à une égalité mutuelle par la raison exposée au long au §. XI. Chap. X. On peut donc se tenir sans peine à la regle que nous venons d'établir.

Il s'ensuit de cette regle, que les baissemens ou élevations des eaux, qui se font dans de petits tems égaux, sont proportionnels aux produits des sinus par les cosinus répondans des arcs horaires; de sorte que si on partage tout le tems du flux ou du reflux également, les variations également éloignées en deçà et en delà de ce terme, sont égales: ces variations sont les plus sensibles au milieu du flux ou du reflux, et la variation totale depuis le commencement du flux ou du reflux jusqu'au milieu, fait précisément la moitié de toute la variation d'une marée. On voit enfin que les variations doivent être insensibles au commencement et à la fin de chaque flux et reflux.

Toutes ces Propositions sont confirmées entierement par les observations qu'on a faites sur cette matiere, rapportées par M. Cassini dans les Mémoires de l'Académie des Sciences pour l'année 1720. pag. 360. Il semble seulement qu'il y a une erreur de quelques minutes dans la détermination de l'heure de la basse mer, erreur presque inévitable dans cette sorte d'observations. Mais il faut remarquer, pour voir plus parfaitement l'accord de notre regle avec les observations, que tout le tems du flux et reflux est de six heures lunaires, pendant que les observations ont été prises sur des heures solaires.

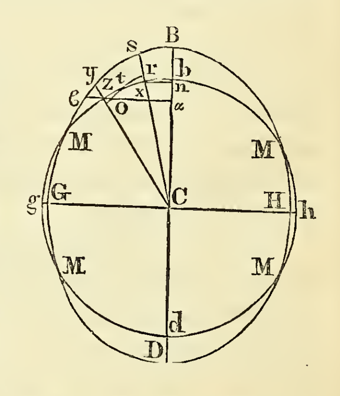
II.—Pourquoi il n'y a point de marées sensibles dans la mer Caspienne, ni selon quelques-uns dans la mer Noire, et pourquoi elles sont très-petites dans la mer Méditerranée, et de quelle nature sont ces marées.

On ne sçauroit bien répondre à ces questions, sans considérer auparavant le Problême principal, qui est de sçavoir les marées, lorsque la mer n'a qu'une certaine étendue en longitude, et c'est un Problême pénible pour le calcul, et assez délicat pour la méthode. Pour le rendre d'abord plus simple, nous supposerons les luminaires en conjonction et dans le plan de l'equateur, et que c'est aussi sous l'equateur, que l'on cherche les marées.

Ressouvenons-nous que sans l'action des luminaires, l'equateur seroit parfaitement circulaire, comme b g d h, et que les luminaires se trouvant

dans l'axe D B, cette figure est changée en l'ellipse B G D H, lorsque toute la Terre est inondée, et que les eaux peuvent couler de tous côtés. Nous avons démontré aussi au III. §. Chap. V. que dans cette supposition, la petite hauteur y z (dont les variations par rapport à ses différentes situations expriment les variations des marées au point z) est $= \frac{3\,s\,s - b\,b}{3\,b\,b} \times \mathfrak{C}$, dans laquelle formule on suppose C α = s ; C b = b, et la différence entre la plus grande C B et la plus petite C G = $\mathfrak{C}$.

Supposons à présent que la mer n'a qu'une certaine étendue en longitude, sçavoir celle de z x, et qu'on tire par le centre C et l'extrémité x la droite C s. Cela posé on voit bien que la surface de la mer ne peut pas être en y s, comme elle seroit, si toute la Terre étoit inondée; car l'espace y C s est plus grand que l'espace z C x, et il faut que cet espace soit constamment le même; puisque la quantité d'eau dans une mer doit être supposée la même pendant les revolutions de la Terre: mais la surface de l'eau prendra la courbure o r, et voici quelle sera la nature de cette courbure o r; il faut premierement, que l'espace o C r soit constamment le même que l'espace z C x, et en second lieu, que la courbe o r soit semblable à la courbe y s, ou plûtôt la même, puisque toutes les petites lignes, telles que s x, sont incomparablement plus petites que le rayon de la Terre; et ainsi la petite perpendiculaire s r sera égale à la petite perpendiculaire y o, de même que toutes les perpendiculaires comprises entre les termes s et y.



On voit donc déja que ce ne sont plus les s x et y z, dont les variations marquent les variations des marées pour les points x et z, et que ces variations sont exprimées ici par celles des petites lignes r x et o z. De là on peut conclure par la seule inspection de la figure, que les marées doivent être d'autant plus petites, que la mer est moins étendue en longitude; que ces marées ne peuvent être que tout-à-fait insensibles dans la Mer Caspienne et dans la Mer Noire, et fort petites dans la Mer Méditerranée, dont la communication avec l'ocean est presque entiérement coupée au Détroit de Gibraltar. On en peut même tirer des propriétés très singulieres de cette sorte de marées. 1°. Que la plus haute mer ne se fait pas ici au moment du passage des deux luminaires par le méridien,

comme dans l'océan, ni 6 heures lunaires après, mais au milieu, si la mer a peu d'étendue en longitude. 2°. Que les marées sont les plus grandes aux extrémités orientales et occidentales z et x, et qu'elles sont incomparablement plus petites au milieu t. 3°. Que la haute mer dans l'une des extrémités se fait au même moment que la basse mer dans l'autre extrémité. Voilà en gros les propriétés des marées dans ces mers : le calcul en fera connoître le détail.

Pour ne point ennuyer le lecteur par une trop longue suite de raisonnemens purement géometriques, et dans plusieurs circonstances assez compliquées et chargées de calcul, je ne mettrai ici que le plus précis.

Soit $B b + G g = \mathfrak{C}$, qui marque la variation pour la mer libre de tous côtés : foit l'arc z x, qui marque l'etendue de la mer en longitude $= A$. Le rayon de la Terre que nous prenons pour le sinus total $= 1$; qu'on tire x n perpendiculaire à C B, et soit l'espace $z \alpha n x z = S$. Cela posé, on trouvera d'abord $y z x s = \frac{2}{3} A \mathfrak{C}$. Cet espace devant être égal à l'espace y o r s, qui est égal à la petite s r multiplié par A, on en tire $s r = \frac{2}{3} \mathfrak{C} - \frac{S}{A} \mathfrak{C}$.

Si on suppose aprés cela $C n = n$ et $C \alpha = s$, on en aura $s x = n n \mathfrak{C} - \frac{1}{3} \mathfrak{C}$, et par conséquent $r x = n n \mathfrak{C} - \mathfrak{C} + \frac{S}{A} \mathfrak{C}$, et ce sont les différentes valeurs de r x, en considérant n et S comme variables, qui marquent les différentes hauteurs de la mer au point x, qui est à l'extrémité occidentale de la mer.

De cette valeur r x on peut tirer géométriquement toutes les propriétés des marées, quelque étendue qu'on suppose à la mer, et tout ce que nous avons trouvé pour le point x, peut être déterminé de la même façon pour tel autre point dans l'arc z x qu'on voudra ; mais on remarquera sur-tout une propriété generale, qui est que l'arc horaire compris entre la haute et la basse mer, c'est-à-dire l'arc compris entre la plus grande et la plus petite r x, est toûjours de 90 degrés. Pour le démontrer, il faut supposer la différentielle $r x = o$, et faire $- d S = \frac{n n - s s}{\sqrt{1 - n n}} d n$, à cause de la valeur constante de A, d'où l'on tirera cette équation $2 A n \sqrt{1 - n n} + s s = o$, qui marque déja la propriété générale que nous venons d'indiquer. Cette propriété donne ensuite la hauteur de la marée, exprimée par la différence de la plus grande et de la plus petite valeur de $r x = \left(2 n n - 1 + \frac{n \sqrt{1 - n n} - s \sqrt{1 - s s}}{A}\right) \mathfrak{C}$, et on remarquera que dans

toutes ces formules, s est donnée en n et en constantes, à cause de l'arc A donné.

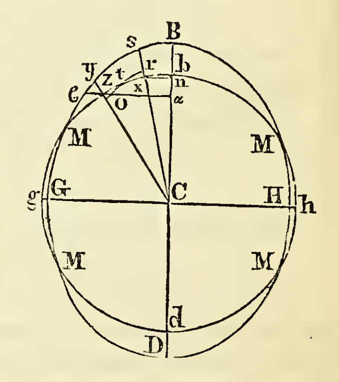
Nous appliquerons ces équations générales à deux sortes de cas particuliers; premierement, lorsque A est de 90 degrés; et en second lieu, lorsque cet arc est fort petit.

1. Si A est de 90 degrés, on aura $s = \sqrt{1 - nn}$, et le lieu de la haute ou de la basse mer à l'égard du point fixe B sera déterminé par cette equation

$$-2An\sqrt{1-nn} + 2nn - 1 = 0, \text{ qui donne}$$

$$Cn, \text{ ou } n = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2} + \frac{A}{2\sqrt{AA+1}}\right)} = 0{,}9602,$$

qui marque que l'arc x b est d'environ 16 degrés 13 minutes et que la hauteur de la marée sera de 0,844 ℭ. Nous voyons donc que si la mer avoit 90 degrés d'étendue en longitude, la haute mer se feroit dans les syzygies 1 heure 5 minutes plus tard que si toute la Terre étoit inondée, et que la hauteur de la marée seroit de 156 milliémes parties plus petite.



2. Supposons à présent que l'étendue de la mer en longitude soit très-petite, c'est-à-dire, que A exprime un arc circulaire fort petit, et soit la corde de cet arc = B: la géométrie commune donne

$$s = n - \tfrac{1}{2}nBB + \tfrac{1}{2}\sqrt{4BB - 4nnBB + nnB^4 - B^4}.$$

Et B étant supposée fort petite, on changera la quantité radicale en suite, et l'on négligera les quantités affectées de B^3 (le calcul fait voir à la fin, qu'il faut retenir les termes affectés de B B) et de cette maniere on trouvera

$$s = n - B\sqrt{1-nn} - \tfrac{1}{2}nBB.$$

On remarquera après cela, que la différence entre l'arc A et sa corde B, convertie en suite commence par le terme $\frac{1}{4}B^3$, lequel pouvant être négligé pour notre dessein, on mettra A à la place de B, et on aura

$$s = n - A\sqrt{1-nn} - \tfrac{1}{2}nAA.$$

En substituant dans l'équation exposée ci-dessus

$$2An\sqrt{1-nn} - nn + ss = 0$$

la valeur trouvée pour s, et négligeant toujours les termes affectés de A^3 et de A^4, nous aurons simplement $n = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$.

L'arc x b est donc pour ce dernier cas de 45 degrés, et la haute mer, si elle étoit sensible, ne se feroit par conséquent que trois heures lunaires après le passage de la Lune par le méridien. La hauteur de la marée étant généralement exprimée, comme nous avons vû ci-dessus, par $\left(2nn - 1 + \frac{n\sqrt{1-nn} - s\sqrt{1-ss}}{A}\right) \times C$, il faudra substituer dans cette expression les valeurs trouvées pour n et s; ce que faisant avec les mêmes précautions, que nous avons employées en cherchant la valeur de s, on trouvera à la fin simplement la hauteur de la marée $= A\,C$.

Cette expression fait voir que dans les petites mers, les hauteurs des marées sont proportionnelles aux étendues que ces mers ont en longitude, et les marées se trouveront par cette analogie. Comme le sinus total est à l'arc longitudinal, que la mer renferme, ainsi la hauteur de marée dans la mer qui est supposée inonder toute la Terre, exprimée par C, sera à la hauteur de la marée en question.

Appliquons maintenant tout ce que nous avons trouvé pour en tirer les propriétés des marées dans la Mer Caspienne. Supposons pour cet effet, que dans les conjonctions et oppositions des luminaires, la hauteur des marées grandissimes dans la Mer du Sud (dans laquelle les marées ne sçauroient manquer d'atteindre presque toute la hauteur, qu'elles auroient, si toute la Terre étoit inondée) est sous l'equateur de 8 pieds: c'est la hauteur que les relations de voyages m'ont fait adopter pour la mer libre, et que je crois qu'on remarquera sur les côtes escarpées des petites Isles situées près de l'equateur dans ladite Mer du Sud: cela étant, j'ai démontré dans la Proposition (II.) du XII. §. du Chapitre précédent, que les grandes marées ne seront plus que de 4 pieds à la hauteur de 45 degrés, où je suppose le milieu de la Mer Caspienne. Si nous donnons après cela à cette mer dix degrés d'étendue en longitude, cet arc fait environ la sixiéme partie du rayon, et la hauteur des grandissimes marées devroit être par conséquent aux extrémités orientale et occidentale de la Mer Caspienne d'environ huit pouces: mais elles seront nulles au milieu de la mer. Je suppose cette agitation de la mer trop petite pour avoir pû être remarquée par les gens qui ont été sur les lieux, et qui sans doute n'ont pas fait un examen fort scrupuleux là-dessus, et qui n'auroient pas manqué de l'attribuer à des causes accidentelles, s'ils avoient remarqué quelque petite élévation et baissement des eaux. J'espére que des observations plus exactes confirmeront un jour ce que je viens d'indiquer sur les marées de la Mer Caspienne.

On doit faire le même raisonnement sur la Mer Noire, qui peut être

considérée comme détachée de la mer Méditerranée, à cause du peu de largeur du Détroit qui est entre deux. Il est à remarquer qu'on a observé dans cette mer des marées, quoique très-petites.

On voit aussi que les marées dans la mer Méditerrannée doivent être beaucoup plus petites, que dans l'océan, sur-tout si l'on fait attention que cette mer n'est tout-à-fait ouverte que depuis l'Isle de Chypre jusqu'à celle de Sicile.

III.—Comment les marées peuvent être beaucoup plus grandes sur les côtes, dans les Bayes, dans les Golfes, &c. que dans la Mer Libre de tous côtés.

Pour répondre à cette question, il faut encore faire réflexion à ce que j'ai déja dit, que si les luminaires restoient à un même lieu, et que le mouvement journalier de la Terre se fit avec une lenteur infinie, les eaux qui inondent la Terre, ne pourroient point manquer d'être dans un parfait équilibre, et les marées auroient par-tout les hauteurs qu'on leur a prescrites dans cet ouvrage, sans que la configuration des côtes ou autres causes semblables les pût déranger, pourvû que l'endroit en question communiquât avec l'océan: d'ailleurs les eaux ne feroient que monter et descendre verticalement, excepté aux côtes, qui alternativement sont baignées, et restent à sec, et ausquelles les eaux auroient quelque mouvement horisontal, quoi qu'infiniment lent, et la direction de ce mouvement des eaux dépendroit dans ce cas, aussi bien que dans les autres, de la direction de la pente des côtes. Mais la vîtesse du mouvement journalier de la Terre, qui fait que dans le tems d'un jour tout l'océan doit faire quatre mouvemens et agitations reciproques, rend ces mouvemens fort sensibles. Comme outre cela la mer n'inonde pas toute la Terre, et qu'il y a de grands golfes, canaux, &c. qui par l'élévation et baissement des eaux, sont tantôt plus, tantôt moins pleins, il faut que ceux-ci reçoivent les eaux et les renvoyent alternativement vers des endroits qui s'empliront, pendant que les autres se vuideront, et de là doivent provenir des mouvemens horisontaux, qu'on appelle communément flux et reflux. Ce sont ces mouvemens horisontaux, qui se faisant vers des endroits plus serrés, peuvent produire les grandes marées, qui vont dans de certains endroits au-delà de 60 pieds; c'est aussi cette raison qui rend les marées plus grandes dans le Golfe de Venise, qu'elles ne sont dans la mer Méditerrannée. C'est ici qu'on peut faire un grand usage de ce que divers auteurs ont donné sur le mouvement des eaux, et je m'assure que moyennant les connoissances qu'on a déja sur cette matiére, on pourroit rendre exactement raison de tous les différens phénomenes, qui s'observent sur les

marées aux endroits différemment situés. Mais un tel examen demanderoit des volumes, et des années pour les faire.

IV.—Quelle est en gros la nature des marées au Détroit de Gibraltar.

Les marées doivent sans doute être beaucoup plus compliquées, et paroître plus irrégulieres au Détroit de Gibraltar, que dans d'autres endroits, parce qu'il s'y fait un concours de deux sortes de marées, dont l'une vient de l'océan, et l'autre de la Méditerranée; et on voit facilement, que si les marées consistoient simplement à élever et baisser les eaux, sans causer des courans, il y auroit sur ces côtes quatre marées par jour, c'est-à-dire, que les eaux monteroient et descendroient quatre fois, parce que les marées des deux mers ne se font pas en même tems: mais comme il se forme des courans reciproques, chaque courant tâche à se conserver, et de là il se forme des lisieres, qui ont chacune des mouvemens différens: celles qui sont sur les côtes de chaque côté, paroissent devoir être attribuées aux marées de la Méditerranée, et deux autres qui les touchent, aux marées de l'océan: on remarque même au milieu une cinquiéme lisiere, dont le mouvement n'est pas si irrégulier que celui des quatre autres, et qui ne fait voir presque aucun rapport avec la Lune: il semble que ce courant ne doit sa source, qu'à un défaut d'équilibre entre les deux mers.

Je dirai à cette occasion, qu'il peut arriver de même, que les marées sont formées dans un certain port par le mouvement des eaux, qui viennent de deux différens côtés et à divers tems: il semble qu'il faut tirer de là qu'il peut y avoir des endroits où le flot dure constamment plus long-tems que le jusan, et qu'il y en a d'autres où il arrive le contraire. Cette même cause peut encore produire plusieurs sortes de phénomenes particuliers à de certains endroits.

V.—Pourquoi les petites marées sont beaucoup plus inégales, par rapport à leur grandeur, que les grandes marées.

Nous avons déja vû que les petites marées qui suivent les quadratures, doivent être fort susceptibles de plusieurs irrégularités, tant par rapport au moment de la haute et basse mer, que par rapport à la hauteur de la marée.

Il me semble qu'on doit outre cela remarquer les grandes inégalités qui régnent parmi les petites marées, quoique tout-à-fait régulieres; pouvant sous diverses circonstances croître jusqu'au double, pendant que les grandes marées ne croissent que d'environ un quart. Pour rendre raison de cette observation qu'on a faite, il faut se ressouvenir des circonstances essentielles et fondées dans la nature des marées, qui peuvent les

rendre, tantôt plus grandes, tantôt plus petites dans un même lieu, quoique l'âge de la Lune ne différe point.

Nous avons vû que ce sont les diverses distances des luminaires à la Terre, et leurs différentes déclinaisons, qui peuvent encore changer les hauteurs des marées, lorsque l'âge de la Lune, et la latitude du lieu sont les mêmes. Le calcul nous a enseigné aussi, que l'effet de la diversité des déclinaisons des luminaires est beaucoup plus petit que celui de la diversité des distances: comme donc la diversité des distances est beaucoup plus grande dans la Lune, que dans le Soleil, et que le Soleil a en même tems beaucoup moins de force que la Lune, on peut pour estimer en gros les variations des petites marées, et les variations des grandes marées, simplement faire attention aux distances de la Lune: nous avons trouvé que la diversité des distances peut faire varier l'action de la Lune depuis 2 à 3, l'action du Soleil que nous considérons comme constante, étant exprimée par l'unité. Cela étant, et les hauteurs des petites marées étant aussi proportionnelles aux différences des actions des deux luminaires, nous voyons que les hauteurs de ces petites marées doivent être contenues dans les termes de 2 — 1, et 3 — 1, ou 1 et 2, pendant que les hauteurs des grandes marées, qui sont proportionnelles aux sommes des actions des luminaires, seront renfermées dans les termes de 2 + 1 et 3 + 1, c'est-à-dire, de 3 et 4.

Les dits termes sont confirmés par les observations, comme par exemple, par celles qui sont exposées dans les Mémoires de l'Académie de 1713. pag. 287. et 288. Nous voyons de cette raison, que les variations absoluës doivent être à peu-près les mêmes dans les petites marées et dans les grandes marées, et c'est ce que les observations citées confirment aussi; et comme ces variations sont par conséquent plus sensibles dans les petites marées que dans les grandes marées, il faudra peut-être se servir plûtôt des premieres, que des autres, pour examiner par des observations ce que les diverses circonstances peuvent contribuer pour faire varier les hauteurs des marées.

VI.—Pourquoi les marées étant montées plus haut, et ayant inondé plus de terrain pendant le flot, descendent en même tems davantage, et laissent plus de terrain à sec pendant le jusan, et quelle proportion il y a entre les montées et descentes.

Nous voyons la premiere question indiquée, comme fort remarquable dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de 1712. pag. 94. La raison en est que les marées font une espece de mouvement oscillatoire, ou de balancement; car il y a dans ces balancemens un point d'équilibre,

qui doit passer pour fixe, et au-dessus duquel l'eau doit être censée s'élever dans la haute mer, et se baisser dans la basse mer. On pourroit croire d'abord que les élévations et descentes de l'eau à l'égard du point fixe, sont constamment proportionnelles, et en ce cas notre Problême seroit résolu dans toute son étendue avec beaucoup de facilité. Mais il y a une toute autre proportion bien plus variable et bien plus compliquée, que nous allons rechercher, d'autant que ce n'est pas proprement la hauteur des marées dans le sens que nous lui avons donné jusqu'ici, qu'il importe davantage de connoître dans la navigation pour l'entrée et sortie des vaisseaux dans les ports ou les rades: il s'y agit plutôt de connoitre la hauteur absolue des eaux, lorsqu'elles sont arrivées à leur plus grande ou leur plus petite hauteur; et pour cet effet, il faut sçavoir dans chaque marée, tant l'élévation des eaux à l'égard du point fixe, que leur baissement: jusqu'ici nous n'avons déterminé que la somme de ces variations sous le nom de hauteur de la marée.

Voyons d'abord comment il faudra déterminer le point fixe: il est vrai qu'il est en quelque façon arbitraire, cependant il paroît le plus convenable de le placer là, où atteindroit la surface de la mer, si les marées étoient nulles. Un tel point doit être considéré comme demeurant constamment à la même hauteur; car les causes qui peuvent le hausser ou le baisser, telles que sont les vents, les courans inégaux, &c. ne sont que passageres et purement accidentelles. Il s'agit donc à présent de sçavoir, combien les eaux montent au-dessus de ce point fixe dans la haute mer, et combien elles descendent au-dessous du même point dans la basse mer. Cette question dépend de toutes les circonstances qui concourent pour former la hauteur absolue des marées, et que nous avons examinées au long avec tout le soin possible. Ce seroit donc se jetter de nouveau dans les mêmes difficultés, si nous voulions traiter la présente question avec la même rigueur, et aussi scrupuleusement, que nous avons fait l'autre; c'est pourquoi nous ne considérerons que les circonstances fondamentales et principales, qui sont que la Terre est toute inondée, que les luminaires sont dans le plan de l'equateur, et que la latitude du lieu est nulle, faisant abstraction de toutes les causes secondes: ceux qui voudront ensuite une solution plus exacte, n'auront qu'à consulter les Chapitres VIII. et IX. pour y arriver.

Soit donc encore (comme nous avons supposé au Chap. V., b ℭ s ∂ b l'equateur, et que b marque le lieu du Soleil, ℭ celui de la Lune, et z le point de la plus grande élévation des eaux, exprimée par y z; si l'on prend un arc de 40 degrés z s, le point s marquera l'endroit du plus

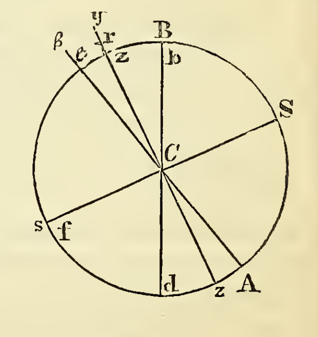
grand baissement des eaux, exprimé par s x: nous avons démontré là-dessus au VIII. §. du Chap. V. qu'on a généralement

$$y\,z = \frac{2\,b\,b - 3\,\sigma\,\sigma}{3\,b\,b} \times \epsilon + \frac{2\,b\,b - 3\,\varrho\,\varrho}{3\,b\,b} \times \delta.$$

dans laquelle équation b marque le sinus total, σ le sinus de l'angle b C z, déterminé au §. XI. Chap. V. ϱ le sinus de l'angle ϵ C z, exprimé au §. XIII. Chap. V. ϵ la hauteur des marées entant qu'elles seroient produites par la seule action de la Lune. Nous avons démontré pareillement au III. §. Chap. VIII. qu'en regardant s x comme positive, de negative qu'elle est par rapport à y z, on a généralement

$$s\,x = \frac{b\,b - 3\,\sigma\,\sigma}{3\,b\,b} \times \epsilon + \frac{b\,b - 3\,\varrho\,\varrho}{3\,b\,b} \times \delta.$$

Or comme les points z et s, qui sont de niveau, marquent le point fixe dans le sens que nous venons de lui donner, on voit que ces quantités y z et s x marquent précisément l'élévation des eaux au dessus du point fixe, et leur baissement au-dessous du même point, tels que nous sommes proposés de les déterminer. Des valeurs que nous venons de trouver, on pourra tirer les Corollaires suivans.



(a) La différence entre chaque élévation au-dessus du point fixe, et la descente au-dessous du même point, est toujours $= \frac{1}{3}\epsilon + \frac{1}{3}\delta$: d'où nous voyons déja que l'une croissant ou diminuant, l'autre doit croître ou diminuer aussi, qui est le phénomene observé par M. Cassini. Cette différence fait *environ* le tiers de la plus grande hauteur de marée : je dis *environ*, parce que les quantités ϵ et δ sont variables, quoique leurs variations soient beaucoup plus petites que celles qui résultent des différens âges de la Lune, et à cet égard on peut dire que la différence dont il s'agit ici, est presque constante.

(b) Dans les syzygies (ou plûtôt un jour et demi après) les quantités ϱ et σ doivent être supposées = o, et ainsi on a $y\,z = \frac{2}{3}\epsilon + \frac{2}{3}\delta$, et $s\,x = \frac{1}{3}\epsilon + \frac{1}{3}\delta$, la montée est donc dans les grandes marées toujours double de la descente. Cette propriété servira à déterminer commodément le point fixe dans chaque port, et elle le donne de 5 pieds 3 pouces plus haut pour Brest, qu'il n'a été choisi par les observateurs, si on la compare avec l'observation, qui est au milieu de la page 94 des Mém. de l'Acad. des Scienc. de 1712.

(c) Dans les quadratures (ou un jour et demi après) il faut faire $\varrho = o$, et $\sigma = b$, ce qui donne $yz = \frac{2}{3}\delta - \frac{1}{3}\text{C}$, et $sx = \frac{1}{3}\delta - \frac{2}{3}\text{C}$: d'où l'on voit que la montée et descente des eaux à l'égard de notre point fixe, ont une raison variable dans les petites marées, qui dépend du rapport qui se trouve alors entre la force lunaire δ, et la force solaire C. Nous avons supposé dans cet ouvrage ce rapport moyen comme 5 à 2, et ce rapport posé, il faut dire que dans les petites marées, l'élévation des eaux au-dessus de notre point fixe, est 8 fois plus grande que leur baissement au-dessous du même point. Dans les marées minimes nous avons supposé $\delta = 2\,\text{C}$, et dans les plus grandes des petites marées $\delta = 3\,\text{C}$.

(d) Nous avons fait voir, que le point z n'est jamais éloigné beaucoup du point C, cela étant et faisant le sinus de l'angle b c C (qui marque l'âge de la Lune) $= m$, on pourra supposer $\varrho = o$ et $\sigma = m$, ce qui donne

$$yz = \frac{2}{3}\text{C} + \frac{2}{3}\delta - \frac{mm}{bb}\text{C}, \text{ et } sx = \frac{1}{3}\text{C} + \frac{1}{3}\delta - \frac{mm}{bb}\text{C}.$$

Si l'on applique toutes ces regles aux observations faites en différens tems et lieux, on y trouvera un grand accord, si l'on choisit bien la juste proportion entre les quantités δ et C. Mais on remarquera dans cet examen, que les vents et les courans peuvent faire varier le point fixe que nous avons adopté.

CONCLUSION.

Je finirai ce discours par quelques refléxions sur notre théorie. Elle suppose avant toutes choses une pesanteur vers les centres du Soleil et de la Lune, pareille à celle qui se fait vers le centre de la Terre, et que cette pesanteur s'étend au-delà de la région de la Terre. C'est le seul principe qui nous soit absolument nécessaire, et il n'y a personne qui le conteste. La rondeur des luminaires prouve suffisamment la pesanteur qui se fait vers le centre; et quelle raison pourroit-on avoir pour donner des limites à cette pesanteur? Aussi a-t-elle été reconnue depuis les siécles les plus reculés; mais on n'en a connu toute l'évidence et toutes les loix, que depuis la philosophie immortelle de M. Newton. Les premieres conséquences que nous avons tirées de ce principe pour l'explication des marées, sont purement géométriques. Nous pouvons donc être assurés de connoître la vraie cause des marées, quoique nous en ignorions encore la cause premiere, qui est la cause générale et physique de la pesanteur. S'il y avoit quelqu'un qui eût deviné cette premiere cause, il

mériteroit d'autant plus la préférence, que son systême renfermeroit né cessairement la vraie cause universelle de la pesanteur: cette conséquence sera la pierre de touche pour prouver la vérité d'un tel systême sur les marées. Il en est de ceci, comme si l'on demandoit, par exemple, pourquoi la surface de l'eau dans un reservoir se met toujours horisontalement: on voit qu'on ne sçauroit en dire la premiere cause, sans qu'elle renferme la vraie théorie sur la pesanteur et sur la fluidité, qui seules peuvent être la vraie cause du phénomene en question. Cette seule refléxion m'a fait quitter quelques conjectures qui se présentoient à mon esprit sur la cause matérielle des marées, quoi qu'elles me parussent d'ailleurs assez plausibles. Je n'ai fait au reste en employant ce principe, que ce que Kepler a déja fait. M. Newton est allé beaucoup plus loin sur cette matiere, aprés avoir démontré auparavant que la pesanteur vers chaque corps dans le systême du monde diminue en raison quarrée reciproque des distances: d'où il a tiré plusieurs nouvelles propriétés sur les marées, lesquelles s'accordant avec les observations, pourroient confirmer davantage son principe sur la diminution de la pesanteur, s'il avoit besoin d'autres preuves. Ce principe n'a pourtant pas beaucoup d'influence, si je me souviens bien, sur les variations des marées, qui dépendent des phases de la Lune, des declinaisons des luminaires et de la latitude des lieux, soit à l'égard des hauteurs des marées, soit à l'égard des marées. Il ne sert principalement qu'à déterminer au juste les variations qui dépendent des différentes distances des luminaires à la Terre, et que les observations n'ont pû déterminer avec assez de précision; il n'y en a cependant aucune qui lui soit contraire, et plusieurs observations bien détaillées, sont tout-à-fait conformes aux résultats que ce principe donne. On remarquera enfin que ce que j'ai dit sur la pesanteur terrestre, que j'ai considérée comme formée par l'attraction universelle de la matiere, n'a absolument aucun rapport avec aucune variation des marées; ces marées pourront subsister telles qu'elles sont, quelle que soit la nature de la pesanteur à cet égard: tout cet examen ne nous a servi que par rapport à la question, quelle devroit être la hauteur absolue de la hauteur des marées, sans le concours d'une infinité de causes secondes, qui peuvent augmenter et diminuer ces hauteurs absolues, de sorte que quel qu'eût été le résultat de ces recherches, notre théorie n'en eût pû souffrir, aucune atteinte. J'espére avec tout cela, qu'on n'aura pas trouvé ces recherches inutiles à l'égard de plusieurs circonstances qui en ont été éclaircies, outre que nos déterminations donnent, en choisissant les hypotheses les plus vraisemblables, des nombres tels que la nature de la chose

paroît exiger. Nous pouvons donc être tout-à-fait sûrs de n'avoir rien admis d'essentiel dans toutes nos recherches, qui ne soit au-dessus de toute contestation.

Quant à l'application de nos principes, à l'usage que j'en ai fait, et au succès de mon travail, ce n'est pas à moi à faire cet examen, sur-tout ne pouvant le faire, sans entrer dans un certain parallele avec un aussi grand homme qu'étoit M. Newton. Si j'ai eu quelques succès, je dois avouer à l'honneur de ce sçavant philosophe, que c'est lui qui nous a mis en état de raisonner solidement sur ces sortes de matieres ; et si j'ose me flatter de quelque mérite, c'est celui d'avoir traité notre sujet avec une attention et unc exactitude conforme aux grande vûës de l'Academie, et au respect qu'on doit à cet illustre corps.

DE

CAUSA PHYSICA

FLUXUS ET REFLUXUS MARIS.

A D.D. MAC-LAURIN MATHEMATICARUM PROFESSORE,

E SOCIETATE ACADEMIÆ EDINBURGENSIS.

Opinionum commenta delet dies, naturæ judicia confirmat.

SECTIO I.

PHÆNOMENA.

Philosophi motum maris triplicem olim agnoverunt *, diurnum, menstruum et annuum; motu diurno mare bis singulis diebus intumescit defluitque, menstruo æstus in syzygiis luminarium augentur, in quadraturis minuuntur, annuo denique æstus hyeme quàm æstate fiunt majores: verùm phænomena hæc sunt paulò accuratiùs proponenda.

I. Motus maris diurnus absolvitur horis circiter solaribus 24 minutisque primis 48, intervallo scilicet temporis quo Luna motu apparente a meridiano loci cujusvis digressa ad eundem revertitur. Hinc altitudo maris maxima contingit Lunâ appellente ad datum situm respectu meridiani loci dati; verùm hora solaris in quam incidit æstus singulis diebus retardatur, eodem ferè intervallo quo Lunæ appulsus ad meridianum loci. Atque hic motus adeò accuratè ad motum Lunæ componitur, ut, secundùm observationes a celeb. D. Cassini allatas, ratio sit habenda horæ in quam incidit vera conjunctio vel oppositio Solis, et æquatio a

* Plin. Lib. II. Cap. XCIX.

motu Lunæ desumpta adhibenda, ut tempus quo mare ad maximam assurget altitudinem die novilunii vel plenilunii accuratiùs definiatur. In æstuariis autem diversi existunt æstus tempore, ut loquitur Plinius, non ratione discordes. Duo æstus qui singulis diebus producuntur, non sunt semper æquales; matutini enim majores sunt vespertinis tempore hyberno, minores tempore æstivo, præsertim in syzygiis luminarium. (a)

II. De motu maris menstruo tria præcipuè sunt observanda. 1. Æstus fiunt maximi singulis mensibus paulò post syzygias Solis et Lunæ, decrescunt in transitu Lunæ ad quadraturas, et sunt paulò post minimi. Differentia tanta est, ut ascensus totius aquæ maximus sit ad minimum ejusdem mensis, secundùm quasdam observationes, ut 9 ad 5, et in nonnullis casibus differentia observatur adhuc major. 2. Æstus sunt majores, cæteris paribus, quò minor est distantia Lunæ a Terra, idque in majori ratione quàm inversa duplicata distantiarum, ut ex variis observationibus colligitur. Ex. gr. anno 1713. ascensus aquæ in Portu Bristonico, (b) referente eodem cl. viro, 26°. Febr. fuit pedum 22 digitorum 5. et Martii 13°. pedum 18. digit. 2. Declinatio Lunæ in utroque casu ferè eadem; in priori distantia Lunæ partium 953, in posteriori partium 1032, quarum distantia mediocris est 1000. Est autem quadratum numeri 1032 ad quadratum numeri 953, ut 22 pedes 5 digit. ad 19 pedes $1\frac{2}{3}$ digitos; ascensus autem aquæ in posteriori casu fuit tantùm 18 ped. cum 2 digitis. 3. Æstus sunt, cæteris paribus, majores, cùm Luna versatur in circulo æquinoctiali, et minuuntur crescente Lunæ declinatione ab hoc circulo.

III. Æstus fiunt, cæteris paribus, majores, quò minor est distantia Solis a Terra; adeóque majores hyeme cæteris paribus, quàm æstate. Differentia verò longè minor est quàm quæ ex diversis Lunæ distantiis oritur. Ex. gr. distantiæ Lunæ perigeæ fuerunt æquales Junii 19, 1711. et Decembri. 28, 1712. ascensus aquæ priore die pedum 18 digit. 4. posteriori pedum 19. digit. 2.; declinatio autem Lunæ fuit paulò minor in hac quàm in illa observatione. (c)

Porrò in diversis locis æstus sunt diversi, pro varia locorum latitudine, eorumque situ respectu oceani unde propagantur, pro ipsius oceani amplitudine, et littorum fretorumque indole, aliisque variis de causis.

(a) Mém. de l'Acad. Royale, 1710. 1712. et 1713.

(b) Ibid.

(c) Mém. de l'Acad. Royale, 1710. 1712. et 1713.

SECTIO II.

PRINCIPIA.

Phænomenis æstus maris insignioribus breviter recensitis, progredimur ad principia, unde horum ratio est reddenda. Liceat tamen præfari nobilissimam quidem, sed simul difficillimam esse hanc philosophiæ partem, quæ phænomenorum causas investigat et explicat. Ea est naturæ subtilitas, ut non sit mirum causas primarias, solertiam philosophorum plerumque effugere. Qui omnium phænomenorum rationes, exponere, integramque causarum seriem nobis exhibere in se susceperunt, illi certè magnis suis ausis hucusque exciderunt. Philosophiam quidem perfectissimam viri clarissimi sibi proposuerunt exstruendam, qualem tamen humanæ sorti competere fas est dubitare. Præstat igitur tantorum virorum successu minùs felici edoctos, ipsius naturæ vestigia cautè et lentè sequi. Quòd si phænomena ad generalia quædam principia reducere possimus, horumque vires calculo subjicere, hisce gradibus aliquam veræ philosophiæ partem assequemur; quæ quidem manca seu imperfecta erit, si ipsorum principiorum causæ lateant; tanta tamen inest rerum naturæ venustas, ut ea pars longè præstet subtilissimis virorum acutissimorum commentis.

Motus maris cuivis vel leviter perpendenti manifestum est luminarium, Lunæ præsertim, motibus affines esse et analogos. Eadem est periodus motûs maris diurni ac Lunæ ad meridianum loci, eadem motûs menstrui ac Lunæ ad Solem; utriusque luminaris vis in motu maris generando hinc elucet, quòd æstus sint majores quò minores utriusque distantiæ a Terra; adeò ut nullus sit dubitandi locus, motum maris esse aliquâ ratione ad motum Lunæ et Solis compositum. Quales autem dicemus illas esse vires quæ a Lunâ et Sole propagatæ (aut ab his aliquo modo pendentes) aquam bis singulis diebus tollunt et deprimunt; quæ in syzygiis luminarium conspirant, quadraturis pugnant; in minoribus utriusque distantiis augentur, in majoribus minuuntur; quæ in minori Lunæ declinatione fortiores, in majori debiliores sunt; et nonnunquam majorem motum cient cùm Sol et Luna infra horizontem deprimuntur, quàm cùm in meridiano superiori ambo dominentur. Fuerunt viri celeberrimi qui æstum maris pressione quâdam Lunæ cieri putarunt. Verùm causam et mensuram hujus pressionis non ostenderunt, nec quo pacto motus maris varii hinc oriri possint satis clarè indicarunt, multò minùs motus illos (hoc principio posito) ad calculum revocare docuerunt.

Sagacissimus Keplerus mare versùs Lunam gravitare, æstumque maris hinc cieri olim monuit. Newtonus, postquàm leges gravitatis detexisset, invenit æquilibrium maris non tam turbari ipsius gravitate versùs Lunam, quàm ex inæqualitate vis quâ particulæ maris tendunt ad Lunam et Solem pro diversis suis distantiis ab horum centris, primusque motum maris ad certas leges, et ad calculum revocare docuit. Fatendum quidem est gravitatis causam ignotam esse vel saltem obscuram; corpora tamen non sunt ideò minùs gravia. Sint qui asserant corpora nullo impulsu aut vi externâ, sed vi quâdam innatâ se mutuò appetere; verùm non æquum est horum somnia veritati afficere. Alii statim confugiant ad immediatum Supremi Auctoris imperium, ast neque horum nimia festinatio probanda est; neque illorum fastidium qui tot naturæ testimoniis non attendunt quoniam causa gravitatis est obscura. Vis gravitatis est nobis adeò familiaris, ejusque mensura adeò pro comperto habetur, ut hâc ad alias vires æstimandas ferè semper utamur; quàm in Cœlis, non minùs quàm in Terris dominari, et secundùm certam legem augeri et minui demonstravit vir eximius tanta cum evidentia ut majorem frustra desideres in ardua et difficili hâc philosophiæ parte, quæ de rerum causis agit.

Newtonus argumento singulari ostendit, Lunam urgeri versùs centrum Terræ vi quæ (habitâ ratione distantiarum) cum gravitate corporum terrestrium planè congruit; quali Terram versùs Lunam pariter urgeri æquo jure censendum est. Cùm corpus aliquod versùs aliud pellitur, inde quidem haud sequitur hoc versùs illud simul urgeri. Verùm quid de gravitate corporum cœlestium sentiendum sit, ex iis quæ comperta sunt de gravitate corporum terrestrium (aliisque viribus similibus) optimè dignoscitur; cùm per hanc ad illam agnoscendam ducamur, sintque phænomena omninò similia. Mons gravitat in Terram, et si Terra non urgeret montem vi æquali et contrariâ, Terra a monte pulsa pergeret cum motu accelerato in infinitum. Porrò status cujusvis systematis corporum (i. e. motus centri gravitatis) necessariò turbatur ab omni actione cui non æqualis et contraria est aliqua reactio, ita ut vix quidquam perenne aut constans dici possit in systemate si hæc lex locum non habeat. Cùmque Terræ partes ita semper in se mutuò agant, ut motus centri gravitatis Terræ nullâtenus turbetur a mutuis corporum aut agentium quorumcunque conflictibus, sive intra sive extra superficiem sitorum; eademque lex obtineat in viribus magneticis, electricis aliisque, teste experientiâ, jure concludit Newtonus Lunam non tantùm in Terram, sed hanc quoque in illam gravitare, et utramque circa commune

centrum gravitatis moveri, dum hoc centrum circa totius systematis centrum gravitatis ([a]) continuò revolvitur.

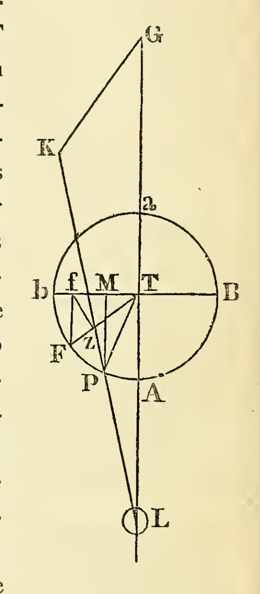
Gravitatem, cæteris paribus, proportionalem esse quantitati materiæ solidæ corporis, accuratissima docent experimenta; idemque, e calculo gravitatis corporum cœlestium comprobatur; quin gravitatem quoque sequi rationem materiæ corporis versùs quod dirigitur, ex principio memorato aliisque argumentis colligitur. Similis est ratio aliarum virium quæ in naturâ dominantur. Lucis radii ex. gr. magis refringuntur, cæteris paribus, quò densiora sunt corpora quæ subintrant. Terræ partes versùs se mutuò gravitant, non versùs illud punctum fictum quod centrum Terræ appellamus; quod cùm rationi et analogiæ naturæ sit maximè consentaneum, tum pulcherrimè confirmatur accuratissimis experimentis quæ in boreali Europæ parte nuper instituerunt viri clarissimi ex Academiâ Regiâ Parisiensi. Causa gravitatis (quæcumque demum sit) latè dominatur; cùmque sit diversa in diversis distantiis, non est mirandum, ejus vim pendere quoque a magnitudine illius corporis, versùs quod alia impellit. Fatemur vim hanc corpori centrali impropriè tribui; expedit quidem brevitatis gratiâ sic loqui, id autem sensu vulgari, non philosophico est intelligendum.

Hæc breviter tantùm hìc attingimus. Newtonus postquàm definivisset vim Solis ad aquas turbandas ex differentiâ diametri æquatoris et axis Terræ (quam approximatione quâdam suâ investigaverat) per regulam auream quærit breviter ascensum aquæ ex vi Solis oriundum. Verùm quamvis elevatio aquæ, quæ sic prodit, parum a verâ differat, cùm tamen Problemata hæc sint diversi generis, quorum prius pendet a quadraturâ circuli, posterius autem a quadraturâ hyperbolæ seu logarithmis, ut posteà videbimus; sitque dubitandi locus an a priori ad posteriorem elevationem determinandam, transitus adeò brevis sit omni ex parte legitimus, vel etiam an methodus quâ figuram Terræ definiverat sit satis accurata; cùmque vires subtilissimæ motum maris producant, quæ nullos alios sensibiles edunt effectus, adeò ut levissima quæque in hac disquisitione alicujus momenti esse possint; propterea existimavi me facturum operæ prætium, si aliam aperirem viam quâ calculus in hisce Problematibus ex genuinis principiis accuratissimè institui poterit.

Repetenda imprimis sunt pauca ex Newtono, postea viam diversam sequemur. Sit L Luna, T centrum Terræ, B b planum rectæ L T

([a]) Suspicari licet aliquam obliquitatis eclipticæ variationem, de quâ sermo est apud astronomos, ex motu Solis circa centrum systematis oriri: indicio erit hanc esse phænomeni causam, si constiterit illam variationem analogiam servare cum motu Jovis planetarum maximi.

perpendiculare, P particula quævis Terræ; sitque P M perpendicularis in planum B b. Repræsentet L T gravitatem Terræ mediocrem vel particulæ in centro T positæ versùs Lunam, sumatur L K ad L T, ut est L T² ad L P², eritque recta L K mensura gravitatis particulæ P in Lunam. Ducatur K G rectæ P T parallela, occurratque L T productæ, si opus est, in G, et resolvetur vis L K in vires K G et L G, quarum prior urget particulam P versùs centrum Terræ, estque ferè æqualis ipsi P T; posterioris pars T L omnibus particulis communis, et sibi semper parallela, motum aquæ non turbat; altera verò pars T G est quàm proximè æqualis ipsi 3 P M. * Imprimis igitur quærendum est quænam debeat esse figura Terræ fluidæ cujus particulæ versùs se mutuò gravitant viribus in inversâ distantiarum ratione, duplicatâ decrescentibus, quæque simul agitantur duabus viribus extraneis, quarum altera versùs centrum T dirigitur, estque semper ut P T distantia particulæ a centro, altera agit in recta ipsi T L parallela, estque ad priorem ut 3 P M ad P T. Ostendemus autem Sectione sequenti figuram hujus fluidi esse accuratè sphæroidem quæ gignitur revolutione ellipseos circà axem transversum, si Terra supponatur uniformiter densa; atque hinc calculum motûs maris ex motibus cœlestibus deducere conabimur.



Observandum autem alias causas conspirare ad motus maris producendos cum inæquali gravitate partium Terræ versùs Lunam et Solem. Motus Terræ diurnus circa axem suum variis modis æstum maris afficere videtur, præter illum a Newtono memoratum, quo æstus ad horam lunarem secundam aut tertiam retardatur. 1. Æstus fit paulò major ob vim centrifugam et figuram sphæroidicam, ex motu Terræ oriundam, cùm hæc vis paulò major evadat in partibus maris altioribus quàm in depressioribus. 2. Cùm maris æstus fertur vel a meridie versùs septentrionem, vel contrà a septentrione versùs meridiem, incidit in aquas, quæ diversâ velocitate circa axem Terræ revolvuntur, atque hinc motus novos cieri necesse est, ut postea dicemus. Porrò secundùm theoriam gravitatis, vis quâ particulæ maris urgentur versùs Terram solidam, (quæ aquâ longè densior est) superat vim quâ versùs aquam urgentur. Vires illæ sunt

* Vis hæc paulò major est si particula P sit in parte Terræ Lunæ obversâ, minor si in parte Lunæ aversâ, unde meritò habetur æqualis ipsi 3 P M.

quidem exiguæ; cùm autem vires quibus Luna et Sol in aquas agunt, in experimentis pendulorum et staticis nullos producant effectus sensibiles, tantos autem motus in aquis oceani generent, suspicari licet vires tantillas ad aquæ motus augendos aliquâ ex parte conducere.

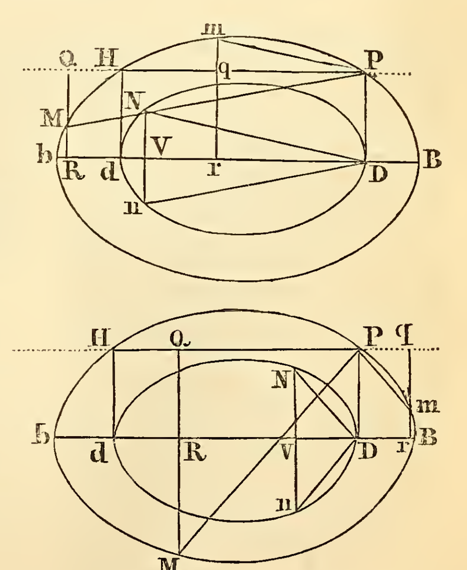
SECTIO III.

De figurâ quam Terra fluida æqualiter densa indueret ex inæquali particularum gravitate, versùs Lunam aut Solem.

Expositis phænomenis æstûs maris et principiis generalibus unde celeberrimi phænomeni ratio petenda videtur, progredimur nunc ad figuram determinandam quam Terra fluida viribus Lunæ vel Solis suprà explicatis, agitata assumeret; præmittenda autem sunt quædam Lemmata quibus hæc disquisitio aliàs difficillima facilè perfici poterit.

(†) LEMMA I.

(†) Hoc Lemma ad demonstrandum Corol. 4. proponitur, quod Corollarium ad Propositionem sequentem reducitur, quæ facillimè analyticè demonstrari potest.



THEOREMA.

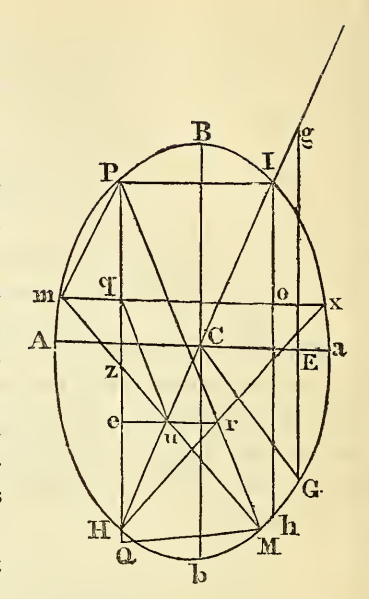
A puncto quovis ellipseos, ducantur ad ellipsim tres lineæ P H, P M, P m, prior quidem P H sit axi parallela, reliquæ P M, P m faciant cum ipsâ æquales quosvis angulos M P H, m P H; a punctis P, H, M et m ducantur perpendiculares ad P H et ad axim P D, H d, Q M R, m q r et super D d describatur ellipsis similis priori, ducanturque a puncto D ad eam ellipsim lineæ D N, D n lineis P m, P M parallelæ, denique ducatur N n quæ secet axim in V, dico quod $2\ DV = PQ + Pq = DR + Dr$, si puncta Q et q cadant ab eâdem parte puncti P, vel quod $2\ DV = PQ - Pq = DR - Dr$ si puncta Q et q cadant ad partes diversas puncti P.

Primò, quoniam ex constructione, lineæ D N, D n æquales faciunt angulos cum axe D d, facile deducitur lineam N V n esse axi perpendicularem, ideóque si radius sit ad tangentem anguli Q P M, ut 1 ad t, et D V dicatur z, erit $NV = tz$; et pariter si P Q aut P q vel eorum æquales D R aut D r dicantur x, M Q vel m q dicentur t x.

Axis major sit ad minorem in utraque ellipsi ut a ad b, dicaturque B D, f, D b = g, D P = h, et $Dd = g - f = l$, erit per naturam ellipseos $a^2 : b^2 = fg : h^2$, et pariter erit $a^2 : b^2 = z \times \overline{l - z} : t^2 z^2 = l - z : t^2 z$, hinc $a^2 : \frac{b^2}{t^2} = l - z : z$ et componendo $\frac{t^2 a^2 + b^2}{t^2} : \frac{b^2}{t^2} = a^2 t^2 + b^2 : b^2 = l : z = \frac{b^2 l}{a^2 t^2 + b^2} = DV$.

In primo autem casu in quo Q et q sunt ab eadem parte puncti P, erit $RM = h - tx$

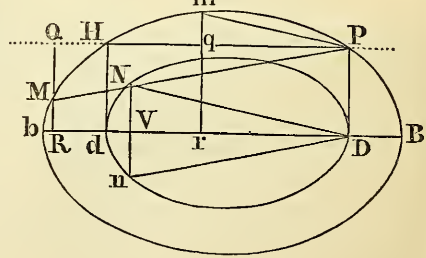
Sit A B a b ellipsis, C centrum, H I diameter quævis, M m ordinata ad diametrum H I in puncto u, ex H et m ducantur rectæ H P et m x parallelæ, duabus quibusvis diametris conjugatis; et sibi mutuò occurrentes in q; jungantur q u et P M, atque hæ rectæ erunt sibi mutuò parallelæ.

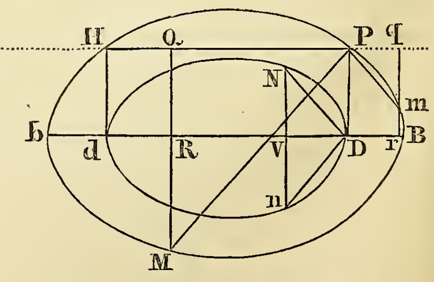


Occurrat recta H P, ordinatæ M m in z, et rectæ M Q (quæ parallela sit ipsi m q) in Q. Sint C G, C A et C B semidiametri respectivè parallelæ rectis M m, m x et H P. Ducatur G E parallela ipsi C B et producatur donec occurrat semidiametro C I in g. Ex naturâ ellipseos rectangulum M z × z m : H z × z P :: $CG^2 : CB^2$; et ob parallelas C G et

vel t x − h, et r m = h + t x, et B R aut B r, f + x; et R b aut r b, g − x; hinc ex naturâ ellipseos erit $a^2 : b^2 = \overline{f + x} \times \overline{g - x} : \overline{h \mp t x}|^2 = fg + gx - fx - xx : h^2 \mp 2htx + t^2x^2 = lx - x^2 : \mp 2htx + t^2x^2$ (demptis ex utroque termino respectivè terminis $fg : h^2$ qui sunt in eâdem ratione, et posito l loco $g - f$) $= l - x : \mp 2ht + t^2 x$, atque hinc habetur $a^2t^2x \mp 2a^2ht = b^2l - b^2x$ et transpositione factâ reductisque terminis, fit $x = \frac{b^2 l \pm 2a^2ht}{a^2t^2 + b^2}$. Quare si sumatur summa duarum linearum D R, D r, quæ per singulos valores x exprimuntur, erit $DR + Dr = PQ + Pq = \frac{2b^2l}{a^2t^2 + b^2}$ duplum valoris D V prius inventi.

In altero verò casu in quo Q et q hinc inde a puncto P cadunt, erit $RM = tx - h$, et $rm = h - tx$, erit $BR = f + x$ et $Br = f - x$, $Rb = g - x$ et $rb = g + x$. Unde ex naturâ ellipseos erit $a^2 : b^2 = f \overline{\pm x} \times g \overline{\mp x} : h^2 - 2htx + t^2x^2 = fg \pm gx \mp fx - x^2 : h^2 - 2htx + t^2x^2 = \pm lx - x^2 : -2htx + t^2x^2$ (demptis terminis $fg : h^2$ et adhibito l loco $g - f$) $= \pm l - x : -2ht + t^2x$, hincque obtinetur $a^2t^2x - 2hta^2 = \pm b^2l - b^2x$ et transpositione factâ reductisque terminis fit $x = \frac{\pm b^2 l + 2hta^2}{a^2t^2 + b^2}$. Quare si sumatur differentia duorum D R, et D r quæ per singulos valores x exprimuntur, erit $DR - Dr = PQ - Pq = \frac{2b^2l}{a^2t^2 + b^2}$ duplum valoris



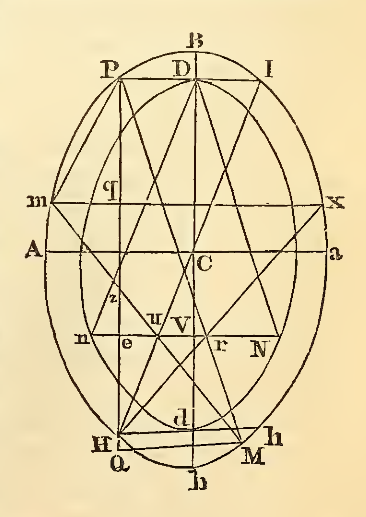


D V prius inventi, ergo $2\,DV = PQ \mp Pq$ prout Q et q sunt ab eâdem vel a diversâ parte puncti P. Q. e. d.

M m, erit q z : z m : : G E : C G. Unde M z × q z : H z × z P : : C G × G E : C B^2. Verùm H z × z P : z u × z P : : H z : z u : : G g : C G. Quare ex æquo M z × z q : z u × z P : : G g × G E : C B^2. Est autem rectangulum sub G g et G E æquale quadrato ex semi-diametro C B per notam proprietatem ellipseos, cùm C I sit conjugata semi-diametro C G, et C B ipsi C A. Proinde M z × z q = z u × z P, et z q : z u : : z P : z M, adeóque q u parallela rectæ P M. Q. e. d.

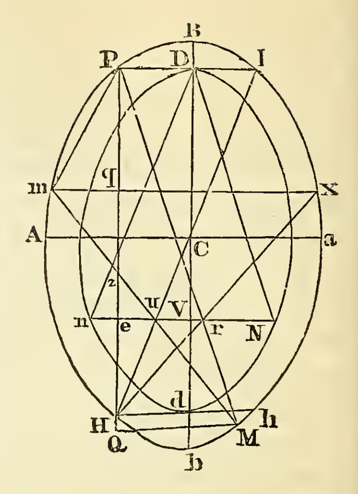
Cor. 1. Recta P Q dividitur harmonicè in q et z vel P Q : P q : : Q z : q z. Quippe ducatur u e parallela ipsi m x, occurratque rectæ H P in e, tum erit P z : q z : : P M : q u (ob parallelas P M, q u) : : P Q : q e. Unde P q : q z : : P e : q e : : q e : e z : : P e + q e : q e + e z : : (quoniam Q e, e q sunt æquales) P Q : Q z.

Cor. 2. Occurrat recta m x ellipsi in x, jungatur H x quæ occurrat rectæ P M in r, juncta u r erit parallela m x. Quippe sit I h parallela rectæ H P et occurrat ipsi m x in o; tum o x erit æqualis rectæ q m et I o : o x : : P q : q m : : P Q : Q M; adeóque I x erit parallela ipsi P M. Verùm cùm I H sit diameter ellipseos et ad x punctum in ellipsi situm ductæ sint rectæ I x, H x ab extremitatibus diametri I H, erunt hæ parallelæ duabus diametris conjugatis, ex naturâ ellipseos. Quare cùm ex punctis H et M eductæ sint duæ rectæ H x et P M respectivè parallelæ duabus diametris conjugatis, quæ sibi mutuò occurrunt in r, juncta u r erit parallela rectæ x m per hoc Lemma.



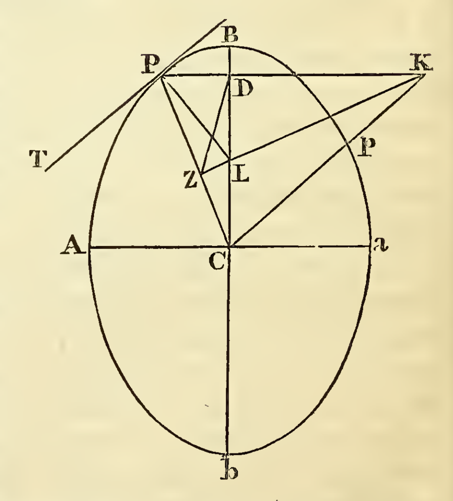
Cor. 3. Sit recta H P nunc parallela axi ellipseos, eritque angulus H P M æqualis angulo H P m, quoniam Q M : q m : : Q z : q z : : P Q : P q per Cor. I. Ducantur porrò H h et P I parallelæ alteri axi A a et occurrant axi B b in D et d; super axem D d describatur ellipsis similis ellipsi A B a b et similiter posita cui occurrat recta u r producta in N et n; occurrat u r axi D d in V, eritque V N vel V n æqualis rectæ e r, et si jungantur D n, D N, erunt hæ rectæ respectivè parallelæ rectis P M, P m. Nam P e : e r : : P q : q m et H e : e r : : H q : q x, unde H e × P e : e r^2 : : H q × q P : m q × q x : : C B : C A. Sed rectangulum D V × V d : V N^2 : : C B^2 : C A^2; d V = H e, D V = P e, adeóque D V × V d = H e × P e, unde V N^2 = e r^2,

et V N = e r, P M parallela rectæ D N et P m rectæ D n.



Cor. 4. Hinc sequitur conversè quod si N n sit ordinata ab interiori ellipsi ad axem D d et D P perpendicularis axi D d occurrat ellipsi exteriori in P; jungantur D N et D n, hisque parallelæ P M, P m occurrant ellipsi exteriori in M et m; ducatur P H parallela axi D d, in quam sint perpendiculares M Q et m q, tum $PQ + Pq$ (vel $2\,Pe$) erit æqualis $2\,DV$ punctis Q et q cadentibus ad easdem partes puncti P, et $PQ - Pq = 2\,DV$ cum Q et q sunt ad contrarias partes puncti P.

LEMMA II.



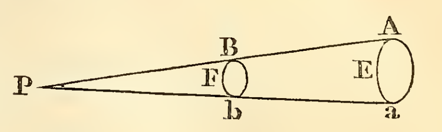
Recta P L perpendicularis ellipsi A B a b in P, occurrat axi B b in L, et ex puncto L sit L Z perpendicularis in semi-diametrum C P, eritque rectangulum C P Z contentum sub semi-diametro C P et interceptâ P Z æquale quadrato ex semi-axi C A.

Sit C p semi-diameter conjugata ıpsi C P, ducatur P D perpendicularis in axem B b et producatur donec occurrat semi-diametro C p in K, jungatur K Z, sitque P T tangens ellipseos in puncto P. Ob angulos rectos L D P, L Z P, L P T circulus transibit per quatuor puncta L, D, P, et Z, et continget rectam P T in P, adeóque angulus P D Z æqualis erit angulo C P T vel P C K. Proinde circulus transibit per quatuor puncta C, K, D et Z; angulus C Z K æqualis erit recto C D K, K Z transibit per punctum L et ex naturâ circuli $CP \times PZ = DP \times PK = CA^2$. Q. e. d. ([a]).

([a]) Proprietates bis in hoc et præcedenti Lemmate demonstratæ analogicè facilè ad hyperbolam transferuntur.

LEMMA III.

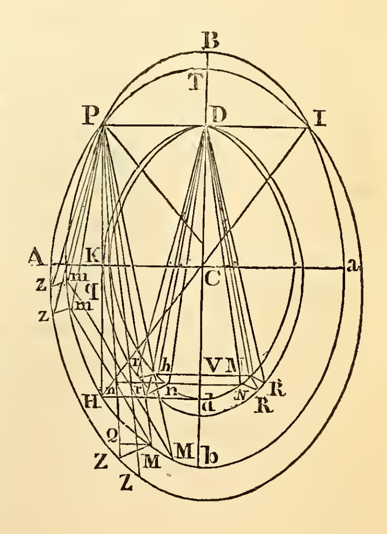
Ponamus particulas corporum versùs se mutuò gravitare viribus decrescentibus in inversâ duplicatâ ratione distantiarum a se invicem, sintque P A E a, P B F b similes pyramides vel coni ex materiâ hujusmodi homogeneâ compositi, eritque gravitas particulæ P in solidum P A E a ad gravitatem ejusdem particulæ in solidum P B F b ut P A ad P B, vel ut homologa quævis latera horum solidorum.



Gravitas enim particulæ P in superficiem quamvis A E a A puncto P concentricam est ut superficies hæc directè et quadratum radii P A inversè, adeóque est semper eadem in quâvis distantiâ P A. Quare gravitas particulæ P versùs totum solidum P A E a erit ad gravitatem ejusdem particulæ versùs totum solidum P B F b ut P A ad P B.

Cor. 1. Hinc gravitates quibus particulæ similiter sitæ respectu solidorum similium et homogeneorum versùs hæc solida urgentur, sunt ut distantiæ particularum a punctis similiter sitis in ipsis solidis, vel ut latera quævis solidorum homologa. Quippe hæc solida resolvi possunt in similes conos vel pyramides, vel similia horum frusta, quæ vertices habebunt in particulis gravitantibus.

Cor. 2. Hinc etiam facilè sequitur (*) quòd si annulus ellipticus, figuris similibus D B a b, D n d N terminatus, circà axem alterutrum revolvatur, gravitatem particulæ intra solidum sic genitum sitæ, vel in interiori ejus superficie positæ, versùs hoc solidum evanescere; quoniam si recta quævis ellipsibus hisce similibus et similiter positis occurrat, æqualia semper erunt rectæ segmenta extrema quæ ab ellipsibus intercipiuntur (ut facilè ostenditur ex naturâ harum figurarum) adeóque vires æquales et oppositæ in hoc casu se mutuò destruent. Hinc verò sequitur quòd si A B a b sit sphærois genita

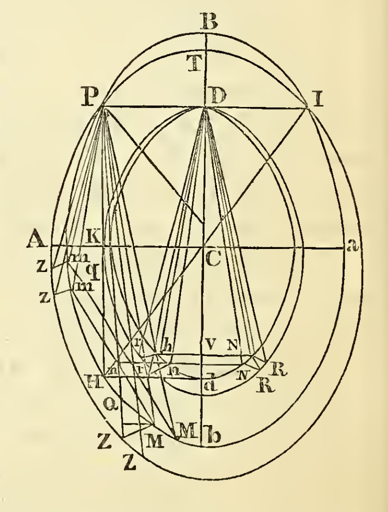


(*) Vid. Newt. Lib. I. Prop. XCI. Cor. 3.

motu ellipseos circà alterutrum axem, sintque B et D particulæ quævis in eodem semi-diametro sitæ, gravitatem particulæ B versùs sphæroidem fore ad gravitatem particulæ D ut distantia C B ad distantiam C D, per Corollarium præcedens.

LEMMA IV.

Sit A B a b sphærois genita motu semi-ellipseos A B a circà axem A a, P particula quævis in superficie solidi, sit P K axis normalis in K; et P D axi parallela occurrat plano B b (quod axi supponitur normale) in D. Resolvatur vis quâ particula P gravitat versùs sphæroidem in duas vires, alteram axi parallelam, alteram eidem perpendicularem, eritque prior æqualis vi quâ particula K in axi sita tendit ad centrum solidi, posterior autem æqualis vi quâ particula D urgetur versùs idem centrum.



Producatur P K donec rursùs occurrat ellipsi generatrici in H, ducatur H d parallela axi A a quæ occurrat axi B b in d, concipiamus solidum D n d N simile ipsi B A b a et similiter positum describi super axem D d. Horum solidorum sectiones ab eodem plano resectæ erunt semper ellipses similes et similiter positæ, uti notum est et facilè ostenditur. Sint igitur B A b a, D n d N hujusmodi figuræ a plano P A b I B P, quod semper transire ponatur per datam rectam P D I resectæ ex similibus hisce solidis. Contineat planum P z Z I T cum plano priori angulum quàmminimum et faciat sectiones similes P z Z I T, D r R D et similiter positas in prædictorum solidorum superficiebus. Hisce positis, imprimis ostendemus vim quâ particula P urgetur versùs duo frusta quæ planis P b I, P Z I et planis P B I, P T I continentur, si reducatur ad directionem P K, æqualem fore vi quâ particula D urgetur versùs frustum planis D n N D, D r R D terminatum.

Sint enim N n, N′ n′ duæ ordinatæ ex interiori ellipsi ad axem D d; sint ([a]) P M, P m, P M′ et P m′ respectivè parallelæ rectis D N, D n,

([a]) In hac figurâ describendâ rectas N R, N′ R′, &c. non duximus secundùm regulas perspectivæ, sed eâ ratione quâ facillimè dignosci possint.

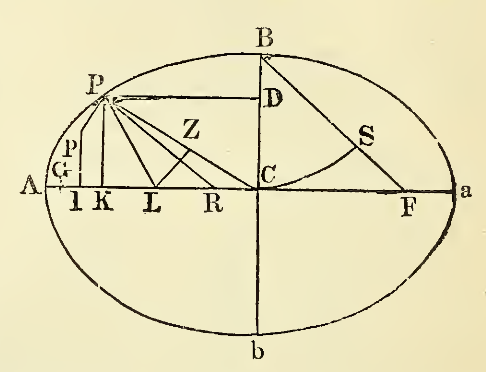
D N′ et D n′; sint porrò plana D N R, D N′ R′, D n r, D n′ r′, P M Z, P M′ Z′, P m z, P m′ z′ plano P b I B perpendicularia quæ alteri plano, P z Z I T occurrant in rectis D R, D R′, D r, D r′, P Z, P Z′, P z, P z′, respectivè. His positis, quoniam anguli N D N′ et M P M′, n D n′ et m P m′, ponuntur semper æquales; et rectæ P M et D N, P m et D n, æqualiter semper inclinantur ad P I communem planorum sectionem; si angulus N D N′ et inclinatio planorum P b I B, P Z I T ad se invicem continuò minui supponantur donec evanescant, erunt gravitates particulæ D, in pyramides D N N′ R′ R, D n n′ r′ r et particulæ P in pyramides P M M′ Z′ Z, P m m′ z′ z ultimo in ratione rectarum D N, D n, P M et P m respectivè per Lemma III. Eædemque vires secundùm rectas axi A a, perpendiculares æstimatæ erunt ut rectæ D V, D V, P Q, P q respectivè. Unde cùm $P\,Q \mp P\,q = 2\,D\,V$ per Corol. 4. Lem. I. sequitur vim quâ particula P urgetur versùs axem A a, gravitate suâ in pyramides P M M′ Z′ Z, P m m′ z′ z æqualem esse vi, quâ particula D urgetur gravitate suâ versùs pyramides D N N′ R′ R, D n n′ r′ r. Quare si plana D N R, P M Z sibi mutuò semper parallela et plano P b I B perpendicularia moveantur semper circà puncta D et P (rectis scilicet D N, P M procedentibus semper in plano P b I B, et rectis D R, P z in plano P Z I T) erunt vires quibus particula P urgetur versùs axem ex gravitate suâ in frusta motu planorum P M Z, P m z sic descripta, æquales semper viribus, quibus particula D urgetur versùs eundem axem gravitate suâ in frusta motu planorum D N R, D n r descripta; unde sequitur particulam P urgeri eâdem vi secundùm rectam P K, gravitate suâ in frusta planis P b I, P z I, et planis P B I, P T I contenta, quâ particula D tendit versùs frusta planis D n N D, D r R D terminata. Proinde cùm hæ vires secundùm rectas axi totius solidi perpendiculares æstimatæ sint etiam æquales, et par sit ratio virium quibus particulæ P et D urgentur versùs frusta quævis alia similiter ex solidis resecta, sequitur particulam P æqualiter urgeri vers s axem gravitate suâ in solidum exterius, et particulam D gravitate suâ in solidum simile interius, vel etiam in solidum exterius, cùm hæ vires sint eædem per Corol. 2. Lem. III.

Simili planè ratione colligitur vim, quâ particula P urgetur secundùm rectam axi parallelam, æqualem esse vi, quâ particula K in axe sita urgetur versùs centrum solidi.

Cor. 1. Particulæ igitur quævis sphæroidis æqualiter ab axe vel æquatore solidi distantes æqualiter versùs axem vel æquatorem urgentur. Viresque quibus particulæ quævis urgentur versùs axem sunt ut illarum

distantiæ ab axe, et vires quibus urgentur versùs planum æquatoris, sunt ad se invicem, ut illarum distantiæ ab hoc plano.

Cor. 2. Repræsentet A vim quâ sphærois urget particulam in axis termino A sitam, B vim quâ idem solidum urget particulam B in circumferentiâ circuli medii inter A et a positam; sumatur K R ad K C, ut $\frac{A}{CA}$ est ad $\frac{B}{CB}$, jungatur P R, et particula P tendet versùs sphæroidem in recta P R, vi quæ huic rectæ semper est proportionalis. Vis enim quâ particula D urgetur versùs centrum solidi, est ad B, ut C D ad C B, per Cor. 2. Lem. III. Similiter vis quâ particula K urgetur versùs solidi centrum est ad A, ut C K ad C A. Quare per Lemma IV. vis quâ particula P urgetur secundùm rectam P K axi normalem est ad vim, quâ urgetur secundùm rectam P D axi parallelam, ut $\frac{PK \times B}{CB}$ ad $\frac{CK \times A}{CA}$; adeóque ut P K × K C ad C K × K R. i. e. ut P L ad K R ex constructione. Quare particula P urgetur secundùm rectam P R, his viribus conjunctis, et vis composita est ad B, ut P R ad B C. Quo verò pacto vires A et B computari possint, postea ostendemus.



PROPOSITIO I.—THEOREMA FUNDAMENTALE.

Constet sphærois A B a b materia fluida, cujus particulæ versùs se mutuò urgeantur viribus in inversâ duplicatâ ratione distantiarum decrescentibus; agantque simul duæ vires extraneæ in singulas fluidi particulas, quarum altera tendat versùs centrum sphæroidis, sitque semper proportionalis distantiis particularum ab hoc centro; altera agat secundùm rectas axi solidi parallelas, sitque semper proportionalis distantiis particularum a plano B b axi normali; et si semi-axes C A, C B ellipseos generatricis sint inversæ proportionales viribus totis, quæ agunt in particulas æquales in extremis axium punctis A et B sitas, erit totum fluidum in æquilibrio.

Ut hæc Propositio nostra primaria clarissimè demonstretur, ostendemus imprimis vim compositam ex gravitate particulæ cujusvis P et duabus viribus extraneis, semper agere in rectâ P L, quæ est ad superficiem

sphæroidis semper normalis. 2. Fluidum in rectâ quâvis P C a superficie ad centrum ductâ, ejusdem ubique esse ponderis. 3. Fluidum in canalibus quibusvis a superficie ad datam quamvis particulam intra solidum ductis, eâdem semper vi particulam illam urgere.

1. Vires totæ quæ agunt in particulas A et B dicantur M et N, quæ ex hypothesi sunt in ratione axium C B et C A. Resolvatur vis prior extranea quæ agit secundùm rectam P C in vires duas, alteram axi parallelam, alteram eidem perpendicularem; eruntque hæ vires semper ut rectæ P K et K C. Unde cùm vis quâ gravitas particulæ P urget eam secundùm rectam P K sit etiam ut P K, per Lemma superius, sequitur vim totam quâ particula P urgetur secundùm rectam P K, esse ad N, ut P K ad C B. Vires tres agunt in particulam P secundùm rectam P D axi parallelam, particulæ scilicet gravitas et duæ vires extraneæ, quæ singulæ variantur in ratione rectæ P D vel K C; adeóque vis ex his tribus resultans erit ad M ut C K ad C A. Vis igitur quâ particula P urgetur secundùm rectam P K est ad vim quâ urgetur secundùm rectam P D ut $\frac{N \times PK}{CB}$ ad $\frac{M \times KC}{CA}$ sive (cùm $M : N :: CB : CA$) ut $PK \times CA^2$ ad $CK \times CB^2$. i. e. (quoniam si P L ellipsi generatrici perpendicularis occurrat axi A a in L, erit K C ad K L, ut CA^2 ad CB^2, ex notâ ellipsis proprietate) ut $PK \times KC$ ad $KC \times KL$, adeóque ut P K ad K L. Unde vis composita particulam urget in rectâ P L, quæ ad superficiem fluidi ponitur perpendicularis; estque semper ut recta hæc P L, cùm vires secundùm rectas P K sint semper ut P K.

2. Sit L Z normalis in semi-diametrum C P, et vis quâ particula P urgetur versùs centrum, erit ut recta P Z per vulgaria mechanicæ principia, et pondus fluidi in rectâ P C ut rectangulum $CP \times PZ$, quod semper est æquale quadrato ex semi-axi C B per Lemma II. Centrum igitur æqualiter undique urgetur, estque fluidum in æquilibrio in C.

3. Sit p particula quævis in solido ubicunque sita, P p recta quævis a superficie ad particulam p ducta; sint P K, p l normales in axem A a, et vis quâ particula p urgetur pondere fluidi in rectâ quâvis P p secundùm hanc rectam, facili calculo quem brevitatis gratiâ omitto, invenietur æqualis $\frac{N}{2CB} \times \overline{PK^2 - pl^2} - \frac{M}{2CA} \times \overline{Cl^2 - CK^2}$ = (cùm $M : N :: CB : CA$) $\frac{M \times CA^2 \times PK^2 + M \times CK^2 \times CB^2 - M \times CA^2 \times pl^2}{2CB^2 \times CA}$ $- \frac{M \times CB^2 \times Cl^2}{2CB^2 \times CA} =$ (cùm $PK^2 : CA^2 - CK^2 :: CB^2 : CA^2$

et si C G sit semi-axis ellipseos per p ductæ similis ellipsi A B a b, et similiter sitæ, $p\,l^2 : C\,G^2 - C\,l^2 :: C\,B^2 : C\,A^2)\ \frac{M \times C\,A - M \times C\,G}{2}$ adeòque cùm hæc quantitas a situ puncti P non pendeat, vis hæc est semper eadem, si detur locus particulæ p; quæ proinde cùm undique æqualiter urgeatur, fluidum erit ubique in æquilibrio.

Cor. 1. Sit ut in Cor. 2. Lemmatis IV. A vis gravitatis in sphæroidem in loco A, B vis gravitatis in eandem in loco B, V vis K G in mediocri suâ quantitate in superiore Sectione expositâ, quâ Luna vel Sol aquam sphæroidis deprimit in distantiâ d, quæ ponitur mediocris inter C A et C B. Sit C A = a, C B = b, eritque vis N, quâ particula B versùs C urgetur, æqualis $B + \frac{b\,V}{d}$, et $M = A + \frac{a\,V}{d} - \frac{3\,a\,V}{d} = A - \frac{2\,a\,V}{d}$. Unde per hanc Propositionem si $a : b :: B + \frac{b\,V}{d} : A - \frac{2\,a\,V}{d}$, erit fluidum in æquilibrio. Atque hinc ex datis A, B et V in terminis a et b species figuræ innotescet. Est $A\,a - B\,b = \frac{2\,a^2\,V}{d} + \frac{b^2\,V}{d}$.

Cor. 2. Cùm vis V (sive ex inæquali gravitate particularum versùs Lunam, vel versùs Solem oriatur) sit exigua admodum respectu virium A et B, et differentia inter a et b admodum parva, ducatur $a = d + x$ et $b = d - x$, eritque $B\,d - B\,x + V \times \frac{\overline{d - x}|^2}{d} = A\,d + A\,x - 2\,V \times \frac{\overline{d + x}|^2}{d}$, et neglectis terminis ubi x x reperitur $B\,d - B\,x + V\,d - 2\,V\,x = A\,d + A\,x - 2\,V\,d - 4\,V\,x$, unde $B\,d - A\,d + 3\,V\,d = A\,x + B\,x - 2\,V\,x$; adeóque $x : d :: B - A + 3\,V : B + A - 2\,V$; et differentia altitudinis aquæ in A et B (seu 2 x) ad semi-diametrum mediocrem d ut $2\,B - 2\,A + 6\,V$ ad $B + A - 2\,V$, vel quàm proximè ut $B - A + 3\,V$ ad gravitatem versùs sphæroidem mediocrem.

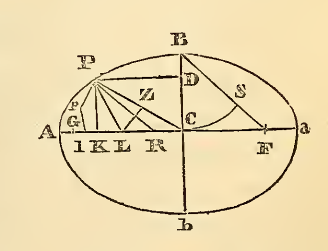
Cor. 3. In præcedentibus Corollariis supposuimus $d = \frac{1}{2}\,C\,A + \frac{1}{2}\,C\,B$; verùm si d denotet aliam quamvis distantiam ubi vis K G ponatur æqualis ipsi V, sitque $e = \frac{1}{2}\,C\,A + \frac{1}{2}\,C\,B$, erit $x : e :: B - A + \frac{3\,e\,V}{d} : B + A - \frac{2\,e\,V}{d}$.

Cor. 4. Per vim V in his Corollariis intelleximus vim vel Solis vel Lunæ, et figuram consideravimus, quam Terra fluida homogenea indueret si hæ vires seorsùm in eam agerent. Sit nunc Luna Soli conjuncta

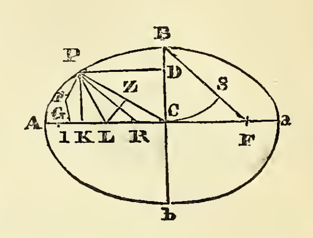
vel opposita, et simul agant in Terram. In hoc casu vires luminarium conspirant ad aquam tollendam in A et a, eamque deprimendam in B et b, et easdem ubique servant leges. Unde erit etiam in hoc casu fluidum in æquilibrio, si vis tota quæ agit in loco A, sit ad vim totam quæ agit in loco B ut C B ad C A; adeóque si V nunc designet summam virium, quibus Sol et Luna aquam deprimit in rectis T b, T B ad mediocrem distantiam fluidum erit in æquilibrio, si $b : a :: A - \frac{2aV}{d} : B + \frac{bV}{d}$, vel x ad d ut $B - A + 3V$ ad $B + A - 2V$ quàm proximè, ut priùs.

Cor. 5. Sit nunc Luna in rectâ A a, Sol in rectâ B b; et quoniam Lunæ vis potior est, axis transversus figuræ generatricis transeat per Lunam, conjugatus per Solem; et si vis tota quæ agit in loco A sit ad vim totam quæ agit in loco B ut C B ad C A, erit sphærois fluida in æquilibrio etiam in hoc casu. Sit s vis quâ Sol deprimit aquam in rectis T A, T a ad mediocrem a centro C distantiam, l vis quâ Luna aquam deprimit in rectis T B, T b ad æqualem distantiam; eritque vis tota quæ agit in loco A æqualis $A - \frac{2al}{d} - \frac{as}{d}$, vis tota quæ agit in loco B æqualis $B + \frac{bl}{d} - \frac{2bs}{d}$. Unde colligitur ut in Corol. 2. $x : d :: B - A + 3l - 3s : B + A - 2l + 2s ::$ (si $l - s$ nunc dicatur V) $B - A + 3V, B + A - 2V$, ut priùs.

Schol. Eâdem planè ratione ostenditur quòd si B a b A sit sphærois fluida oblata genita motu semi-ellipsis B A b circa axem minorem B b; et vertatur hæc sphærois circa eundem axem tali motu ut gravitas versùs sphæroidem hanc in polo A sit ad excessum quo gravitas in loco B superat vim centrifugam in B ex motu sphæroidis circa axem oriundam ut C B ad C A, fluidum fore ubique in æquilibrio. Unde sequitur figuram Terræ, quâtenus ex vi centrifugâ a motu diurno oriunda immuta-

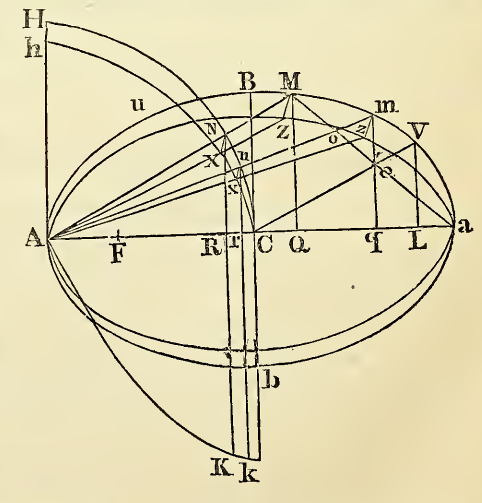


tur, esse sphæroidem oblatam qualis gignitur motu semi-ellipsis B a b circa axem minorem (si materia Terræ pro æqualiter densâ habeatur) semi-diametrum æquatoris esse ad semi-axem ut gravitas sub polis in Terram est ad excessum gravitatis supra vim centrifugam sub æquatore, corpus in loco quovis P tendere versùs Terram vi quæ est semper ut recta P L perpendicularis ellipsi generatrici et axi majori occurrens in L, et mensuram denique gradûs in meridiano esse semper ut cubus ejusdem rectæ P L. Hæc omnia accuratè demonstrantur ex hac Propositione; quæ quamvis in disquisitione de figurâ Terræ eximii usûs sint, hic obiter tantum monere convenit.



LEMMA V.

Sit figura quævis A B a: describatur circulus C N H centro A, radio quovis dato A C; ex A educatur recta quævis A M occurrens figuræ A B a in M, et circulo in N; sint M Q et N R perpendiculares in axem datum A a, sit K R semper æqualis abscissæ A Q, et vis quâ particula A urgetur versùs solidum motu figuræ A B a circa axem A a genitum, erit ut area quam generat ordinata K R directè et radius A C inversè.



Occurrat alia recta ex A educta figuræ in m et circulo in n, sintque m q et n r normales in axem A a. Sit A Z z a alia sectio solidi per axem, cui occurrant plana A M Z, A m z ipsi A M a normalia in rectis A Z, A z, quæ circulum radio A C in plano A Z z a descriptum secent in X et x; denique arcus M o circularis centro A descriptus occurrat A m in o. His positis, minuatur angulus contentus planis A M a, A Z a, et simul angulus M A m donec evanescant, et ultima ratio vis quâ particula A tendit

ad piramidem A M Z z m ad vim quâ urgetur versùs piramidem A N X x n erit rectæ A M ad A N, vel A Q ad A R, per Lem. II. vis hujus piramidis est ut vis superficiei N X x n in rectam A N, adeóque ut $\frac{N X \times N n}{A N^2} \times A N = \frac{N X \times N n}{A N}$, vel ut $\frac{N R \times N n}{A N}$ (quoniam N X est ut N R) i. e. ut R r; ejusdemque vis ad directionem axis reducta ut R r $\times \frac{A R}{A N}$; quare vis piramidis A M Z z m ad eandem directionem reducta R r $\times \frac{A Q}{A C} = \frac{R r \times K R}{A C}$. Vis igitur quâ particula A urgetur versùs frustum solidi planis A M a, A z a contenti, est ut area quam generat ordinata K R directè et radius A C inversè; cùmque solidum sit rotundum, motu scilicet figuræ circa axem A a genitum, par erit ratio vis quâ particula urgetur versùs integrum solidum.

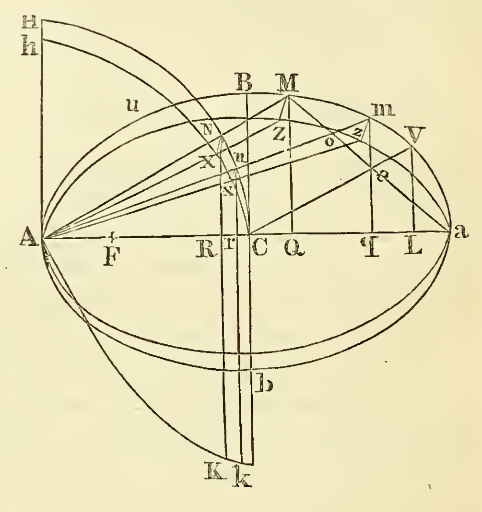
Cor. Vis quâ particula A urgetur in solidum est ad vim quâ urgetur versùs sphæram super diametrum A a descriptam ut area quam generat ordinata K R ad $\frac{2}{3}$ C A^2. Quippe si A M a sit circulus, erit A Q ad A a ut A Q^2 ad A M^2, vel A R^2 ad A N^2. Unde in hoc casu erit K R $= \frac{2 A R^2}{A C}$, et area A R K (quam generat ordinata K R) $= \frac{2 A R^3}{3 A C}$, adeóque area tota motu ordinatæ R K genita erit $\frac{2}{3}$ C A^2.

PROPOSITIO II.—PROBLEMA.

Invenire gravitatem particulæ A in extremitate axis transversi sitæ versùs sphæroidem oblongam.

Cæteris manentibus ut in Lemmate præcedenti sit A M a ellipsis, A a axis transversus, C centrum, B b axis conjugatus, F focus; educatur recta quævis A M ex A ellipsi occurrens in M, cui parallela C V occurrat ellipsi in V; unde ducatur ordinata ad axem V L, juncta a M rectæ C V occurrat in e, eritque A M = 2 C e: cúmque A Q : C L : : A M (2 C e) : C V : : 2 C L : C a, erunt $\frac{1}{2}$ A Q, C L et C A continuè proportionales. Sit C A = a, C B = b, C F = c, A R = x, C L = l,

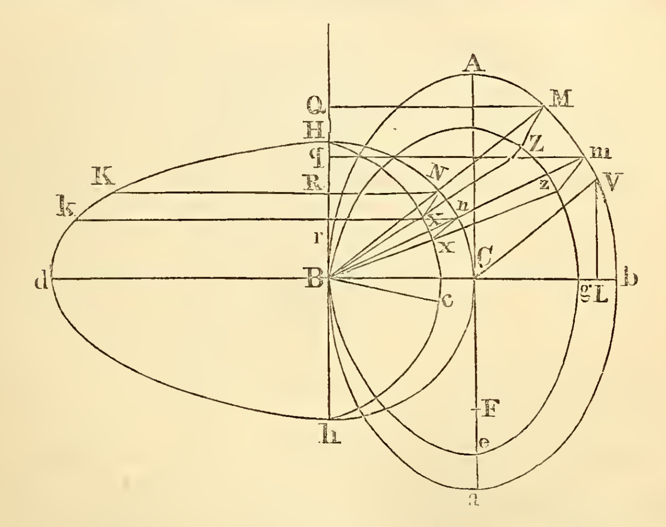
cùmque $AR^2 : NR^2 :: CL^2 : VL^2$ erit $x^2 : a^2 - x^2 :: l^2 : \overline{a^2 - l^2} \times \frac{b^2}{a^2}$; adeóque $l^2 = \frac{a^2 b^2 x^2}{a^4 - c^2 x^2}$ et A Q vel K R $= \frac{2ab^2x^2}{a^4 - c^2x^2}$, area A R K $= \int \frac{2ab^2x^2dx}{a^4 - c^2x^2} =$ (si $z : x :: c : a$) $\int \frac{2a^2b^2}{c^3} \times \frac{z^2dz}{a^2 - z^2}$. Quare sit a quantitas cujus logarithmus evanescit, sive systematis logarithmici modulus, l logarithmus quantitatis $a\sqrt{\frac{a+z}{a-z}}$, eritque A R K $= \frac{2a^2b^2}{c^3} \times \overline{l - z}$. Unde vis quâ particula A gravitat versùs solidum genitum motu segmenti elliptici A u M A circa axem A a, erit ad vim quâ eadem particula gravitat versùs solidum genitum motu segmenti circularis ex circulo supra diametrum A a descripti eadem recta A M abscissi circa eundem axem ut $\frac{2a^2b^2}{c^3} \times \overline{l - z}$ ad $\frac{2x^3}{3a}$, et si L sit logarithmus quantitatis $a\sqrt{\frac{a+c}{a-c}}$ (vel $\frac{a}{b} \times \overline{a+c}$) erit vis quâ particula A tendit versùs totam sphæroidem ad vim quâ tendit versùs totam sphæram ut $3b^2 \times \overline{L - c}$ ad c^3.



Schol. Eadem ratione invenitur gravitas particulæ in polo sitæ versùs sphæroidem oblatam, quærendo aream cujus ordinata est $\frac{2b^2a^2}{c^3} \times \frac{z^2}{b^2 + z^2}$. Sit B A b a sphærois oblata motu ellipsis B A b circa axem minorem genita, centro B, radio B C describatur arcus circuli C S, rectæ B F occurrens in S, eritque gravitas in hanc sphæroidem in polo B ad gravitatem in eodem loco versùs sphæram super diametrum B b descriptam ut $3CA^2 \times \overline{CF - CS}$ ad CF^3. Methodus verò quâ gravitas particulæ in æquatore sitæ versùs sphæroidem oblongam vel oblatam computatur, est minùs obvia, facilis tamen evadit ope sequentis Lemmatis.

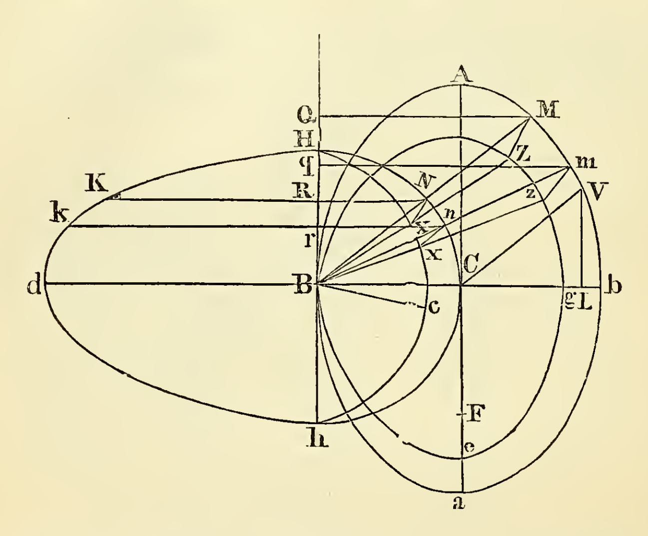
LEMMA VI.

Duo plana B M b a B, B Z g e B se mutuò secent in recta H B h communi figurarum tangente, auferantque ex solido frustum B M b a B z g e B; sint semi-circuli H C h, H c h sectiones horum planorum et superficiei sphæræ centro B, radio B C descriptæ. Ex puncto B educatur recta quævis B M in priori plano figuræ B M b a occurrens in M, et semi-circulo H C h in N; sintque M Q et N R normales in H h, et ordinata K R semper æqualis rectæ M Q. His positis, si angulus C B c planis hisce contentus minuatur in infinitum, erit gravitas particulæ B versùs frustum B M b a B Z g e B ultimò ad gravitatem ejusdem particulæ versùs frustum sphæræ semi-circulis H C h, H c h contentum, ut area H K d h genita motu ordinatæ K R ad semi-circulum H C h.



Sit m punctum in figurâ B M B, ipsi M quàm proximum jungatur B m quæ circulo H C h occurrat in n; sitque n r normalis in H h. Ad hæc sint plana B M Z, B m z perpendicularia plano B M b a, secentque planum alterum B Z g e in rectis B Z, B z circumferentiæ H c h occurrentibus in X et x. His positis, vis quâ particula B gravitat in pyramidem B M Z z m erit ad vim quâ eadem particula gravitat in pyramidem B N X x n ultimò ut recta B M ad B N, vel M a ad N R per Lem. III. Gravitas autem in hanc pyramidem est ut $\frac{NX \times Nn}{BN^2} \times BN$, vel (quoniam N X est ut N R) ut $\frac{NR \times Nn}{BC}$, i. e. ut R r; atque hæc gravitas

agit secundùm rectam B b vi quæ est $\frac{Br \times RN}{BC}$; unde gravitas in pyramidem B M Z z m agit secundùm rectam B b vi quæ est ut $\frac{Rr \times MQ}{BC}$, vel $\frac{Rr \times KR}{BC}$. Proinde ultima ratio virium quibus particula B urgetur versùs integra frusta solidi et sphæræ B C, est ratio areæ H K d h (quam generat ordinata K R) ad semi-circulum H C h.



Cor. Gravitas in frustum planis B M b a, B Z g e terminatum, est ad gravitatem in frustum sphæricum contentum circulis super diametros B b, B g descriptis, ut area H K d h ad $\frac{8}{3}$ C B². Sit enim B M B b circulus, eritque M Q ad B b, ut R N² ad B C², et $KR = \frac{2RN^2}{CB} = 2BC^2 - \frac{2BR^2}{CB}$, et area H K d B $= \frac{4}{3}$ C B² adeóque area tota H K d h $= \frac{8}{3}$ C B².

PROPOSITIO III.—PROBLEMA.

Invenire gravitatem particulæ in æquatore sitæ versùs sphæroidem oblongam.

Per æquatorem intelligimus circulum ab axe conjugato genitum dum figura circa alterum axem revolvitur. Repræsentet B M b a in figurâ

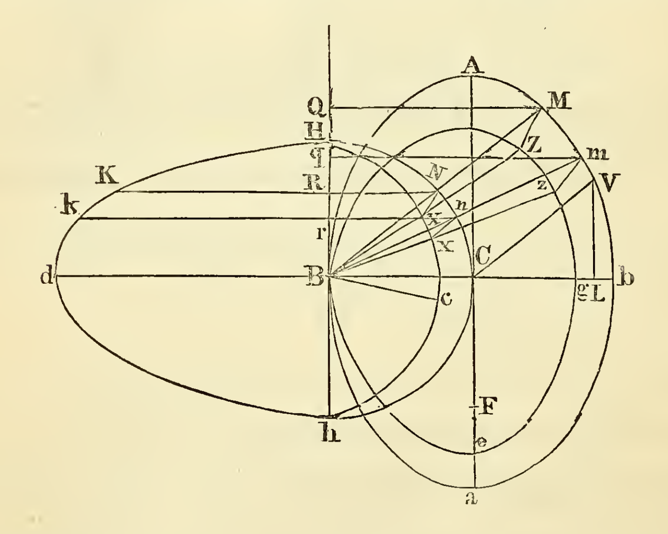
præcedentis Lemmatis, sectionem quamvis sphæroidis æquatoris plano normalem, eritque hæc figura semper similis sectioni per polos solidi, seu figuræ cujus revolutione solidum genitum esse supponimus. Hujus demonstrationem ut facilem et ab aliis traditam brevitatis gratiâ omitto. Sit igitur C A sectionis hujus semi-axis transversus, C B semi-axis conjugatus, F focus; sit C B = b, C A = a, C F = c, B R = x, C V semi-diameter parallela rectæ B M, V L ordinata ad axem B b, C L = l. Tunc C B : C L :: C L : $\frac{1}{2}$ M Q ut in Proposit. præcedenti, et M Q $= \frac{2l^2}{b}$. Verùm N R^2 : B R^2 :: C L^2 : V L^2 i. e. $b^2 - x^2 : x^2 :: l^2 : \overline{b^2 - l^2} \times \frac{a^2}{b^2}$, vel $a^2 - \frac{a^2x^2}{b^2} : x^2 :: l^2 : b^2 - l^2$, et $l^2 = \frac{a^2b^2 \times \overline{b^2 - x^2}}{a^2b^2 - c^2x^2} =$ (si z : x :: c : b) $\frac{b^2a^2}{c^2} \times \frac{c^2 - z^2}{a^2 - z^2}$, et K R = M Q $= \frac{2l^2}{b} = \frac{2a^2b}{c^2} \times \frac{c^2 - z^2}{a^2 - z^2}$, et area B d K R æqualis $\int \frac{2a^2b^2dz}{c^3} \times \frac{c^2 - z^2}{a^2 - z^2} = \frac{2a^2b^2z}{c^3} - \int \frac{2a^2b^2}{c^3} \times \frac{b^2dz}{a^2 - z^2}$. Sit igitur l (ut in priore Propositione) logarithmus quantitatis $a\sqrt{\frac{a+z}{a-z}}$, et area B d K R erit $\frac{2a^2b^2z}{c^3} - \frac{2a^2b^2}{c^3} \times \frac{b^2l}{a^2} = \frac{2b^2}{c^3} \times \overline{a^2z - b^2l}$.

Supponantur nunc x = b, adeóque z = c; sitque L logarithmus quantitatis $a\sqrt{\frac{a+c}{a-c}}$, ut priùs, eritque area tota H K d h, motu ordinatæ K R genita, æqualis $\frac{4b^2}{c^3} \times \overline{a^2c - b^2L}$. Quare gravitas particulæ B versùs frustum planis ellipticis B M b a, B Z g e terminatum erit ultimò ad gravitatem in frustum iisdem planis contentum a sphærâ centro C radio C B descriptâ resectum, ut $a^2c - b^2L$ ad $\frac{2}{3}c^3$ per Cor. Lem. VI. Sit circulus B P p b æquator sphæroidis, B P et B p duæ quævis chordæ hujus circuli; sectiones sphæroidis circulo B P b perpendiculares erunt ellipses similes sectioni quæ per polos solidi transit, quarum B P et B p erunt axes transversi; sectiones autem sphæræ super diametrum B b descriptæ per eadem plana erunt circuli quorum diametri erunt chordæ B P, P p. Proinde eadem semper erit ratio gravitatis particulæ B in frusta elliptica et sphærica his planis terminata; eritque gravitas versùs integram sphæroidem ad gravitatem versùs sphæram, ut $a^2c - b^2L$ ad $\frac{2}{3}c^3$, a denotante semi-axem tranversum figuræ cujus motu gignitur soli-

dum, b semi-axem conjugatum, c distantiam foci a centro, et L, logarithmum ipsius a $\sqrt{\frac{a + c}{a - c}}$ vel $a \times \frac{a + c}{b}$. Q. e. f.

Cor. Eadem semper est ratio gravitatis versùs frustum quodvis sphæroidis et frustum sphæræ eodem plano ad æquatorem normali abscissum ab eâdem parte plani; vel gravitas in portionem a sphæroide hoc plano abscissam est ad gravitatem in integram sphæroidem, ut gravitas in frustum sphæræ eodem plano ex eâdem parte abscissum ad gravitatem in integram sphæram.

Schol. Eâdem ratione si B A b a sit sphærois oblata motu figuræ B A b circa axem minorem B b genita, erit gravitas in sphæroidem hanc in loco



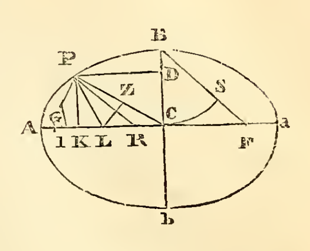
A ad gravitatem in eodem loco versùs sphæram centro C radio C A descriptam, ut $CA^2 \times CS - CB^2 \times CF$ ad $\frac{2}{3} CF^2$.

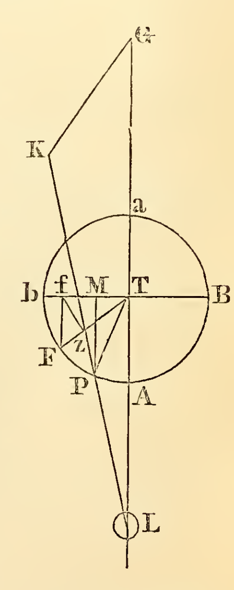
PROPOSITIO IV.—PROBLEMA.

Ex datis viribus quibus Terræ particulæ gravitant versùs Solem et Lunam, invenire figuram quam Terra indueret in syzygiis vel quadraturis Solis et Lunæ in hypothesi quòd Terra constet ex fluido homogeneo, et circa axem suum non moveatur.

Gravitas in loco A versùs sphæroidem oblongam motu figuræ A B a circa axem transversam A a genitam, est ad gravitatem in eodem loco versùs sphæram centro C radio C A descriptam, ut $3 b^2 \times \overline{L - c}$ ad c^3

per Prop. II. Hæc autem gravitas est ad gravitatem in B versùs sphæram centro C radio C B descriptam, ut C A at C B (per Cor. 1. Lem. III.) quæ est ad gravitatem in loco B versùs sphæroidem ut $\frac{2}{3}$ c^3 ad $a^2 c - b^2 L$ per Prop. IV. Componantur hæ rationes, eritque gravitas in loco A versùs sphæroidem ad gravitatem in loco B versùs eandem, ut $2 a b \times \overline{L - c}$ ad $a^2 c - b^2 L$. Designet A gravitatem in loco A, B gravitatem in loco B, V summam virium quibus luminaria conjuncta vel opposita aquam deprimunt in rectis T B, T b perpendicularibus rectæ A a quæ per Terræ et luminarium centra transire supponitur, ut in Cor. 4. Prop. I. vel differentiam earumdem virium in Lunæ quadraturis, ut in Cor. 5. ejusdem Prop. et per ea quæ demonstrantur Cor. 1. Prop. I. erit $A a - B b = \frac{2 a^2 V + b^2 V}{d}$. Adeóque $A a - b A \times \frac{a^2 c - b^2 L}{2 a b \times \overline{L - c}} = \frac{2 a^2 V + b^2 V}{d}$, et $V : A :: 2 a^2 L + b^2 L - 3 a^2 c : \frac{2 a}{d} \times \overline{2 a^2 + b^2} \times \overline{L - c}$. Atque ex datâ ratione V ad A vel ad B, vel $\frac{1}{2}$ A + $\frac{1}{2}$ B (quæ pro G gravitate mediocri in circumferentiâ A B a b haberi potest) habebimus æquationem unde species figuræ et differentia semi-axium seu ascensus aquæ computari possunt.





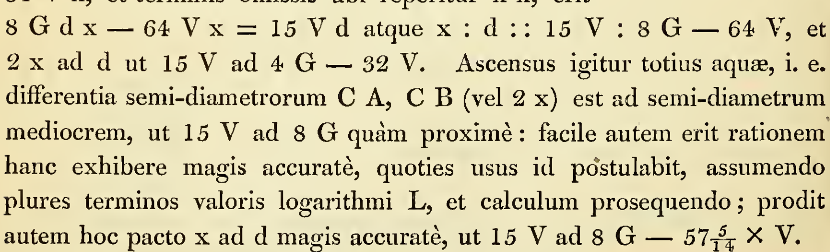
Est autem L logarithmus quantitatis $a \sqrt{\frac{a + c}{a - c}}$ adeóque æqualis $c + \frac{c^3}{3 a^2} + \frac{c^5}{5 a^4} + \frac{c^7}{7 a^6}$, &c. per methodos notissimas, adeóque $L - c = \frac{c^3}{3 a^2} + \frac{c^5}{5 a^4} + \frac{c^7}{7 a^6}$, &c. Unde est V ad A, ut $\frac{2 c^2}{15 a^2} + \frac{4 c^4}{35 a^4} + \frac{6 c^6}{63 a^6}$, &c. ad $\frac{\overline{L - c} \times a d}{c^3 \times \overline{2 a^2 + b^2}}$, et V ad $\frac{1}{2}$ A + $\frac{1}{2}$ B vel G, ut $\frac{2 c^2}{15 a^2} + \frac{4 c^4}{35 a^4} + \frac{6 c^6}{63 a^6}$, &c. ad $\frac{2 a^2 + b^2}{2 b d c^3} \times \overline{2 a b L - b^2 L + a^2 c - 2 a b c}$.

Verùm si V sit admodum exigua respectu gravitatis G (ut in præsenti casu) erit differentia semi-diametrorum C A, C B ad semi-diametrum

mediocrem quàm proximè ut 15 V ad 8 G, vel paulò accuratiùs ut 15 V ad 8 G — $57\frac{5}{14}$ × V. Sit enim ut in Cor. 2. Prop. I. $a = d + x$, $b = d - x$, adeóque $c^2 = a^2 - b^2 = 4\,d\,x$, eritque $A : B :: 2\,a\,b \times L - c : a^2 c - b^2 L :: \frac{b}{3} + \frac{b\,c^2}{5\,a^2} + \frac{b\,c^4}{7\,a^4}$, &c. : $\frac{a}{3} + \frac{a\,c^2}{15\,a^2} + \frac{a\,c^4}{35\,a^4}$, &c. i. e. ut

$$\frac{d-x}{3} + \frac{4\,d\,x \times \overline{d-x}}{5 \times \overline{d+x}|^2} + \frac{16\,d^2 x^2 \times \overline{d-x}}{7 \times \overline{d+x}|^4}, \text{ \&c. ad}$$

$$\frac{d+x}{3} + \frac{4\,d\,x \times \overline{d+x}}{15 \times \overline{d+x}|^2} + \frac{16\,d^2 x^2 \times \overline{d+x}}{35 \times \overline{d+x}|^4}, \text{ \&c.}$$



adeóque (neglectis terminis, quos plures dimensiones ipsius x ingrediuntur) ut $\frac{1}{3}\,d + \frac{17}{15}\,x : \frac{1}{3}\,d + \frac{19}{15}\,x$. Proinde erit $B - A$ ad $B + A$ ($= 2\,G$) $:: x : 5\,d + 18\,x$, et $B - A : G :: 2\,x : 5\,d + 18\,x$. Sed per Cor. 2. Prop. I. est x ad d ut $B - A + 3\,V$ ad $B + A - 2\,V$, adeóque substituendo valores quantitatum $B - A$ et $B + A$, erit $x : d :: \frac{2\,G\,x}{5\,d + 18\,x} + 3\,V : 2\,G - 2\,V$. Unde $2\,G\,x - 2\,V\,x = \frac{2\,G\,d\,x + 15\,V\,d + 54\,V\,x}{5\,d + 18\,x}$, et $10\,G\,d\,x - 10\,d\,V\,x + 36\,G\,x\,x - 36\,V\,x\,x = 2\,G\,d\,x + 15\,V\,d + 54\,V\,x$, et terminis omissis ubi reperitur x x, erit $8\,G\,d\,x - 64\,V\,x = 15\,V\,d$ atque $x : d :: 15\,V : 8\,G - 64\,V$, et $2\,x$ ad d ut 15 V ad 4 G — 32 V. Ascensus igitur totius aquæ, i. e. differentia semi-diametrorum C A, C B (vel 2 x) est ad semi-diametrum mediocrem, ut 15 V ad 8 G quàm proximè: facile autem erit rationem hanc exhibere magis accuratè, quoties usus id postulabit, assumendo plures terminos valoris logarithmi L, et calculum prosequendo; prodit autem hoc pacto x ad d magis accuratè, ut 15 V ad 8 G — $57\frac{5}{14}$ × V.

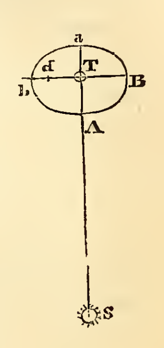
Cor. B — A est æqualis $\frac{3\,V}{4}$; et $B - G = \frac{3\,V}{8}$ quàm proximè. Quippe $B - A : G :: 2\,x : 5\,d :: 30\,V : 40\,G$, adeóque $B - A : V :: 3 : 4$.

Schol. Eâdem ratione patebit gravitatem versùs sphæroidem oblatam in polo B fore ad gravitatem in æquatore in loco quovis A, ut $2\,C\,B \times C\,A \times \overline{C\,F - C\,S}$ ad $C\,A^2 \times C\,S - C\,B^2 \times C\,F$.

PROPOSITIO V.—PROBLEMA.

Invenire vim V quæ oritur ex inæquali gravitate partium Terræ versùs Solem, et definire ascensum aquæ hinc oriundum.

Sit S Sol, T Terra, A B a b orbita lunaris neglectâ excentricitate, B et b quadraturæ. Designet S tempus periodicum Terræ circa Solem, L tempus periodicum Lunæ circa Terram, l tempus quo Luna circa Terram revolveretur in circulo ad distantiam mediocrem T d ($= \frac{1}{2}$ C A + $\frac{1}{2}$ C B) si motus Lunæ gravitate suâ versùs Solem nullâtenus turbaretur, et solâ gravitate versùs Terram in orbitâ retineretur. Designet porrò K gravitatem mediocrem Lunæ vel Terræ versùs Solem, g gravitatem Lunæ versùs Terram in mediocri suâ distantiâ, v vim quam actio Solis huic gravitati adjiceret in quadraturis ad eandem distantiam. His positis, erit v : K : : d T : S T; atque K : g : : $\frac{\text{S T}}{\text{S S}}$: $\frac{\text{d T}}{\text{l l}}$ ex vulgari doctrinâ virium centripetarum; unde v : g : : l l : S S : cùmque l l sit paulò minùs quàm L L, quoniam Luna nonnihil distrahitur a Terrâ gravitate suâ in Solem, patet vim v esse ad g in paulò minori ratione quàm L L ad SS. Hanc autem rationem vis v ad g nemo hactenus (quantùm novi) accuratè definivit; ea tamen propior videtur esse rationi L L ad S S + 2 L L vel saltem rationi L L ad S S + $\frac{3}{2}$ L L quàm rationi L L ad S S. Argumenta verò quibus id colligitur hîc omittenda censeo, moniti Academiæ illustrissimæ memor, cùm in hâc disquisitione parvi sit momenti quænam harum rationum adhibeatur. Supponamus igitur cum Newtono v : g : : L L : S S : : (per computos astronomicos periodorum Solis ac Lunæ) 1 : 178,725. Vis V quæ in Terræ superficie vi v respondet, est ad v, ut Terræ semi-diameter mediocris ad distantiam Lunæ mediocrem vel ut 1 ad $60\frac{1}{2}$. Vis autem g agit secundùm rectas, quæ in centro gravitatis Terræ ac Lunæ concurrunt, cujus ratione habitâ ex incremento gravitatis in descensu ad superficiem Terræ patebit vim V esse ad G (quâ gravitas mediocris in superficie Terræ designatur ut suprà) ut 1 ad 38604600. Unde cùm per Cor. 2. Prop. III. sit x : d : : 15 V : 8 G — $57\frac{5}{14}$ V erit in hoc casu x : d : : 1 : 20589116. Cúmque semi-diameter Terræ mediocris sit pedum 19615800; hinc sequitur totum aquæ ascensum ex vi Solis oriundum fore pedis unius Parisiensis cum $\frac{90545}{100000}$ partibus pedis, i. e. pedis unius cum digitis decem, et



$\frac{8654}{10000}$ partibus digiti; quem suo more breviter deprehendit Newtonus esse pedis unius, digitorum undecim cum $\frac{1}{30}$ parte digiti, quæ altitudo a nostrâ differt tantùm sextâ parte unius digiti.

Verùm in hoc calculo Terra supponitur esse sphærica, nisi quatenus a vi Solis mare elevatur. Sed si ascensum aquæ maximum quæramus, ponendum est Solem in circulo æquinoctiali versari, figuramque A B a b in hoc plano constitui, et augenda est vis V in ratione semi-diametri mediocris ad semi-diametrum Terræ maximum, et minuenda est vis G donec evadat æqualis gravitati sub æquatore: i. e. si figuram Terræ eam esse supponamus quam definivit Newtonus, augenda erit vis V in ratione 459 ad 460, et minuenda est G in eadem ferè ratione, quoniam vires gravitatis in superficie Terræ sunt inversè ut distantiæ locorum a centro; cùmque distantia d sit augenda in eâdem ratione, erit ascensus aquæ in æquatore augendus in ratione triplicata semi-diametri mediocris ad maximam, adeóque erit pedis unius, digitorum undecim cum 60ma circiter parte digiti. Terra autem altior est sub æquatore quàm prodiit calculo Newtoniano ex hypothesi quòd Terra sit uniformiter densa a superficie usque ad centrum; ut colligitur ex variis pendulorum observationibus, et præsertim ex mensurâ gradûs meridiani quam viri clarissimi nuper definiverunt accuratissimè sub circulo polari.

Schol. 1. Si gravitatem posuissemus æqualem in A et B, et ejusdem vis in totâ circumferentiâ A B a b, prodiisset x æqualis tantùm $\frac{3\ V\ d}{2\ G}$, et ascensus aquæ (seu 2 x) pedis unius, digitorum sex cum tertiâ circiter parte digiti. Quippe in hâc hypothesi prodiisset C A ad C B, ut G + V ad G — 2 V, adeòque x ad d, ut $\frac{3\ V}{2}$ ad G quàm proximè. Atque hinc apparet utilitas præcedentium Propositionum, cùm ascensus aquæ secundùm hanc minùs accuratam hypothesim minor sit ascensu quem in hâc Propositione definivimus, differentiâ $\frac{3\ V\ d}{4\ G}$, quartâ scilicet parte ascensus illius.

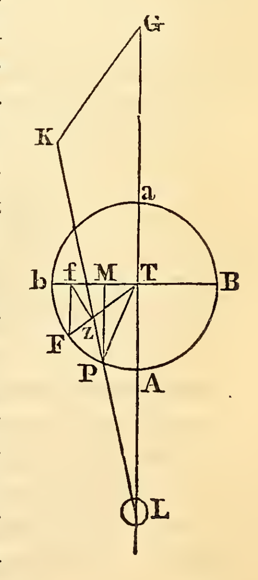
Schol. 2. Ex hac doctrinâ patet satellites Jovis Soli et sibi mutuò conjunctos vel oppositos in oceano joviali (si ullus sit) ingentes motus excitare debere, modò non sint Lunâ nostrâ multò minores; cùm diameter Jovis ad distantiam cujusque satellitis multò majorem habeat rationem quàm diameter Terræ ad distantiam Lunæ. Verisimile est mutationes

macularum Jovis ab astronomis observatas hinc aliquâ saltem ex parte ortum ducere; quòd si hæ mutationes eam analogiam servare deprehendantur cum aspectibus satellitum, quam hæc doctrina postulat, indicio erit veram earum causam hinc esse petendam. Ex hâc doctrinâ licet quoque conjicere non absque utilitate, motus satellitum circa axes suos et circa primarios ita compositos esse ut idem hemispherium suis primariis semper ostendant, secundùm sententiam celeb. astronomorum. Verisimile enim est motus maris nimios in satellitibus cieri deberi, si cum aliâ quâvis velocitate circa axes suos revolverentur; aquis autem in his agitandis (si quæ sint) sufficere possunt æstus ex variis satellitum distantiis a suis primariis oriundis.

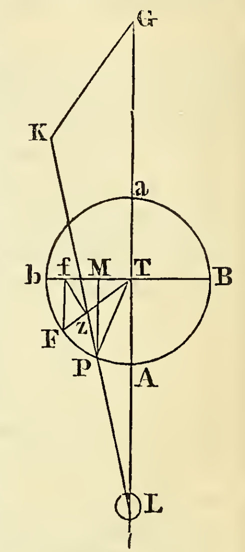
SECTIO IV.

De motu maris quâtenus ex motu Telluris diurno aliisve de causis immutatur.

Ostendimus in Sectione præcedenti Terram fluidam versùs Solem vel Lunam inæqaliter gravem sphæroidis oblongæ figuram induere debere; cujus axis transversus per centrum luminaris transiret, si Terra non revolveretur circa axem suum motu diurno; et ascensum aquæ in hypothesi Terræ quiescentis ex vi Solis oriundum definivimus. Verùm ob motum Terræ diversa est ratio æstûs maris. Hinc enim aqua nunquam fit in æquilibrio, sed perpetuis motibus agitatur. Supponamus Solem et Lunam conjunctos vel oppositos versari in plano æquatoris A B a b; sit A a diameter quæ per illorum centra transit, B b huic perpendicularis. Dum aquæ moles revolvitur motu diurno, augentur vires quibus ascensus ejus promovetur in transitu aquæ a locis b et B ad A et a, et in his locis evadunt maximæ; ascensus tamen aquæ prorogari videtur, postquàm hæ vires minui cœperunt usque ferè ad loca ubi hæ vires æquipollent viribus quibus deprimitur infra altitudinem quam naturaliter obtineret, si nullâ vi extraneâ motus aquæ perturbaretur; adeò ut motus aquæ considerari possit tanquam libratorius, et tantundem ferè ascendat viribus quibus elevatur decrescentibus, quàm iisdem crescentibus.



Cúmque vis centrifuga ex motu diurno orta sit multò minor gravitate, situs loci F ubi prædictæ vires æquipollent sub æquatore, dum aqua transit a loco b ad locum A, sic ferè definiri posse videtur. Ex puncto F sit F f normalis in B b, et f z in T F. Designet V summam virium quibus Sol et Luna aquam deprimunt in rectis T B, T b ut suprà, et vis quâ aqua tollitur in F erit $\frac{3 V \times F z}{d} = \frac{3 V \times F f^2}{d \times T F}$.



Supponamus F esse locum aquæ ubi altitudo aquæ fit minima, ut T F haberi possit pro semi-axe conjugato figuræ A B a b, dicatur gravitas in extremitate hujus axis B, et gravitas mediocris in hac figurâ G, ut suprà; et vis quâ aqua deprimitur infra situm naturalem in loco F erit $B - A + \frac{V \times T F}{d}$. Ponantur hæ vires æquales, cúmque T F sit quàm proximè æqualis distantiæ d, sitque $B - G = \frac{3 V}{8}$ per Cor. Prop. IV. erit $\frac{3 V}{8} + V = \frac{3 V \times F f^2}{d^2}$, seu $T F^2 : F f^2 :: 3 : 1 + \frac{3}{8} :: 24 : 11$. Unde angulus F T b erit graduum 42 minutorum 37, incidetque ferè in punctum medium inter b et A. Hunc verò calculum ut accuratum non proponimus.

PROPOSITIO VI.—PROBLEMA.

Motum maris ex vi Solis oriundum, et motum lunarem in orbitâ quàm proximè circulari inter se comparare, et hinc ascensum aquæ æstimare.

Astronomis notissimum est Lunæ distantiam mediocrem in syzygiis minorem esse distantiâ mediocri in quadraturis. Clariss. Halleyus ex observationibus colligit distantiam priorem esse ad posteriorem ut $44\frac{1}{2}$ ad $45\frac{1}{2}$. Newtonus methodo quâdam suâ harum rationem invenit esse eam 69 ad 70: Princip. Prop. XXVIII. Lib. III. Clarissimus auctor Tractatûs de Motibus Lunæ secundùm Theoriam gravitatis, in hac doctrina optimè versatus, colligit eam esse numeri 69 ad 70; ratione non habitâ decrementi gravitatis dum Luna transit a syzygiis ad quadraturas. Ut motus maris ex vi Solis oriundus (qualis suprà definitur Prop. V.) cum

motu Lunæ conferatur, supponamus orbem lunarem aquâ compleri, et quæramus ascensum hujus aquæ per Prop. IV. et V. In Prop. V. erat vis v ad g, ut 1 ad 178, 725; quare in hoc casu foret x : d :: 15 v : 8 g — $57\frac{5}{14}$ × v :: 1 : 91,496: adeóque semi-axis figuræ ad semi-axem conjugatum (vel d + x ad d — x) ut 46,248 ad 45,248; quæ ferè congruit cum ratione distantiarum Lunæ in quadraturis et syzygiis quam Halleyus ex observationibus deducit; adeò ut figura orbitæ lunaris specie vix diversa sit ab eâ quam globus aqueus quiescens Lunæ orbitam complens ex vi Solis indueret; forent tamen positione diversæ, siquidem illius axis minor Solem respiciat, hujus axis major versùs Solem dirigeretur. Ratio numeri 59 ad 60 (quarum semi-differentia est ad semi-summam ut 3 v ad g quàm proximè) probè congruit cum ratione semi-axium figuræ quam aqua ex vi Solis indueret, si vis gravitatis eadem esset per totam circumferentiam A B a b, ut ostendimus in Schol. 1. Prop. V. Ascensus autem aquæ Prop. V. definitus congruit cum eâ quam ex observationibus colligit Halleyus; unde suspicari licet differentiam diametrorum orbitæ lunaris paulò fieri majorem ex decremento gravitatis Lunæ in Terram dum transit a syzygiis ad quadraturas, simili ferè ratione quâ ascensus aquæ prodiit in hâc Propositione major propter excessum gravitatis aquæ in Terram in loco B supra ipsius gravitatem in loco A aliisque a centro distantiis. Verùm quidquid si judicandum de ratione diametrorum orbitæ lunaris, ex his colligere licet ascensum aquæ Prop. V. definitum majorem vix evadere propter motum Terræ diurnum circa axem suum. Supponamus enim hunc motum augeri donec vis centrifuga ex hoc motu oriunda fiat æqualis gravitati, et particulæ maris revolvantur ad morem satellitum in orbitis quàm proximè circularibus Terram contingentibus. Hæ orbitæ erunt ellipticæ, quarum axes minores productæ transibunt per Solem. Et si semi-axium differentia sit ad semi-diametrum mediocrem ut 3 V ad G (secundùm ea quæ de motibus lunaribus tradit vir acutissimus) erit minor ascensu aquæ suprà definito Prop. V. in qua invenimus 2 x esse ad d ut 15 V ad 4 G. Quòd si quæramus horum semi-axium differentiam ex figura orbitæ lunaris quâtenus ex observationibus innotescit secundùm claris. Halleyum, parum admodum superabit ascensum aquæ suprà definitum. Nec mirum si non accuratè conveniant, cùm gravitas Lunæ versùs Terram sequatur rationem inversam duplicatam distantiarum, gravitas aquæ major quoque sit in majori distantiâ, sed non in eâdem ratione. Cùm hæc phænomena sint analoga, et sibi mutuò aliquam lucem afferant, hæc de iis inter se collatis memorare videbatur operæ prætium. Supponimus tamen hîc aquæ motum in

eodem circulo æquatori parallelo perseverare, vel latitudinem eandem in singulis revolutionibus servare, et variationem ascensûs aquæ, quæ ex figurâ sphæroidicâ Terræ provenit, non consideramus.

PROPOSITIO VII.

Motus aquæ turbatur ex inæquali velocitate, quâ corpora circa axem Terræ motu diurno deferuntur.

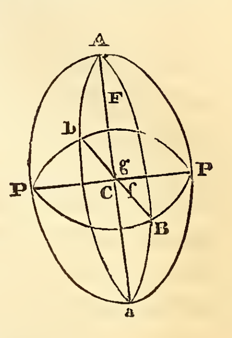
Quippe si aquæ moles feratur æstu, vel aliâ de causâ, ad majorem vel minorem ab æquatore distantiam, incidet in aquam diversâ velocitate circa axem Terræ latam; unde illius motum turbari necesse est. Differentia velocitatum quibus corpora, exempli gratiâ, in loco 50^{gr}. ab æquatore dissito, et in loco 36 tantùm milliaria magis versùs septentrionem vergente, major est quàm quâ 7 milliaria singulis horis describeretur, ut facili calculo patebit. Cùmque motus maris tantus nonnunquam sit ut æstus 6 milliaria, vel etiam plura singulis horis describat, effectus qui hinc oriri possunt non sunt contemnendi.

Si aqua deferatur a meridie versùs septentrionem motu generali æstûs, vel aliâ quâvis de causâ, cursus aquæ hinc paulatim deflectet versùs orientem, quoniam aqua priùs ferebatur motu diurno versùs hanc plagam majori velocitate quàm est ea quæ convenit loco magis versùs boream sito. Contrà si aqua a septentrione versùs meridiem deferatur, cursus aquæ ob similem causam versùs occidentem deflectet. Atquè hinc varia motûs maris phænomena oriri suspicamur. Hinc forsitan, exempli gratiâ, montes glaciales quæ ex Oceano Boreali digrediuntur, frequentiùs conspiciuntur in occidentali quàm orientali Oceani Atlantici plagâ. Quin et majores æstus hinc cieri posse in pluribus locis quàm qui ex calculo virium Solis et Lunæ prodeunt, habitâ ratione latitudinis, verisimile est. Eandem causam ad ventos præsertim vehementiores propagandos, et nonnunquam augendos vel minuendos, aliaque tum aëris tum maris phænomena producenda conducere suspicamur. Sed hæc nunc sigillatim prosequi non licet.

PROPOSITIO VIII.—PROBLEMA.

Invenire variationem ascensûs aquæ in Prop. V definiti, quæ ex figurâ Terræ sphæroidicâ provenit.

Sint P A p a, P B p b sectiones Terræ per polos P et p, quarum prior transeat per loca A et a, ubi altitudo aquæ in æquatore viribus Solis et Lunæ fit maxima, posterior per loca B et b ubi fit minima; sint hæ sectiones ellipticæ, F focus figuræ P A p a, f focus sectionis P B p b, et g focus sectionis A B a b. Et si omnes sectiones solidi per rectam A a transeuntes supponantur ellipticæ calculo inito ope Lemmatis V. invenimus gravitatem in loco A versùs solidum hoc fore ad gravitatem in eodem loco versùs sphæram centro C super diametrum A a descriptam ut $1 + \frac{3\,CF^2 + 3\,Cg^2}{10\,CA^2} + \frac{9\,CF^4 + 6\,CF^2 \times Cg^2 + 9\,Cg^4}{56\,CA^4}$, &c. ad $\frac{CA^2}{CB \times CP}$; et si gravitas in loco B, definiatur simili calculo, ope ejusdem Lemmatis et schol. Prop. II. constabit ratio gravitatis in A ad gravitatem in B, et per Cor. 2. Prop. I. innotescet semi-diametrorum C A et C B differentia sive ascensus aquæ. Verùm calculum utpotè prolixum omittimus, cùm sit exigui usûs. Hâc Propositione ostendere tantùm volui geometriam nobis non defuturam in Problemate celeberrimo accuratissimè tractando. Verùm restat præcipuus in hac disquisitione nodus, de quo pauca sunt addenda.



PROPOSITIO IX.—PROBLEMA.

Invenire vim Lunæ ad mare movendum.

Hæc ex motibus cœlestibus colligi nequit, si verò conferetur ascensus aquæ in syzygiis luminarium, qui ex summâ virium Solis et Lunæ generatur, cum ejusdem ascensu in quadraturis, qui ex earundem differentia oritur, ex vi Solis per Prop. V. datâ, invenietur vis Lunæ. Hanc quærit Newtonus ex observationibus a Sam. Sturmio ante ostium Fluvii Avonæ institutis, ex quibus colligit ascensum aquæ in syzygiis æquinoctialibus esse ad ascensum aquæ in quadraturis iisdem, ut 9 ad 5. Dein post varios calculos concludit vim Lunæ esse ad vim Solis, ut 4.4815 ad 1,

et ascensum aquæ ex utrâque vi oriundum in distantiis luminarium mediocribus fore pedum 50 cum semisse. Harum virium rationem ex observationibus a celeb. Cassini in loco suprà citato allatis quæsivimus. Verùm cùm præter generales causas jam memoratas quarum aliquæ ad calculum vix revocari possunt, aliæ variæ ex locorum situ, vadorum indole, ventorum vi et plagâ pendentes, æstus maris nunc majores, nunc minores reddant, non est mirum si vires Lunæ quæ prodeunt ex observationibus in locis diversis, vel in eodem loco diversis tempestatibus institutis non planè consentiant. Computis igitur quos de motu maris ex vi Lunæ oriundo instituimus recensendis impræsentiarum non immorabimur. Postquam verò observationes aliquæ circa æstus maris ad littora Americæ et Indiæ Orientalis quas expectamus, ad manus pervenerint, de hisce forsan certiùs judicemus. Observamus tantùm æstus in minori ratione decrescere videri quàm duplicatâ sinus complementi declinationis; quin et reliquæ æstûs leges generales ex motu aquæ reciproco perturbantur. Sed veremur ne tædium pariat, si repetamus quæ ab aliis jamdudum tradita sunt. Æstus anomali a locorum et marium situ plerumque pendere videntur. Observandum tamen ex theoriâ gravitatis sequi, unicum tantùm æstum spatio 24 horarum contingere nonnunquam debere in locis ultra 62 gradum latitudinis, si reciprocatio motûs aquæ id permitteret. *

Quòd si analysis diversarum causarum quæ ad æstus phænomena producenda conferunt, accuraté institui posset, id certè ad uberiorem scientiam virium et motuum systematis mundi non parum conferret. Hinc enim situs centri gravitatis Lunæ et Terræ, et quæ ad æquinoctiorum præcessionem aliaque phænomena naturæ insignia spectant, certiùs innotescerent. Quas ob causas ascensûs aquæ quantitatem, quousque ex motibus cœlestibus eam assequi licet, accuratè definiendam et demonstrandam, positis legibus gravitatis quæ ex observationibus deducuntur (de cujus causâ hîc non est disserendi locus) putavimus. Cogitata autem hæc qualiacunque judicio illustrissimæ Academiæ Regiæ, quam omni honore et reverentiâ semper prosequimur, lubenter submittimus.

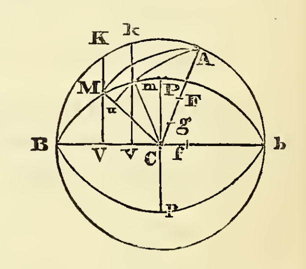
* Sit enim Lunæ declinatio 28 gr. et loci ultra 62 gr. versùs eandem plagam, et manifestum est Lunam semel tantùm 24 horarum spatio loci hujus horizontem attingere.

Annotanda in Dissertationem de Causâ Physicâ Fluxûs et Refluxûs Maris, cui præfigitur sententia, *Opinionum commenta delet dies, naturæ judicia confirmat.*

1. In Prop. IV. invenitur $x = \frac{15\ V\ d}{8\ G}$ quàm proximè, qui valor ipsius x est satis accuratus, nec ullâ correctione indiget præsertim in calculo Prop. V. Est autem magis accuratè x ad d ut 15 V ad 8 G — $\frac{88}{7}$ V non ut 15 V ad 8 G — $\frac{803}{14}$ V sive 8 G — 57 $\frac{5}{14}$ V ut lapsu quodam calami aut calculi scripseram ad finem Prop. IV. qui quidem est exigui momenti, et argumenta Propositionum sequentium non immutat. Calculi autem summam hîc adjiciam. Inveneram in Prop. IV. esse B ad A, ut $\frac{1}{3} + \frac{c^2}{15\ a^2} + \frac{c^4}{35\ a^4}$, &c. ad $\frac{b}{a} \times \overline{\frac{1}{3} + \frac{c^2}{5\ a^2} + \frac{c^4}{7\ a^4}}$, &c. adeóque substituendo loco $\frac{b}{a}$ ipsius valorem $\frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a}$ sive $1 - \frac{c^2}{2\ a^2} - \frac{c^4}{8\ a^4}$, &c. ut $\frac{1}{3} + \frac{c^2}{15\ a^2} + \frac{c^4}{35\ a^4}$, &c. ad $\frac{1}{3} + \frac{c^3}{30\ a^2} + \frac{c^4}{840\ a^4}$, &c. unde B — A est ad G (seu $\frac{1}{2}$ B + $\frac{1}{2}$ A) ut $\frac{c^2}{10\ a^2} + \frac{23\ c^4}{24 \times 35\ a^4}$, &c. ad $1 + \frac{3\ c^2}{20\ a^2} + \frac{25\ c^4}{8 \times 70\ a^4}$, &c. Est autem $c^2 = 4\ d\ x$, et $a^2 = d^2 + 2\ d\ x + x^2$ ex iis quæ in Propositione supponuntur; unde $\frac{c^2}{4\ a^2} = \frac{x}{d} - \frac{2\ x^2}{d^2} + \frac{3\ x^3}{d^3}$, &c. et substituendo loco $\frac{c^2}{a^2}$ ejus valorem $\frac{4\ x}{d} - \frac{8\ x^2}{d^2}$, &c. prodibit B — A ad G, ut $14\ d\ x + 18\ x^2$ ad $35\ d^2 + 21\ d\ x + 17\ x^2$ quàm proximè. Cúmque sit $\overline{B - A} \times d + 3\ V\ d = 2\ G\ x - 2\ V\ x - \frac{3\ V\ x^2}{d}$ per Corol. Prop. I. substituatur valor ipsius $\overline{B - A}$, et negligantur termini quos ingreditur $V\ x^2$ (quoniam V est admodum parva respectu G) eritque $3 \times 35\ V\ d^2 = 56\ G\ d\ x - 133\ V\ d\ x + 24\ G\ x^2$ et $x = \frac{3 \times 35\ V\ d^2}{56\ d\ G - 133\ V\ d + 24\ G\ x}$, quòd si in denominatore pro x scribatur valor vero propinquus $\frac{15\ V\ d}{8\ G}$, prodibit valor magis accuratus $\frac{3 \times 35\ V\ d}{56\ G - 88\ V}$, eritque x : d :: 15 V : 8 G — $\frac{88}{7}$ V quàm proximè. Diversâ paulo ratione prodit $x = \frac{15\ V\ d}{8\ G}$

$+ \frac{165\, VVd}{56\, GG}$, &c. quam seriem producere non est difficile, si operæ pretium videbitur. In Prop. VI. quæsivimus figuram aquæ orbem lunarem complentis ex actione Solis oriundam. Hâc correctione adhibitâ, et cæteris retentis ut priùs, axis minor figuræ ad majorem ut 46.742 ad 47.742, quæ parùm differt a ratione quàm in eâ Propositione exhibuimus.

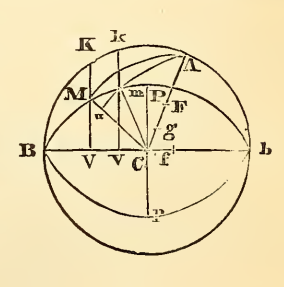
II. Series quam exhibuimus in Prop VIII. deducitur per Lem. V. et Prop. II. Sit $CA = a$. $CB = b$. $CP = e$. $CF = c$. $Cf = f$. $Cg = g$. Sint ACM, ACm sectiones quævis solidi per rectam AC (quæ normalis est plano BPbp) transeuntes. Arcus mu centro C radio Cm descriptus, occurrat rectæ CM in u, et occurrant ordinatæ MV, mv axi Bb in V et v, et circulo BKb in K et k. Sit $CA^2 - CM^2 = x^2$, seu x distantia foci a centro in figura ACM, sit L logarithmus



quantitatis $a \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$, et ultima ratio gravitatis particulæ A in frustum planis ACM, ACm terminatum ad gravitatem in frustum sphæræ centro C radio CA descriptæ iisdem planis contentum, erit ea $3\, CM^2 \times \overline{L - x}$ ad x^3 per Prop. II. Gravitas igitur particulæ A in solidum erit ut $\int \frac{3\, CM^2 \times \overline{L-x}}{x^3} \times \frac{mu}{CM} = \int \frac{3\, CM \times mu}{x^3} \times \overline{L-x} =$ $\int \frac{3\, CK \times Kk \times CP}{CK \times x^3} \times \overline{L-x} = \int \frac{3\, e \times Kk}{x^3} \times \overline{L-x}$. Sit $CV = u$. Eritque $u^2 + \overline{b^2 - u^2} \times \frac{c^2}{b^2} = CM^2 = a^2 - x^2$. Unde $c^2 + \frac{b^2 - c^2}{b^2} u^2 = a^2 - x^2, u^2 = \overline{a^2 - c^2 - x^2} \times \frac{b^2}{b^2 - c^2} = \overline{c^2 - x^2} \times \frac{b^2}{f^2}$. Adeóque $KV^2 = b^2 - u^2 = b^2 - \frac{b^2}{f^2} \times \overline{c^2 - x^2} = b^2 \times \frac{f^2 + x^2 - c^2}{f^2} = \frac{b^2}{f^2} \times \overline{x^2 - g^2}$. Est autem $Kk : Vv :: CK : KV$. Adeóque $Kk = \frac{bdv}{KV} = \frac{b^2}{f} \times \frac{-x\,dx}{\sqrt{c^2 - x^2} \times \frac{b}{f} \sqrt{x^2 - g^2}} = \frac{-bx\,dx}{\sqrt{c^2 - x^2} \times \sqrt{x^2 - g^2}}$. Quare gravitas particulæ A versus solidum erit ut $\int \frac{-3\,ebx\,dx}{x^3 \sqrt{c^2 - x^2} \times \sqrt{x^2 - g^2}} \times \overline{L - x}$. Verùm $L - x =$

$\frac{x^3}{3a^2} + \frac{x^5}{5a^4}$, &c. Quare gravitas illa erit $\int \frac{-3ebxdx}{3a^2\sqrt{c^2-x^2}\times\sqrt{x^2-g^2}}$ $+\int \frac{-3ebx^3dx}{5a^4\sqrt{c^2-x^2}\times\sqrt{x^2-g^2}}$, &c. Sit $z^2 = x^2 - g^2$, et prior summa erit $\int \frac{-ebdz}{a^2\sqrt{c^2-g^2-z^2}}$, secunda erit $\int \frac{-ebx^2dz}{5a^4\sqrt{c^2-g^2-z^2}} =$ $\int \frac{-ebdz\times\overline{z^2+g^2}}{5a^4\sqrt{c^2-g^2-z^2}}$. Quæ cum subsequentibus summis ad circulares arcus facilè reducuntur. Atque hinc ratio gravitatis particulæ A versùs hoc solidum ad gravitatem versùs sphæram super semi-diametrum C A constructam, erit qualis in Propositione assignatur, terminis seriei citissimè decrescentibus, si C F, C f et C g sint admodum parvæ. Si evanescat g, hæc series dabit gravitatem versùs sphæroidem in æquatore; quæ tamen elegantiùs investigatur in Prop. III.

III. In Prop. IX. observavimus post Newtonum vim Lunæ ad mare movendum cum vi Solis posse conferri, æstus in syzygiis et quadraturis comparando; eadem ratio obtineri posset conferendo æstus qui contingunt in syzygiis luminarium in diversis distantiis Lunæ a Terra, si æstus essent accuratè proportionales viribus quibus producuntur. Designet L vim Lunæ mediocrem, S vim Solis mediocrem, X et x duas diversas distantias Lunæ a Terra in syzygiis æquinoctialibus, Z et z distantias Solis a Terra in iisdem syzygiis, d et D mediocres utriusque distantias; et si Lunæ declinatio nulla sit, atque essent ut vires luminarium, seu ut $\frac{Ld^3}{X^3} + \frac{SD^3}{Z^3}$



et $\frac{Ld^3}{x^3} + \frac{SD^3}{z^3}$, hinc comparando, æstûs ratio L ad S detegeretur. Sit enim ascensus aquæ in priori casu ad ascensum in posteriori ut m ad n, eritque L ad S ut $\frac{mD^3}{z^3} - \frac{nD^3}{Z^3}$ ad $\frac{nd^3}{X^3} - \frac{md^3}{x^3}$

INQUISITIO PHYSICA

IN CAUSAM

FLUXUS AC REFLUXUS MARIS.

A. D.D. EULER, MATHEMATICARUM PROFESSORE, E SOCIETATE ACADEMIÆ IMPERIALIS SANCTI-PETERSBURGENSIS.

Cur nunc declivi nudentur littora ponto,
Adversis tumeat nunc maris unda fretis;
Dum vestro monitu naturam consulo rerum:
Quàm procul a Terris abdita causa latet!
In Solem Lunamque feror. Si plauditis auso;
Sidera sublimi vertice summa petam.

CAPUT PRIMUM.

De causâ Fluxûs ac Refluxûs Maris in genere.

§. 1. OMNEM mutationem, quæ in corporibus evenit, vel ab ipsâ motûs conservatione proficisci, vel a viribus motum generantibus, hoc quidem tempore, quo qualitates occultæ causæque imaginariæ penitùs sunt explosæ, nullâ indiget probatione. Hoc autem discrimen quovis oblato phænomeno diligentissimè considerari oportet, ne tam motûs conservationi ejusmodi effectus tribuatur, qui sine viribus oriri nequit, quàm vires investigentur, quæ motum suâ naturâ conservandum producant. Quo quidem in negotio, si debita attentio adhibeatur, errori vix ullus relinquitur locus: cùm ex legibus naturæ satis superque constet, cujusmodi motus vel per se conserventur, vel viribus externis debeantur. Corpus scilicet in motu positum propriâ vi hunc motum uniformiter in directum retinet: atque corpus, quod circa axem convenientem per centrum gravitatis transeuntem motum rotatorium semel est consecutum, eodem motu rotari perpetuò suâ sponte perget: neque hujusmodi motuum causam in ullâ re aliâ, nisi in ipsâ corporum naturâ, quæri oportet. Quocirca si

hujus generis phænomenon fuerit propositum, alia causa investigari non potest, nisi quæ a principio tales motus procreaverit.

§. 2. Hujus generis foret quæstio, si quæreretur causa motûs vertiginis planetarum ac Solis; hic enim sufficeret eam causam assignasse, quæ initio hos motus produxisset, cùm Sol æquè ac planetæ talem motum semel consecuti eundem propriâ vi perpetuò conservare debeant, neque ad hoc phænomenon explicandum vis ulla externa etiam nunc durans requiratur. Longè aliter se res habet, si motus proponatur neque uniformis, neque in directum procedens, cujusmodi est motus planetarum periodicus circa Solem: hoc enim casu minimè sufficit ea vis, quæ initio planetas ad istiusmodi motus impulerit, sed perpetuò novæ virium actiones requiruntur, a quibus tam celeritas quàm directio continuò immutetur: quæ vires, quàm primùm cessarent, subitò planetæ orbitas suas desererent, atque in directum motu æquabili avolarent. Quòd si igitur phænomenon quodcunque naturæ proponatur, antè omnia sollicitè est inquirendum, ad quodnam genus id pertineat atque utrum causa in viribus externis sit quærenda, an in ipso subjecto corpore? Quinetiam sæpenumerò usu venire potest, ut effectus utriusque generis in eodem phænomeno multùm sint inter se permixti; quo casu summo studio ii a se invicem discerni antè debebunt, quàm causarum investigatio suscipiatur.

§. 3. His ritè perpensis explicatio Galilei, quam in suis Dialogis de Æstu Maris assignare est conatus, mox concidit; putavit enim fluxum ac refluxum maris tantùm a motibus Terræ rotatorio circa axem et periodico circa Solem oriri, neque aliis viribus tribui oportere, nisi quæ hos motus tùm producant, cùm conservent. Namque si ponamus Terram solo motu diurno esse præditam, iste motus mare aliter non afficiet, nisi id sub æquatore attollendo, ex quo figura Terræ sphæroidica compressa nascitur, motus verò reciprocus in mari omninò nullus hinc generari poterit. Quòd si autem Terræ insuper motum æquabilem in directum tribuamus, priora phænomena nullo modo afficientur, sed prorsùs eadem manebunt, quemadmodum ex principiis mechanicis clarissimè perspici licet, quibus constat motum uniformem in directum omnibus partibus systematis cujuscunque corporum æqualiter impressum nullam omninò mutationem in motu et situ partium relativo inferre. Abeat nunc motus iste æquabilis Terræ in directum impressus in circularem vel ellipticum per vires quibus Terra perpetuò ad Solem urgetur; ac ne hoc quidem casu ullus motus reciprocus in mari produci poterit; quod cùm per se est perspicuum, tùm etiam ab ipso Galileo non statuitur: ipse enim non tàm ex mixtione

motûs vertiginis et periodici æstum maris proficisci est arbitratus, quàm ex motu quocunque progressivo sive rectilineo sive curvilineo, si is cum motu rotatorio combinetur.

§. 4. Quanquàm autem motus Terræ periodicus circa Solem cum motu rotatorio circa axem conjunctus nullum in mari motum reciprocum generare valet, tamen mare, quod si motus esset æquabilis in directum, in quiete persisteret, aliquantùm turbari debebit. Quòd si autem ad vim quâ Terra in orbitâ suâ continetur attendamus, non difficulter mutationem, quam mare ab ea patietur, colligere poterimus. Nam cùm partes Terræ a Sole remotiores minori vi, propiores verò majori sollicitentur, illæ ad majus tempus periodicum, hæ verò ad minus absolvendum cogentur, ex quo partibus Terræ fluidis, ut potè mobilibus, motus ab oriente versùs occidentem secundùm eclipticam inducetur, hancque veram esse causam existimo ac præcipuam cur tam oceanus quàm aër sub æquatore perpetuò habeat fluxum ab ortu versùs occasum. Possem etiam ex eodem principio clarè ostendere tam maris, si omninò liberum esset, quàm aëris celeritatem tantam fore, quâ tempore viginti-quatuor horarum spatium circiter viginti graduum absolvatur; sed cùm hæc inquisitio ad præsentem quæstionem propriè non pertineat, atque inclyta Academia fortassè aliâ occasione quæstiones hùc spectantes sit propositura, uberiorem explicationem hujus insignis phænomeni eò usque differendam esse censemus; hoc quidem tempore tantùm indicasse contenti, motum Terræ periodicum conjunctim cum motu diurno mari motum aliquem imprimere posse, sed neutiquam motum reciprocum, uti Galileus est arbitratus.

§. 5. Uti in omnibus omninò quæstionibus physicis multò facilius est, quæ non sit causa phænomeni cujuspiam oblati, quàm quæ sit, ostendere; ita etiam præsens quæstio de fluxu ac refluxu maris est comparata, ut non difficulter causas falsò assignatas possimus refellere. Ac primò quidem post eversam Galilei sententiam, explicatio æstûs maris Cartesiana pressioni Lunæ innixa tot tantisque laborat difficultatibus, ut omninò subsistere nequeat. Præterquàm enim quòd istiusmodi pressio aliunde probari nequeat, atque ad hoc solum phænomenon explicandum gratuitò assumatur, observationibus etiam minimè satisfacit. In aperto enim ac libero oceano aquam mox post transitum Lunæ per meridianum elevari observamus, cùm secundùm Cartesii sententiam eodem tempore deprimi deberet; neque prætereà hoc modo satis distinctè explicatur, cur Luna sub Terrâ latens eundem ferè effectum exerat, ac si super horizonte versetur. Deinde hoc idem negotium non feliciori successu aggressus est Wallisius, causam in communi centro gravitatis Terræ et Lunæ quærens,

cujus explicatio mox satis dilucidè est subversa. Superest denique Newtoni theoria, quæ nemine contradicente phænomenis multò magis est consentanea: at in ea id ipsum quod hoc loco quæritur, causa scilicet physica, non assignatur, sed potiùs ad qualitates occultas referri videtur; interim tamen ne hæc quidem theoria satis est evoluta, ut de ejus sive consensu sive dissensu cum observationibus judicium satis tutum ferri queat.

§. 6. Cùm igitur dubium sit nullum, quin fluxûs ac refluxûs maris causa in viribus externis et realibus sit posita, quæ si cessarent, simul æstus maris mox evanesceret, ubi lateant hæ vires et quomodo sint comparatæ potissimùm nobis erit explicandum, hoc enim est id ipsum, quod celeberrima Academia Scientiarum Regia in quæstione propositâ requirit. Neque verò vires tantummodò indicasse sufficiet, verùm præterea id maximè erit monstrandum, quomodo istæ vires agant, atque hos ipsos effectus, quos observamus, non verò alios producant; in hoc enim totius quæstionis cardo, explicationis scilicet confirmatio, vertitur. Quoniam autem plerumque pluribus viribus excogitandis idem phænomenon explicari potest, studium adhibendum est summum in hac indagatione, ne ad vires inanes atque imaginarias delabamur, quæ in mundo neque sunt neque locum habere possunt. Parum enim scientiæ naturali consulunt, qui quovis phænomeno oblato sibi pro arbitrio mundi structuram peculiarem effingunt, neque sunt solliciti, utrùm ea compages cum aliis phænomenis consistere queat, an verò secùs. Quòd si enim jam aliundè constet existere in mundo ejusmodi vires, quæ oblato effectui producendo sint pares, frustrà omne studium in conquisitione virium novarum collocabitur.

§. 7. Quoniam autem ad causam cujusque phænomeni detegendam, ad singulas circumstantias sedulò attendere necesse est, ante omnia mirificum consensum æstûs maris cum motu Lunæ contemplari conveniet. Non solùm enim insignis harmonia inter æstum maris, ac Lunæ motum diurnum deprehenditur, sed etiam revolutio synodica respectu Solis ingentem affert varietatem. Omnes denique observationes abundè declarant rationem fluxûs et refluxûs maris a situ cùm Lunæ tum etiam Solis conjunctim pendere: ex quo statim prono ratiocinio consequitur, vires illas æstum maris producentes, quæcunque etiam sint, cùm Lunam potissimùm, tùm verò etiam Solem respicere debere. Quamobrem imprimis nobis erit inquirendum, utrum ejusmodi vires Solem et Lunam respicientes, quæ in aquis talem effectum, qualis est æstus maris, producere queant, jure ac ratione statui possint, an secùs. Ac si pluribus modis istiusmodi vires animo concipere liceat, diligenter erit dispiciendum,

quænam cum aliis phænomenis consistere possint nec ne. Quantumvis enim explicatio quæpiam cum phænomenis conspiret, nisi virium, quæ assumuntur, existentia aliundè comprobetur, labili ea omninò innititur fundamento. Quòd si autem contrà, effectus ejusmodi viribus tribuatur quas in mundo reverà existere alia phænomena clarè docuerunt, atque summus explicationis cum experientiâ consensus deprehendatur, dubium erit nullum quin ista explicatio sit genuina et sola vera.

§. 8. Quamvis autem certis viribus Lunæ ac Soli tribuendis phænomenon æstûs maris commodè explicari posset, tamen ob hanc solam causam istiusmodi vires statuere nimis audax videtur: quamobrem imprimis erit dispiciendum, num aliæ rationes ejusmodi vires non solùm admittant, sed etiam actu existere manifestò indicent. Perlustremus igitur vires, quas jam aliundè in mundo vigere novimus, sciscitemurque paucis an ad motum reciprocum oceano inducendum sint idoneæ: tales enim vires si in mundo jam extent, omnis labor in aliis inquirendis impensus irritus foret ac ridiculus. Ac primò quidem si Solem spectamus, motus Terræ annuus omninò declarat Terram perpetuò versùs Solem urgeri, et quasi attrahi, idque fortius in minori distantia, debilius verò in majori; atque adeò hanc Solis vim in Terram rationem tenere reciprocam duplicatam distantiarum: ex quo spontè sequitur non solùm universam Terram, sed etiam singulas ejus partes perpetuò versùs Solem urgeri. Tota quidem Terra æquè fortiter ad Solem sollicitatur, ac si omnis materia in ejus centro esset congesta; interim tamen partes circa superficiem sitæ vel magis vel minùs ad Solem allicientur, quàm totum Terræ corpus, prouti vel minùs vel magis sint remotæ a Sole, quàm centrum Terræ. Hinc igitur fit, ut hæc eadem vis ad Solem tendens aquam modò magis, modò minus trahat, ex quâ alternâ actione motus reciprocus in fluidis necessariò oriri debet. Quocircà ista Solis vis in præsenti negotio neutiquam negligi poterit, cùm ea, si fortè sola causam æstûs maris non constituit, certè effectum aliarum virium necessariò afficere ac turbare debeat.

§. 9. Quemadmodùm autem Terra cum omnibus suis partibus versùs Solem sollicitatur; ita eorum sententia non multùm a veritate abhorrere videtur, qui in Lunâ similem vim collocant. Observationes quidem hujusmodi vim in Lunâ non demonstrant sicuti in Sole; cùm motus Terræ in orbitâ suâ a Lunâ omninò non affici deprehendatur: sed si docuerimus eandem vim ad Lunam respicientem, quæ æstui maris producendo sit par, in motu Terræ nullam sensibilem anomaliam producere valere, audacia, quæ fortè in talis vis admissione consistere videbatur, multùm

mitigabitur. Hujusmodi autem vis existentia aliis rationibus, nullo ad æstum maris habito respectu, satis clarè evinci potest; quia enim nullum est dubium, quin Luna ad Terram constanter feratur, ob æqualitatem actionis et reactionis Terram quoque versùs Lunam pelli necesse est. Namque si ponamus Sole penitus sublato, Terræ ac Lunæ omnem motum subitò adimi, Luna utique ad Terram accedet; nemo autem non concedet, probè perpensis principiis mechanicis, Terram intereà non prorsùs esse quieturam, sed Lunæ obviam ituram, concursumque in communi gravitatis centro contingere: hoc autem evenire non poterit, nisi Terra actu ad Lunam sollicitetur. Deinde in ipsâ Lunâ gravitatem dari similem huic, quam in Terrâ sentimus, negari non potest; nisi enim talis vis in Lunâ vigeret, partes Lunæ fluidæ, cùm ob gravitatem in Terram, tùm ob motum Lunæ circa proprium axem, etsi sit admodùm lentus, et tempori periodico æqualis, jam dudùm avolassent, partesque solidæ consistentiam suam amisissent. Pluribus deniquè aliis rationibus ex naturâ vorticum petitis, magis confirmari posset tale corpus mundanum, cujusmodi est Luna, subsistere non posse, nisi vortice sit cinctum, quo gravitas in id generetur. Quòd si autem gravitationem versùs Lunam concedamus, cur ejus actionem non ad nos usquè admittamus, nulla omninò ratio suadet: quin potiùs ejusmodi vim similem statui conveniet, reliquis in mundo deprehensis, quæ quasi in infinitum porriguntur, atque inversam duplicatam tenent distantiarum rationem.

§. 10. His expositis manifestum est, et quasi experientiâ convictum, Terram cum singulis suis partibus tam versùs Lunam quàm versùs Solem perpetuò sollicitari, atque utramque vim proportionalem esse reciprocè quadratis distantiarum. Hæ igitur vires, cùm actu existant, constanterque effectum suum exerant, in præsenti negotio, quo in causam æstûs maris inquirimus, præteriri omninò nequeunt; nisi dilucidè antè sit probatum, eas non solùm fluxum ac refluxum non generare, sed ne quidem quicquam efficere. Si enim istæ vires ullum duntaxat motum reciprocum mari inducere valeant, quantumvis is etiam sit exiguus, atque adeò æstui maris fortassè contrarius, earum tamen ratio necessariò erit habenda, cùm sine illis vera causa, quæcumque sit, neque investigari neque cognosci possit. Neque præterea sanæ rationis præcepta permittunt alias vires excogitare, in iisque causam æstûs maris collocare, antequam evidenter sit demonstratum, binas istas vires Solem Lunamque spectantes, quas non gratuitò assumsimus, sed ex certissimis phænomenis in mundo existere novimus, ad fluxum ac refluxum maris producendum non esse sufficientes. In sequentibus autem Capitibus clarris-

simè sumus ostensuri, ab his duabus viribus non solùm in oceano motum reciprocum generari debere, sed etiam eum ipsum, qui æstûs marini nomine insigniri solet: atque hanc ob rem firmiter jam affirmamus veram fluxûs ac refluxûs causam in Solis illis duabus viribus, quarum altera ad Solem est directa, altera ad Lunam, esse positam; hocque simul omnium eorum sententias funditùs evertimus, qui vel aliis omninò viribus idem phænomenon adscribere, vel cum his ipsis alias vires conjungere conantur.

§. 11. Quæstio igitur de causâ fluxûs ac refluxûs maris, prouti ea ab illustrissimâ Academiâ Regiâ est proposita, ad hanc deducitur quæstionem, ut binarum illarum virium, quibus singulæ Terræ partes cùm ad Solem tùm ad Lunam perpetuò urgentur, idque in distantiarum ratione reciprocâ duplicatâ, causa assignetur physica. Ex quo tractationem nostram bipartitam esse oportebit. Primò scilicet ex principiis mechanicis dilucidè erit ostendendum, a binis illis viribus Solem Lunamque respicientibus cùm fluxum ac refluxum maris generatim oriri debere, tùm etiam hoc modo singula phænomena distinctè explicari posse: hac enim parte absolutâ nullum supererit dubium, quin origo æstûs maris his ipsis viribus, quas actu jam in mundo existere docuimus, debeatur. Deinde verò harum virium causa physica indicari debet, cùm id sit præcipuum, quod inclyta Academia requirit. Quod quidem ad illam partem attinet, in ejus explicatione minimè hæsitamus; et clarissimis certissimisque demonstrationibus evincere pollicemur, per istas vires omnia omninò æstûs maris phænomena absolutissimè explicari posse; quâ in re nulli dubitationi ullus relinquitur locus, cùm tota ad geometriam et mechanicam sublimiorem pertineat, calculoque analytico sit subjecta. Altera verò pars, in scientiam naturalem imprimis incurrens, majori difficultati videtur obnoxia, nec tantæ evidentiæ capax; verùm cùm ista res occasione plurium quæstionum ab Academiâ celeberrimâ antehac propositarum jam tanto studio sit investigata atque absoluta, eam non minori certitudine expedire confidimus.

§. 12. Explosis hoc saltem tempore qualitatibus occultis missâque Anglorum quorumdam renovatâ attractione, quæ cum saniori philosophandi modo nullatenùs consistere potest, omnium virium quæ quidem in mundo observantur, duplex statuendus est fons atque origo. Nempe cùm viribus tribuatur vel motûs generatio vel immutatio, iste effectus semper vel ab allisione corporum, vel a vi centrifugâ proficiscitur, quarum actionum utraque facultati, quâ omnia corpora sunt prædita in statu suo sive quietis sive motûs æquabilis in directum perseverandi, debe-

tur. Ob hanc enim ipsam facultatem corpus in motu positum alia corpora, quæ vel ipsius motui directè sunt opposita, vel ejus directionem mutare cogunt, ad motum sollicitat; atque priori casu regulæ collisionis corporum, posteriori verò vis centrifugæ indoles et proprietates oriuntur ac demonstrantur. Cùm igitur omnia corpora terrestria tam versùs Solem, quàm versùs Lunam perpetuò sollicitentur, causa hujus sollicitationis continuo appulsui materiæ cujusdam subtilis, vel vi centrifugæ similis materiæ tribui debebit. Priori igitur casu materiam subtilem statui oporteret, quæ constanter summâ rapiditate cùm ad Solem tùm ad Lunam ferretur: hujusmodi verò hypothesis ob maximas difficultates, quibus est involuta, admitti minimè potest. Primò enim perpetuò novis viribus esset opus, quæ materiam subtilem indesinenter versùs Solem Lunamque pellerent, quâ quidem re quæstio non majorem lucem assequeretur. Deinde talis motus per se diu consistere non posset, propter perpetuum materiæ subtilis ad eadem loca affluxum nullumque refluxum, ut taceamus alia maxima incommoda cum istiusmodi positione permixta.

§. 13. Exclusâ igitur materiæ subtilis continuâ allisione, tanquam ad vires cùm ad Solem tùm Lunam tendentes producendas minimè idoneâ, alia harum virium causa non relinquitur, nisi quæ in vi centrifugâ consistat. Quemadmodum autem materia subtilis in gyrum acta ac verticem formans non solùm animo concipi, sed etiam in mundo persistere queat, jam satis superque est expositum, cùm in dissertationibus, quæ cùm quæstio de causâ gravitationis agitaretur, laudes illustrissimæ Academiæ merebantur, tùm etiam in aliis operibus; quibus in locis simul dilucidè est ostensum, quomodo ejusmodi vortices comparatos esse oporteat, ut vires centrifugæ fiant quadratis distantiarum a centro vorticis reciprocè proportionales. Quæ res cùm meo quidem judicio jam tam plana sit facta, ut vix quicquam ad præsens institutum attinens adjici queat, vorticum ulteriori examini sine ullâ hæsitatione supersedemus; idque eò magis, quòd celeberrima Academia ejusmodi amplam atque adeò jam confectam digressionem postulare haud videatur. Quoniam enim quæstio de causa gravitatis cùm versùs Terram tùm etiam versùs Solem et planetas jam satis est investigata ac diremta; nunc quidem, si cujuscunque phænomeni causa eò fuerit perducta, ibidem acquiescendum videtur, neque actum agendo denuò in causâ gravitatis investigandâ nimiùm immorari conveniret. Denique in præsenti negotio sufficere posset, si æstûs maris causa adhuc tantis tenebris obvoluta ad alia maximè aperta phænomena reducatur, quorum causa non solùm habetur probabilis, sed

etiam quæ sola sit veritati consentanea, cujusmodi est gravitatio tàm versùs Solèm quàm Lunam.

§. 14. Causam igitur fluxûs ac refluxûs maris proximam in binis vorticibus materiæ cujusdam subtilis collocamus, quorum alter circa Solem, alter verò circa Lunam ita circumagatur, ut in utroque vires centrifugæ decrescant in duplicatâ ratione distantiarum a centro vorticis; quæ lex vis centrifugæ obtinebitur, si materiæ subtilis vorticem constituentis celeritas statuatur tenere rationem reciprocam subduplicatam distantiarum a centro vorticis. Quæcunque igitur corpora in istiusmodi vortice posita ad ejus centrum pellentur vi acceleratrice, quæ pariter ac vis centrifuga quadratis distantiarum reciprocè est proportionalis. Vis absoluta autem quâ corpus quodpiam in datâ distantiâ a centro vorticis collocatum eò urgetur, pendet a celeritate materiæ subtilis absolutâ. Ac primò quidem, quod ad vorticem circa Solem rotatum attinet, ejus vis absoluta ex tempore Terræ periodico cum distantiâ ejusdem a Sole comparato tanta colligitur, ut corpus, cujus distantia a centro Solis æqualis est semi-diametro Terræ, eò sollicitetur vi, quæ sit 227512 vicibus major, quàm est gravitas naturalis in superficie Terræ. Metiemur autem hanc ipsam vim absolutam cujusque vorticis, per vim, quam idem vortex exerit in distantiâ a suo centro semi-diametro Terræ æquali: ex quo si vis gravitatis terrestris designetur per 1, erit vis absoluta Solis $= 227512$, cujus numeri loco brevitatis gratiâ utemur litterâ S. Simili modo vim vorticis Lunam cingentis absolutam indicabimus litterâ L, cujus valorem Newtonus rectè cùm ex ipso fluxu ac refluxu maris, tùm etiam ex præcessione æquinoctiorum constituisse videtur circiter $\frac{1}{40}$. Quare si, positâ Terræ semi-diametro $= 1$, corporis cujusdam a centro Solis vel Lunæ distantia fuerit x, erit vis, quâ id corpus vel ad Solem sollicitatur vel ad Lunam, vel $= \frac{L}{xx}$ vel $= \frac{S}{xx}$, uti ex indole horum vorticum prona consequentia fluit. In his quidem litterarum S et L determinationibus assumsimus mediam Solis a Terra distantiam 20620 semi-diametrorum Terræ, quæ ex parallaxi horizontali $10''$ sequitur, Lunæ verò a Terra distantiam mediam 60 semi-diametrorum Terræ; interim tamen vires ad mare movendum hinc ortæ ab his hypothesibus non pendent, uti sequentibus patebit.

§. 15. Quoniam igitur æstum maris per binas vires, quarum altera Solem respicit, altera Lunam, sumus expositiri, facilè videri possemus eandem omninò explicationem suscipere, quam Newtonus dedit in suis Principiis Mathematicis Philosophiæ Naturalis. Primùm autem notan-

dum est, quòd si Newtonus veram causam hujus phænomeni assignasset, summoperè absurdum atque absonum foret, novitatis studio aliam causam, quæ certò falsa futura esset, excogitare. Deinde verò Newtonus ne vestigium quidem reliquit, ex quo causa harum virium attractivarum, quas Soli Lunæque tribuit, colligi posset, sed potiùs de causæ physicæ inventione, qualem Academia Regia potissimum requirit, desperasse videtur; id quod ejus asseclæ apertè testantur, qui attractionem omnibus corporibus propriam esse, neque ulli causæ externæ deberi firmiter asserunt, atque adeò ad qualitates occultas confugiunt. Denique Newtonus deductionem et expositionem omnium phænomenorum ad æstum maris pertinentium minimè perfecit, sed quasi tantum adumbravit; plena enim explicatio tot tamque difficilium Problematum solutionem postulat, quæ Newtonus non est aggressus: cùm enim hujus quæstionis enodatio amplissimos calculos requirat, ipse analysin vitans pleraque tantum obiter indicasse contentus fuit; ob quem defectum plurimis adhuc dubiis circa ipsius explicationem est relictus. Neque enim in his viribus veram æstûs maris causam contineri antè certum esse potest, quàm absoluto calculo perfectus consensus phænomenorum cum theoriâ fuerit declaratus.

CAPUT SECUNDUM.

De viribus Solis et Lunæ ad Mare movendum.

§. 16. Effectus, quos vires cùm Solis tùm Lunæ antè stabilitæ in Terram exerunt, ad duo genera sunt referendi: quorum alterum eos complectitur effectus quos Sol ac Luna in universam Terram tamquam unum corpus consideratam exercet; alterum verò eos, quos singulæ Terræ partes a viribus Solis ac Lunæ patiuntur. Ad effectus prioris generis investigandos, omnis Terræ materia tanquam in unico puncto, centro scilicet gravitatis, collecta consideratur, ac tàm ex motu insito quàm viribus sollicitantibus motus Terræ progressivus in suâ orbitâ determinari solet. Ex hocque principio innotuit vim hanc Solis efficere, ut Terra circa Solem in orbitâ ellipticâ circumferatur, vim Lunæ autem tam esse debilem, ut vix ac ne vix quidem ullam sensibilem perturbationem in motu Terræ annuo producere valeat. Contrà autem docebitur, vim Lunæ ad partes Terræ inter se commovendas ac mare agitandum multò esse fortiorem vi Solis; ex quo plerisque primo intuitu summè

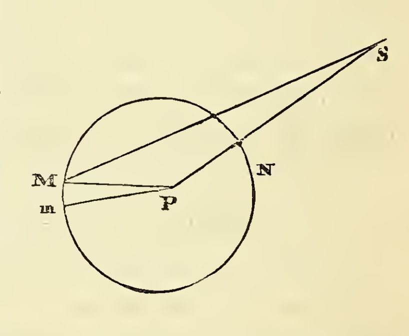
paradoxon videatur, quòd vis Lunæ in priori casu respectu vis Solis evanescat, cùm tamen eadem casu posteriori multum excedat vim Solis. Sed mox, cùm effectus utriusque generis diligentiùs evolvemus et perpendemus, satis dilucidè patebit, eos inter se maximè discrepare, atque a vi, quæ in universam Terram minimum exerat effectum, maximam tamen agitationem partium Terræ inter se oriri posse et vicissim.

§. 17. Ad illum autem harum virium effectum, qui in commotione partium Terræ inter se consistit, dijudicandum, ante omnia probè notari oportet, si singulæ Terræ partes viribus æqualibus et in directionibus inter se parallelis sollicitentur, eo casu nullam omnino commotionem partium oriri, etiamsi sint maximè fluidæ nulloque vinculo invicem connexæ, sed totum virium effectum in integro tantum corpore movendo consumtum iri; perindè ac si totum Terræ corpus vel in unico puncto esset conflatum, vel ex materiâ firmissimè inter se connexâ constaret. Ex quo manifestum est partes Terræ saltem fluidas, quæ viribus cedere queant, inter se commoveri non posse, nisi a viribus dissimilibus urgeantur: atque hanc ob rem non magnitudo virium partes Terræ sollicitantium, sed potiùs dissimilitudo, quâ cùm quantitatis tùm directionis ratione inter se discrepant, eum effectum, quo situs partium mutuus perturbetur, producit. Ita vis Solis, etsi est maxima, tamen ob insignem distantiam partes Terræ ferè æqualiter afficit, contrà verò vis Lunæ ob propinquitatem admodùm inæqualiter: unde a Lunâ multò major agitatio oceani resultat, quàm a Sole, quamvis ea vis, quæ ad Solem tendit, insigniter major sit alterâ Lunam respiciente. Atque hoc pacto dubium antè allatum funditùs tollitur, hocque adhuc planius fiet, si utriusque vis effectus ad calculum revocabimus.

§. 18. Ad inæqualitatem igitur virium quibus singulæ Terræ partes vel a Sole vel a Luna sollicitantur, definiendam, ante omnia vim, quâ universa Terra, si in suo centro gravitatis esset concentrata, afficeretur, determinari oportet, hæcque est ea ipsa vis, quæ Terræ motum progressivum in sua orbita respicit et turbat; deindè dispiciendum est, quantùm vires, quibus singulæ Terræ partes urgentur, tàm ratione quantitatis quàm directionis ab illâ vi totali discrepent. Quòd si enim nulla deprehendatur differentia, partes quoque singulæ situm suum relativum inter se retinebunt; at quò major erit differentia inter vires illas singulas partes sollicitantes, eò magis eæ inter se commovebuntur, situm relativum permutabunt. In hac autem investigatione, simul gravitatis naturalis, quâ omnia corpora versùs centrum Terræ tendunt, ratio est habenda; hæc enim vis in causa est, quòd quantumvis vires Solis et Lunæ in

diversis Terræ regionibus sint inæquales, æquilibrii tamen status detur, in quo partes tandem singulæ conquiescant, neque perpetuò inter se agitari pergant. Atque hanc ob rem singulæ Terræ partes a tribus viribus sollicitatæ considerari debebunt, primò scilicet a propriâ gravitate, quâ directè deorsum nituntur; tùm verò a vi, quâ ad Solem urgentur, ac tertiò a vi versùs Lunam directâ; hæque tres vires, cujusmodi phænomena quovis tempore in partibus Terræ fluidis gignant, erit investigandum.

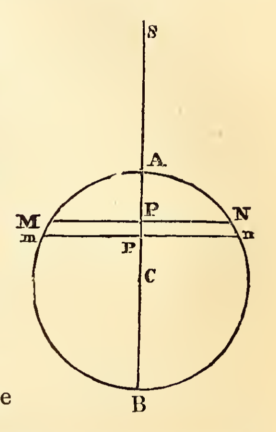
§. 19. Quò igitur vim totalem, quâ Terra vel a Sole vel a Lunâ urgetur, definiamus, consideremus primùm peripheriam circuli M N tanquam ex materiâ homogeneâ conflatam, cujus centro P verticaliter immineat Sol vel Luna in S, ita ut recta P S ad planum circuli M N sit perpendicularis. Sit circuli hujus radius P M = y, et distantia S P = x, ac vis sive Solis sive Lunæ absoluta = S. His positis elementum peripheriæ M m pelletur ad S in directione M S vi acceleratrice $= \frac{S}{MS^2} = \frac{S}{xx + yy}$,



positâ cùm vi gravitatis naturalis in superficie Terræ = 1, tùm etiam semidiametro Terræ = 1 : atque hanc ob rem elementum M m versùs S nitetur vi $= \frac{S \times Mm}{xx + yy}$. Resolvatur hæc vis in binas laterales, quarum alterius directio cadat in M P, alterius verò sit parallela directioni P S; atque evidens erit vires omnes M P per totam peripheriam se mutuò destruere, alterarum verò mediam directionem cadere in P S, ac vim his omnibus æquivalentem iisdem conjunctim sumtis fore æqualem. Trahetur autem elementum M m in directione ipsi P S parallela vi $= \frac{Sx \times Mm}{(xx + yy)^{\frac{3}{2}}}$, unde positâ ratione radii ad peripheriam = 1 : π tota circuli M N peripheria, quæ erit = π y, urgebitur seu quasi gravitabit versùs S in ipsâ directione P S vi $= \frac{\pi S x y}{(xx + yy)^{\frac{3}{2}}}$. Vis autem acceleratrix quâ hæc peripheria circuli versùs S sollicitabitur, prodibit, si vis motrix inventa dividatur per massam movendam, quæ est = π y, eritque $= \frac{Sx}{(xx + yy)^{\frac{3}{2}}}$.

§. 20. Hoc præmisso, contemplemur superficiem sphæricam genitam

conversione circuli A M B circa diametrum A B; sitque semi-diameter A C = B C = r; erit ipsa superficies = $2 \pi r r$. Jam attrahatur hæc superficies ad Solem Lunamve in S, existente distantiâ S C = a; atque ad vim totalem seu conatum quo integra superficies ad S tendet, inveniendum, concipiatur annulus genitus conversione elementi M m circa diametrum A B, quæ protensa per S transeat. Positis igitur S P = x, P M = y, erit per §. præced. conatus hujus annuli in directione P S = $\frac{\pi S x y . M m}{(xx + yy)^{\frac{3}{2}}}$. At posito P p = d x, erit M m = $\frac{r\, d x}{y}$, et $x x + y y = 2 a x - a a + r r$, unde annuli conatus versùs S erit = $\frac{\pi S r x\, d x}{(2 a x - a a + r r)^{\frac{3}{2}}}$, cujus integrale est = $C + \frac{\pi S r (a x - a a + r r)}{a^2 \sqrt{(2 a x - a a + r r)}}$, ex quo conatus portionis superficiei sphæricæ conversione arcus A M ortæ prodibit = $\frac{\pi S r r}{a a} + \frac{\pi S r (a x - a a + r r)}{a^2 \sqrt{(2 a x - a a + r r)}}$. Quare si ponatur S P = S B seu x = a + r, emerget conatus totius superficiei sphæricæ = $\frac{2 \pi S r r}{a a}$: hincque cùm ipsa superficies sit = $2 \pi r r$, erit vis acceleratrix quâ superficies sphærica actu versùs S tendet = $\frac{S}{a a}$, ideóque tanta, quanta foret, si tota superficies in centro C esset collecta.



§. 21. Cùm igitur superficies sphærica perinde ad Solem sive Lunam in S sollicitetur, ac si tota in ipso centro esset conflata, hæc proprietas ad omnes superficies sphæricas, ex quibus integra sphæra composita concipi potest, patebit, dummodo singulæ hæ superficies ex materiâ homogeneâ constent, sive quod eodem redit, ipsa sphæra in iisdem a centro distantiis sit æquè densa. Hanc ob rem ejusmodi sphæra quoque perinde ad S in directione P S urgebitur, ac si tota ipsius materia in centro C esset concentrata; hæcque proprietas non solùm in ejusmodi sphæras competit, quæ totæ ex materiâ uniformi sunt confectæ, sed etiam ut jam indicavimus, in tales, quæ ex materiâ constant difformi, dummodo in æqualibus a centro distantiis, materia circumquaque sit homogenea seu saltem ejusdem densitatis. Cùm igitur Terram sibi repræsentare liceat tanquam sphæram, si non ex uniformi materiâ conflatam, tamen sine ullo errore ita

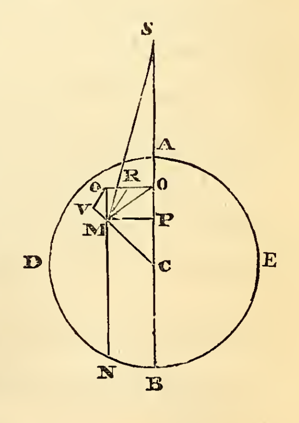
comparatam, ut in æqualibus circa centrum intervallis materiam æquè densam includat, Terra quoque universa tàm a Sole quàm a Lunâ æquè sollicitabitur, ac si omnis ejus materia in centro esset collecta. Quanquam enim nunc quidem accuratissimis ab illustrissimâ Academiâ Regiâ institutis passim mensuris satis est demonstratum, Terræ figuram ad polos esse compressam, tamen tantilla a perfectâ sphærâ aberratio, in aliis quidem negotiis maximi momenti, in hoc instituto tutò negligi potest. Parique ratione, etiamsi Terra in æqualibus a centro distantiis non sit æquè densa, tamen differentia certè non est tanta, ut error sensibilis inde sit metuendus.

§. 22. Ut igitur vires inveniantur, quæ tendant ad situm partium Terræ relativum immutandum, definienda est vis acceleratrix, quâ centrum Terræ sive ad Solem sive ad Lunam urgeatur: quâ cognitâ, si comperiantur omnes Terræ partes æqualibus viribus acceleratricibus et in directionibus parallelis ugeri, nulla omnino sitûs mutatio, nullaque proinde maris agitatio orietur. Sed Terra in se spectata omnium partium situm mutuum invariatum conservabit. At si vires, quibus singulæ partes a Sole aut Lunâ urgentur, discrepent a vi centrum Terræ afficiente, tàm ratione quantitatis quàm directionis, tum nisi firmissimè inter se sint connexæ, in situ suo mutuo perturbari debebunt. Hocque casu aquæ, quæ ob fluiditatem vi etiam minimæ cedunt, sensibiliter agitabuntur, atque affluendo defluendoque aliis locis elevabuntur, aliis deprimentur. Cùm autem iste motus, qui in singulis Terræ partibus generatur, a differentiâ inter vires centrum Terræ et ipsas partes sollicitantes proficiscatur, propria vis, quâ quæque particula agitabitur, innotescet, si a vi acceleratrice illam particulam sollicitante auferatur vix acceleratrix, quam centrum Terræ patitur: hæcque subtractio ita instituitur, ut cuique particulæ præter vim actu eam sollicitantem alia vis æqualis illi, quam centrum perpetitur, in directione contrariâ applicata concipiatur: tum enim vis quæ ex compositione harum duarum oritur, erit vera vis particulam illam de loco suo deflectens.

§. 23. Consentanea est hæc reductio principiis mechanicis, quibus statuitur motum relativum in systemate quotcunque corporum et a quibuscunque viribus sollicitatorum manere invariatum, si non solùm toti systemati motus æquabilis in directum simul imprimatur, sed etiam singulis partibus vires æquales quarum directiones sint inter se parallelæ, applicentur. Nostro igitur casu motus intestinus partium Terræ non turbabitur, si singulis particulis vires æquales in directionibus parallelis applicemus ut fecimus: quòd si autem istæ vires æquales sint illi, quâ tota

Terra seu centrum sollicitatur, et contrariæ, hoc ipso Terræ motum curvilineum et inæquabilem, quippe qui ab iisdem viribus oritur, adimemus. Quare si insuper toti Terræ motum æqualem et contrarium illi, quo actu fertur, impressum concipiamus, obtinebimus totam Terram quiescentem, atque etiam nunc partes perinde agitabuntur et inter se commovebuntur, ac si nullas istiusmodi mutationes intulissemus. Quilibet autem facilè percipiet, quantum ex hâc reductione subsidium assequamur; multò enim facilius erit mutationes, quæ in ipsâ Terrâ accidunt, percipere atque explicare, si centrum Terræ constituatur immotum, quàm si totalis motus singularum partium motibus esset permixtus. Hanc ob rem istâ reductione quâ centrum Terræ in quietem redigitur, perpetuò utemur, quò phænomena æstûs maris, prouti in Terrâ immotâ sentiri debent, eliciamus, quippe qui est casus naturalis, ad quem omnes observationes sunt accommodatæ, omnes verò theoriæ accommodari debent.

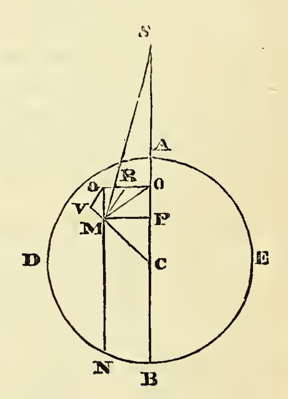
§. 24. Concipiatur nunc Terra tota tanquam globus A D B E urgeri ad Solem Lunamve in S existentem, cujus vis absoluta seu ea, quam in distantiâ a centro suo S semi-diametro Terræ æquali exerit, sit = S, distantia verò centri Terræ C ab S seu C S ponatur = a; eritque vis acceleratrix, quâ tota Terra tanquam in C collecta sollicitabitur in directione C S, $= \frac{S}{a\,a}$.



Contemplemur jam particulam Terræ quamcunque M cujus situs ita sit definitus, ut sit C P = x et P M = y, existente M P normali ad C S; hinc igitur habebitur S P = a — x et $S M = \surd\,((a-x)^2 + y^2)$. Vis igitur acceleratrix, quâ particula M versùs S pelletur, erit $= \frac{S}{(a-x)^2 + y^2}$; a quâ cùm auferri debeat vis, quâ tota Terra versùs S nititur, concipienda est particulæ M applicata vis $= \frac{S}{a\,a}$ in directione M N ipsi C S parallela et opposita; quæ duæ vires particulam M æquè afficient ac si universa Terra quiesceret vel uniformiter in directum moveretur, qui casus ab illo non differt. Ex his igitur ambabus viribus conatus innotescet, quo particula M a vi ad S directa de loco suo recedere annitetur: ad ipsum autem motum definiendum insuper vis gravitatis erit respicienda: et quia hæc particula non est

libera, sed quaquaversùs materiâ terrestri circumdata, investigari oportet, quantum ista materia effectum viribus sollicitantibus concedat.

§. 25. Quoniam autem in hoc Capite nobis nondum est propositum in ipsum effectum ab his viribus oriundum inquirere, sed tantum conatum evolvere atque explorare; diligentiùs perpendemus, cujusmodi vires ex combinatione harum potentiarum particulam M sollicitantium resultent. Hunc in finem resolvatur vis M S in duas laterales, quarum alterius directio parallela sit ipsi C S, altera verò in M P cadat: ex quo reperietur vis illa particulam M in directione M Q urgens $= \frac{S(a-x)}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$; altera verò vis in directione M P trahens $= \frac{S\,y}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$. Cùm autem particula M insuper trahatur in directione M N vi $= \frac{S}{a\,a}$, tres istæ vires a Sole Lunâve in S existente reducentur ad duas, quarum altera in directione M Q urgens erit $= \frac{S(a-x)}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{S}{a^2}$, altera verò directionem habens M P $= \frac{S\,y}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$. Quare si rectæ M Q et M P his viribus proportionales capiantur, et rectangulum M Q O P compleatur, exprimet diagonalis M O tàm directionem quàm quantitatem vis ex tribus præcedentibus ortæ: erit autem anguli O M P tangens $= \frac{a-x}{y} - \frac{((a-x)^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{a^2 y}$; quo cognito, si fiat ut M P ad M O ita $\frac{S\,y}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ ad quartam, hæc ipsa quarta proportionalis erit vis particulam M in directione M O sollicitans, quæ oritur a vi ad S tendente.



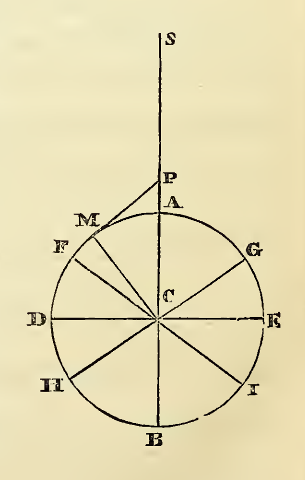
§. 26. Ut autem istæ vires faciliùs cum gravitate naturali, cujus directio est M C, conjungi queant, resolvantur eæ in binas, quarum altera in ipsam directionem M C cadat, alteriûs verò directio sit M R normalis ad M C. Ad hoc commodissimè præstandum, resolvatur vis M S primùm in duas, quarum altera ut antè directionem habeat ipsi C S parallelam, alteriûs verò directio in ipsam M C incidat. Cùm igitur sit M C $= \sqrt{(x^2+y^2)}$ erit prior vis $= \frac{S\,a}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$, posterior verò $=$

$\frac{S\sqrt{(x^2+y^2)}}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ quâ vis gravitatis augebitur. At si a priori auferatur vis $= \frac{S}{aa}$, remanebit vis particulam M in directione M Q sollicitans $= \frac{Sa}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{S}{a^2}$. Jam ex Q in C M productam demittatur perpendiculum Q V, eritque ob similitudinem triangulorum Q V M et M P C vis gravitati contraria secundùm directionem M V agens ex vi M Q orta $= \frac{Sax}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(x^2+y^2)}} - \frac{Sx}{a^2\sqrt{(x^2+y^2)}}$, unde omninò particula M a vi ad S tendente versùs C urgebitur vi $= \frac{Sx}{a^2\sqrt{(x^2+y^2)}} - \frac{S(ax-xx-yy)}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(x^2+y^2)}}$. Præterea verò eadem particula M in directione M R ad M C normali sollicitabitur vi $= \frac{Say}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(x^2+y^2)}} - \frac{Sy}{a^2\sqrt{(x^2+y^2)}}$.

§. 27. Tametsi istæ expressiones tantoperè sint compositæ, ut parum ex iis ad usum deduci posse videatur, tamen si consideremus distantiam Lunæ a Terrâ, multò magis autem distantiam Solis, vehementer excedere quantitatem Terræ, ac propterea quantitates x et y respectu quantitatis a exiguas admodum esse; per approximationem satis commodas formulas ex iis derivare licebit. Cùm enim sit proximè $\frac{1}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = (a^2-2ax+x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{a^3} + \frac{3(2ax-xx-yy)}{2a^5} + \frac{15(2ax-xx-yy)^2}{8a^7}$, loco $\frac{1}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ satis tutò substitui poterit $\frac{1}{a^3} + \frac{3x}{a^4} + \frac{3(4xx-yy)}{2a^5}$. Ex his autem obtinebitur vis, quâ particula M præter gravitatem a vi Solis sive Lunæ in S existentis ad centrum Terræ C in directione M C urgetur, $= \frac{S(yy-2xx)}{a^3\sqrt{(x^2+y^2)}} + \frac{3Sx(3yy-2xx)}{2a^4\sqrt{(x^2+y^2)}}$. Præterea autem eadem particula M sollicitabitur in directione M R ad M C normali, vi $= \frac{3Sxy}{a^3\sqrt{(x^2+y^2)}} + \frac{3Sy(4xx+yy)}{2a^4\sqrt{(x^2+y^2)}} = \frac{3Sy}{a^3\sqrt{(x^2+y^2)}}\left(x+\frac{4xx-yy}{2a}\right)$. Atque cùm in his formulis termini primi posteriores multis vicibus excedant, rem crassiùs inspiciendo, particula M a vi Solis Lunæve secundùm M C

urgebitur vi $= \frac{S(yy - 2xx)}{a^3 \surd (x^2 + y^2)}$, in directione verò M R vi $= \frac{3Sxy}{a^3 \surd (x^2 + y^2)}$.

§. 28. Ex his igitur postremis formulis intelligitur ab actione Solis sive Lunæ in S existentis gravitatem particulæ M augeri si ejus situs respectu rectæ S C ita fuerit comparatus, ut sit $yy > 2xx$ hoc est tangens anguli M C P $> \surd 2$ posito sinu toto $= 1$, contrà verò gravitatem diminui, si fuerit $yy < 2xx$. Quare cùm angulus cujus tangens est $= \surd 2$ contineat 54°. 45′. circiter, si concipiatur circulus Terræ maximus quicunque A D B E, cujus planum per punctum S transeat, in eoque ducantur rectæ F C I et G C H, quæ cum rectâ S A B angulos constituant 54°. 45′.; tùm omnes Terræ particulæ in spatiis F C H et G C I sitæ gravitatis naturalis augmentum accipient, reliquæ verò particulæ in spatiis F C G et H C I positæ decrementum gravitatis patientur. Atque hinc, quâcumque Terræ particulâ propositâ, definiri poterit, quantùm ejus gravitas a Sole Lunâve in S existente vel augeatur vel diminuatur. Altera verò vis, quâ particula M in directione horizontali M R urgetur, (vide figuram ad pag. 262.) affirmativa erit, in eamque plagam, quæ in figura repræsentatur, verget, si quantitates x et y ambæ fuerint vel affirmativæ vel negativæ: contrariumque eveniet, si earum altera sit affirmativa, altera negativa. Quare si particula M sita fuerit vel in quadrante A C D vel A C E, tum vis horizontalis ad rectam C A tendet; contrà verò hæc vis ad radium C B dirigetur, si particula M sit vel in quadrante B C D vel B C E constituta. Ex quibus perspicitur effectus vel Solis vel Lunæ in ambo hemisphæria, superius scilicet D A E et inferius D B E, inter se esse ferè similes: quæ similitudo quoque in ipso æstu maris observatur.



§. 29. Ponamus nunc particulam M in ipsâ Terræ superficie esse constitutam, eritque $\surd (x^2 + y^2) = 1$ ob Terræ semi-diametrum $= 1$. Quare si particula M fuerit posita in M, existente anguli A C M sinu $= y$ et cosinu $= x$, ejus gravitas naturalis acceleratrix a Sole Lunâve in S augebitur vi $= \frac{S(y^2 - 2xx)}{a^3}$, secundùm horizontem autem in directione

M R urgebitur vi $= \frac{3\,S\,x\,y}{a^3}$. Gravitas igitur maximè augebitur, si particula M posita fuerit in D vel E, quibus in locis punctum S in horizonte apparet; ibi verò gravitatis augmentum erit $= \frac{S}{a^3}$. In punctis autem A et B, quæ punctum S vel in suo zenith vel nadir positum habent, maximum deprehendetur gravitatis decrementum, quod scilicet erit $= \frac{2\,S}{a^3}$; ita ut maximum gravitatis decrementum, duplò majus sit quàm maximum incrementum. Vis autem horizontalis $\frac{3\,S\,x\,y}{a^3}$ maxima evadet, si angulus A C M fuerit semi-rectus, id quod accidit in iis Terræ regionibus, in quibus punctum S conspicitur vel 45°. gradibus supra horizontem elevatum, vel tantundem sub horizonte depressum latet: his igitur casibus ob $x\,y = \frac{1}{2}$ fiet vis horizontalis $= \frac{3\,S}{2\,a^3}$. Hujus ergo vis effectus in hoc consistet, ut directio gravitatis mutetur, atque versùs rectam S C inclinetur angulo cujus tangens est $= \frac{3\,S}{2\,a^3}$, existente sinu toto $= 1$, quia gravitatem unitate designamus.

§. 30. Hæ itaque vires si satis essent magnæ, in ponderibus utique sentiri deberent, ac prior quidem gravitatem naturalem vel augens vel diminuens in oscillationibus pendulorum animadverti deberet, eorum motum vel accelerando vel retardando; posterior verò vis situm pendulorum quiescentium verticalem de hoc situ deflecteret, atque ad horizontem inclinatum efficeret. Quoniam autem hujusmodi perturbationes non observamus, operæ pretium erit dilucidè monstrare vires illas tam esse exiguas, ut hi effectus sensus nostros omninò effugiant. Primùm igitur cùm pro Sole sit $S = 227512$ atque $a = 20620$, erit $\frac{S}{a^3} = \frac{1}{385355701}$; pro Lunâ autem quia est $S = \frac{1}{40}$ et $a = 60$, erit $\frac{S}{a^3} = \frac{1}{8640000}$; ex quo vis Lunæ plus quàm quater major est vi Solis, cæteris paribus; atque si Solis et Lunæ vires prorsùs conspirent, erit ex iis conjunctim $\frac{S}{a^3} = \frac{1}{7057700}$ seu proximè $= \frac{1}{7000000}$. Hinc maxima gravitatis diminutio, quæ quidem oriri poterit, erit $= \frac{1}{3500000}$,

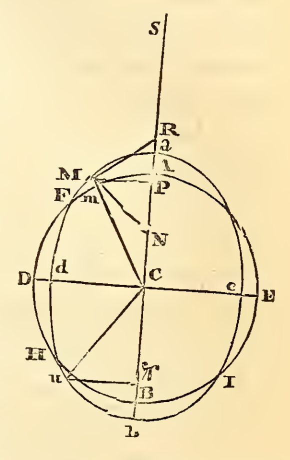
maximum verò incrementum $= \frac{1}{7000000}$; unde numerus oscillationum ejusdem penduli eodem tempore editarum, illo casu erit ut $\sqrt{(1 - \frac{1}{3500000})}$ seu $1 - \frac{1}{7000000}$ hoc verò casu ut $\sqrt{(1 + \frac{1}{7000000})}$ seu $1 + \frac{1}{14000000}$. Numeri ergo oscillationum ab eodem pendulo eodem tempore absolutarum, cùm gravitas maximè est diminuta, et cùm maximè est aucta, tenebunt rationem ut 13999998 ad 14000001, hoc est ut 4666666 ad 4666667, ex quo satis perspicitur differentiam hanc minimè percipi posse. Similis autem omninò est ratio alterius phænomeni declinationis scilicet a situ verticali comparata, quæ nunquam ad 5‴ exsurgere potest.

CAPUT TERTIUM.

De Figurâ, quam vires cùm Solis, tùm Lunæ, Terræ inducere conantur.

§. 31. Cum igitur in Capite præcedente vires tam a Sole quàm a Lunâ oriundas determinaverimus, quibus singulæ Terræ particulæ ad situm relativum cùm inter se tùm respectu centri, quod in hoc negotio tanquam quiescens consideratur, immutandum sollicitantur; ordo requireret, ut jam in ipsum motum, quo singulæ particulæ inter se commoveri debeant, inquireremus. Verùm cùm hæc investigatio sit altioris indaginis, atque opus habeat principiis mechanicis ad motum partium inter se respicientibus, qualia vix usquam adhuc reperiuntur; in hoc Capite rem secundùm principia statica ulteriùs persequi pergamus, ac figuram determinemus, quam vires Solis et Lunæ cùm seorsim tùm etiam conjunctim inducere conantur. Hunc in finem Terram undequaque materiâ fluidâ seu aquâ cinctam contemplabimur, quò sollicitationibus obedire ac figuram iis convenientem actu induere queat. In hoc scilicet negotio Solem et Lunam pariter ac ipsam Terram quiescentes concipimus, ita ut inter se perpetuò eundem situm relativum conservent, quo pacto Terræ ab actionibus Solis ac Lunæ figura permanens mox induetur, quam tamdiu retinebit, quoad item situs relativus duret. Perspicuum autem est cognitionem hujus figuræ magno futuram esse adjumento ad ejusdem figuræ transmutationem definiendam, si tam Soli quàm Lunæ motus tribuatur.

§. 32. Consideremus igitur primùm Terram in statu suo naturali, in quem se solâ vi gravitatis composuit; in quo, cùm habitura sit figuram sphæricam, repræsentet circulus A D B E seu potiùs globus ejus rotatione ortus Terram, quam præterea undique aquâ circumfusam ponimus. Versetur jam Sol vel Luna in S, a cujus vi cùm gravitas naturalis tam in A quàm in B diminuatur, in D verò et E augeatur, manifestum est Terram seu potiùs aquam illi circumfusam elevatum iri in A et B, contrà verò in D et E deprimi, idque eousque, quoad sollicitationes a Sole Lunâve in S oriundæ cum vi gravitatis ad æquilibrium fuerint redactæ. Sit itaque curva a d b e ea figura, quæ circa axem a b rotata generet Terræ formam, quam a vi ad S directâ tandem recipiet, atque cùm aquæ nunc ponantur in æquilibrio constitutæ, necesse est ut directio media omnium sollicitationum, quibus singulæ Terræ particulæ in supremâ superficie sitæ urgentur, ad ipsam superficiem sit normalis. Quare si particulam quamcunque M spectemus, ea primùm a gravitate naturali in directione M C urgetur deorsùm, idque vi, quam constanter ponimus = 1; quippe quæ est ipsa gravitas in superficie Terræ, eò quòd elevatio vel depressio particulæ distantiam ejus a centro Terræ, a quâ variatio gravitatis pendet, sensibiliter non immutet. Deinde verò eadem particula M a vi in S existente sollicitatur duplici vi, quarum alterius directio in ipsam M C incidit, alterius verò in M R normalem ad M C. Quocirca trium harum virium mediam directionem incidere oportet in rectam M N normalem ad curvam a M d, quo ipso natura hujus curvæ determinabitur.



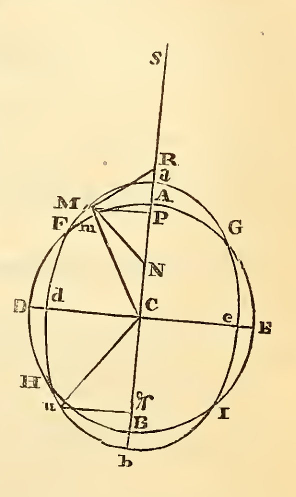
§. 33. Dubium hîc subnasci posset, quod cùm ad præsens institutum omnium virium, quibus singulæ particulæ sollicitantur, ratio haberi debeat, eam hîc negligamus, quæ a vi centrifugâ motûs Terræ diurni oritur, quippe quæ non solùm non est infinitè parva, sed multis vicibus major, quàm vires quæ vel a Sole vel Lunâ resultant: sed quia hæc vis constantem producit effectum, Terræ scilicet figuram sphæroidicam ad polos compressam, mutationem, quæ in fluxu ac refluxu maris observatur, sensibiliter afficere nequit. Deinde quamvis hîc figuram Terræ sphæricam ponamus, tamen in aberrationem præcipuè ab hac figurâ tam a Sole quàm Lunâ oriundam inquirimus: manifestum autem est, quantum figura aquæ ob vires Solis Lunæve a sphæricâ recedat, tantundem

aquæ figuram admisso motu diurno Terræ a figurâ sphæroidicâ esse discrepaturam. Quâpropter in hoc negotio sufficere potest, si, Terrâ instar sphæræ perfectæ consideratâ, definiamus quantam differentiam in aquæ figurâ vires cùm Solis tùm Lunæ producant: hâc enim determinatâ, si Terræ motus vertiginis restituatur, perspicuum erit totam figuram sub æquatore intumescere, sub polis autem subsidere; ita tamen ut ubique eadem vel elevatio vel depressio aquæ a viribus Solis Lunæve maneat. Namque si ulla etiam varietas in æstu maris a motu vertiginis Terræ proficiscatur, ea calculo monstrante nusquam major esse potest parte $\frac{1}{289}$ æstûs totalis; tantilla autem differentia notari non meretur, neque ob eam causam operæ pretium est tam complicatos et abstrusos calculos inire, ad quos perveniretur, si Terræ figura naturalis a sphæricâ diversa poneretur, atque insuper vis centrifuga a motu vertiginis Terræ in computum duceretur.

§. 34. Ad curvam igitur a M d b, cui ea quæ ex alterâ parte axis a b similis est et æqualis, determinandam, ponatur vis absoluta sive Solis sive Lunæ in S existentis = S, distantia C S = a, ac ducta semi-ordinata M P vocetur C P = x, et P M = y. Ex præcedenti igitur Capite habebitur vis, quâ punctum M vel a Sole vel Lunâ versùs C urgebitur = $\frac{S(yy - 2xx)}{a^3 \sqrt{(xx + yy)}}$, insuper autem idem punctum M sollicitabitur in directione M R normali ad M C vi = $\frac{3Syx}{a^3 \sqrt{(xx - yy)}} + \frac{3Sy(4xx - yy)}{2a^4 \sqrt{(xx + yy)}}$. Præter has verò vires punctum M gravitate naturali deorsum pellitur vi = 1 secundùm directionem M C, ita ut punctum M ab omnibus his viribus conjunctim in directione M C deorsum urgeatur vi = $1 + \frac{S(yy - 2xx)}{a^3 \sqrt{(xx + yy)}}$ ubi ob 1 sequens terminus tutò negligi potest, et in directione M R vi = $\frac{3Syx}{a^3 \sqrt{(xx + yy)}} + \frac{3Sy(4xx - yy)}{2a^4 \sqrt{(xx + yy)}}$; quarum duarum virium si M N ponatur media directio, prodibit per regulas compositionis motûs anguli C M N tangens = $\frac{3Sy(2ax + 4xx - yy)}{2a^4 \sqrt{(xx + yy)} + 2Sa(yy - 2xx)}$, quæ divisione actu institutâ, iisque terminis neglectis in quorum denominatoribus a plures quàm quatuor obtinet dimensiones, abit in hanc expressionem $\frac{3Sxy}{a^3 \sqrt{(xx + yy)}} + \frac{3Sy(4xx - yy)}{2a^4 \sqrt{(xx + yy)}}$, quæ est ea ipsa formula, quâ vis M R exprime-

batur. Quocirca angulus C M N prorsùs non pendet ab auctâ minutâve gravitate, sed tantùm a vi horizontali singulis particulis in Terræ superficie sitis impressâ.

§. 35. Quoniam verò hæc ipsa media directio M N debet esse ad curvam a M d in puncto M normalis, erit subnormalis P N $= -\frac{y\,d\,y}{d\,x}$ et C N $= \frac{x\,d\,x + y\,d\,y}{d\,x}$. Cùm igitur sit anguli M N P tangens $= \frac{-d\,x}{d\,y}$ et anguli M C P tangens $= \frac{y}{x}$, erit horum angulorum differentiæ, hæc est anguli C M N tangens $= \frac{y\,d\,y + x\,d\,x}{y\,d\,x - x\,d\,y}$, quæ superiori expressioni, quâ hæc eadem tangens designabatur, æqualis posita pro curvâ quæsitâ a M d b sequentem præbebit æquationem $\frac{y\,dy + x\,dx}{y\,dx - x\,dy} = \frac{3\,S\,x\,y}{a^3\sqrt{(xx+yy)}} + \frac{3\,S\,y\,(4\,x\,x - y\,y)}{2\,a^4\sqrt{(x\,x + y\,y)}}$, ad quam integrandam ponimus $\sqrt{(x\,x + y\,y)} = z =$ M C, et anguli M C A cosinum $\frac{x}{\sqrt{(x\,x + y\,y)}} = u$, unde fiet $x = u\,z$ et $y = z\sqrt{(1 - u\,u)}$, atque $y\,d\,x - x\,d\,y = \frac{z\,z\,d\,u}{\sqrt{(1 - u\,u)}}$, itemque $x\,d\,x + y\,d\,y = z\,d\,z$. Hac autem factâ substitutione, æquatio inventa abit in hanc $\frac{d\,z}{z\,z} = \frac{3\,S\,u\,d\,u}{a^3} + \frac{3\,S\,z\,d\,u\,(5\,u\,u - 1)}{2\,a^4}$, cujus postremus terminus, qui ob parvitatem præ reliquis ferè evanescit, si abesset, foret integrale $\frac{1}{c} - \frac{1}{z} = \frac{3\,S\,u\,u}{2\,a^3}$ seu $z = c + \frac{3\,S\,c\,c\,u\,u}{2\,a^3}$ proximè. Ponamus itaque completum integrale esse $z = c + \frac{3\,S\,c^2\,u^2}{2\,a^3} + \frac{3\,S\,c^3\,V}{2\,a^4}$, ac factâ applicatione reperietur $V = \frac{5\,u^3 - 3\,u}{3}$, ita ut habeatur $z = c + \frac{3\,S\,c\,c\,u\,u}{2\,a^3} + \frac{S\,c^3\,u\,(5\,u\,u - 3)}{2\,a^4}$, quod autem integrale proximè tantùm satisfacit; at mox aliâ viâ aperietur verum ipsius z valorem per u commodiùs et propiùs definiendi.



§. 36. Cùm autem soliditas sphæroidis, quod generatur ex conversione curvæ a d b circa axem a b, æqualis esse debeat soliditati sphæræ radio C A = 1 descriptæ, hinc constans quantitas c quæ per integrationem est ingressa, definietur: id quod commodissimè præstabitur, si utraque sphæroidis semissis, superior scilicet versùs S directa, atque inferior seorsim investigetur. Quoniam igitur pro semissi superiori est $CP = x = zu = cu + \frac{3Sccu^3}{2a^3} + \frac{Sc^3u^2(5uu-3)}{2a^4}$ et $MP^2 = y^2 = z^2(1-uu) = (1-uu)\left(cc + \frac{3Sc^3u^2}{a^3} + \frac{Sc^4u(5uu-3)}{a^4}\right)$, erit $\int yy\,dx$, cui soliditas genita conversione spatii d C P M est proportionalis, $= c^3u - \frac{c^3u^3}{3} + \frac{5Sc^4u^3}{2a^3} - \frac{3Sc^4u^5}{2a^3} - \frac{3Sc^5u^2}{a^4} + \frac{21Sc^5u^4}{4a^4} - \frac{5Sc^5u^6}{2a^4}$. Posito igitur $u = 1$, prodibit superioris semissis ut $\frac{2}{3}c^3 + \frac{Sc^4}{a^3} - \frac{Sc^5}{4a^4}$. Simili modo cùm pro inferiori semissi sit $Cu = z = c + \frac{3Sc^2u^2}{2a^3} - \frac{Sc^3u(5u^2-3)}{2a^4}$, erit ejus soliditas ut $\frac{2}{3}c^3 + \frac{Sc^4}{a^3} + \frac{Sc^5}{4a^4}$; ex quibus totius sphæroidis soliditas erit ut $\frac{4}{3}c^3 + \frac{2Sc^4}{a^3}$. Quare cùm sphæræ radio = 1 descriptæ soliditas pari modo definita, sit ut $\frac{4}{3}$, fiet $1 = c^3 + \frac{3Sc^4}{2a^3}$; hincque $c = 1 - \frac{S}{2a^3}$. Quamobrem pro curvâ quæsitâ habebitur, hoc valore loco c substituto, ista æquatio $z = 1 + \frac{S(3u^2-1)}{2a^3} + \frac{Su(5uu-3)}{2a^4}$; ex quâ natura istius curvæ luculenter cognoscitur.

§. 37. Hinc igitur perspicitur a Sole vel Lunâ in S existente aquam, cujus superficies antè erat in A, attolli in a, ita ut sit elevatio $Aa = \frac{S}{a^3} + \frac{S}{a^4}$; atque in regione oppositâ B, aquam pariter elevari per spatium $Bb = \frac{S}{a^3} - \frac{S}{a^4}$: unde patet aquas in A et B, ad eandem ferè altitudinem elevari, cùm excessus superioris elevationis super inferiorem sit tantum $\frac{2S}{a^4}$, quod discrimen respectu totius elevationis vix est sensibile. Contrà verò in regionibus lateralibus D et E, aqua circumquaque æqua-

liter deprimetur, et quidem per intervallum $D\,d = E\,e = \frac{S}{2\,a^3}$; ex quo ista depressio duplo minor est, quàm elevatio quæ in A et B accidit. In punctis præterea F, G, H et I, quæ a cardinalibus A et B distant angulo $54^0.\ 45'$ quippe pro quo est $3\,u\,u - 1 = 0$, neque elevabitur aqua neque deprimetur, sed naturalem tenebit altitudinem. In loco autem Terræ quocumque M cognoscetur aquæ vel elevatio vel depressio ex angulo A C M, cujus cosinus u est sinus altitudinis sub quâ Sol vel Luna in S existens super horizonte conspicitur ab observatore in M constituto; hoc enim in loco aqua elevata erit supra naturalem altitudinem intervallo $= \frac{S\,(3\,u\,u - 1)}{2\,a^3} + \frac{S\,u\,(5\,u\,u - 3)}{2\,a^4}$: quæ expressio si fit negativa, maris depressionem indicat. Hîc autem annotare non est opus, quòd si punctum S sub horizonte lateat, tum sinus depressionis maneat quidem u, sed negativè accipi debeat.

§. 38. Definiamus igitur primùm cùm elevationem tùm depressionem, quæ a solâ vi Solis ubique Terrarum produci deberet, si uti ponimus, omnia in statu æquilibrii essent constituta. Quoniam itaque est $S = 227512$ atque $a = 20620$ semi-diameter Terræ, si una Terræ semi-diameter assumatur 19695539 pedum Paris. erit $\frac{S}{a^3} = 0{,}5072$ ped. seu pauxillum excedet semi-pedem: valor autem $\frac{S}{a^4}$ omnino erit quantitas evanescens et imperceptibilis. Hanc ob rem in regionibus sub Sole verticaliter sitis, quæ habeant Solem vel in zenith vel nadir, aqua ultra altitudinem naturalem attolетur ad semi-pedem cum pollicis parte decimâ circiter; depressio autem maxima cadet in loca, quæ Solem in horizonte conspicient, ubi aqua ad quadrantem pedis tantum deprimetur, ex quo totum discrimen, quod a Sole in altitudine aquæ naturali oritur, ad tres quartas pedis partes circiter assurget. Iste Solis effectus autem distantiæ tantum mediocri Solis a Terrâ est tribuendus: quòd si enim Sol versetur vel in apogæo, vel perigæo, ejus effectus vel diminui vel augeri debebit in ratione reciprocâ triplicatâ distantiarum Solis a Terrâ, quia pendet a valore $\frac{S}{a^3}$. Cùm igitur orbitæ Terræ excentricitas sit $= \frac{1683}{100000}$, erit intervallum A a vel B b, dum Sol in perigæo versatur, $= 0{,}5332$ ped. sin autem Sol in apogæo sit constitutus, $= 0{,}4825$ pedum; quorum differentia ad vicesimam pedis partem ascendit: valor autem medius est $= 0{,}5072$, quem pro mediocri distantiâ Solis a Terrâ invenimus.

§. 39. Problema hoc, quod hucusque dedimus solutum, quodque maximi est momenti ad effectus cùm Solis tùm Lunæ in mari elevando et deprimendo definiendos, Newtonus ne attigit quidem, sed aliam viam secutus, non solùm indirectam, sed etiam erroneam, invenit mare a solâ vi Solis ad altitudinem duorum ferè pedum elevari debere; cùm tamen tam eandem vim Soli absolutam quàm eandem distantiam a Terrâ assumsisset, quibus nos sumus usi. Conclusit autem hunc enormem effectum ex comparatione vis Solis seu valoris $\frac{S}{a^3}$ cum vi Terræ centrifugâ a motu diurno ortâ, quâ Terra sub æquatore extenditur ac crassior redditur quàm sub polis; atque assumit elevationem aquæ a vi Solis ortam eandem tenere debere rationem ad incrementum Terræ sub æquatore a vi centrifugâ factum, quàm teneat vis Solis ad vim centrifugam. Sed prætérquam quòd hoc ratiocinium nimis infirmo superstructum fundamento, nostrâ viâ directâ, quâ sumus usi, statim evertitur: ex ipsâ enim rei naturâ, nullis precariis assumtis principiis, elevationem aquarum a vi Solis oriundam directè et luculenter determinavimus: ac si ullum etiam dubium ob integrationem per approximationes tantum institutum restaret, id mox tolletur, cùm infrà idem Problema aliâ methodo prorsus diversâ sumus resoluturi, congruentemque solutionem exhibituri.

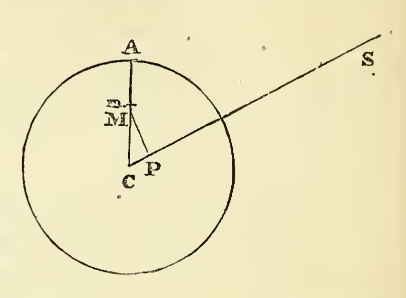
§. 40. Quamvis autem iste Solis effectus in mari tam elevando quàm deprimendo non adeò certus et planus esse videatur ob parallaxin Solis, quam 10″ assumsimus, nondum accuratissimè definitam; a quâ tam distantia Solis a Terrâ a, quàm æstimatio vis absolutæ S, pendet: tamen si rem attentiùs perpendamus, comperiemus expressionem $\frac{S}{a^3}$ perpetuò eundem retinere valorem, quæcumque Soli parallaxis tribuatur: mutatâ enim parallaxi, valor litteræ S præcisè in eadem ratione, in quâ cubus distantiæ a^3, mutabitur. Per leges enim motûs firmissimè stabilitas patebit quantitatem $\frac{S}{a^3}$ a solo tempore periodico Terræ circa Solem determinari, cujus quantitas accuratissimè est definita. Quod ut clariùs appareat, consideremus planetam quemcunque circa Solem in orbitâ ellipticâ revolventem, cujus semi-axis transversus seu distantia a Sole media sit $= a$, vis autem Solis absoluta $= S$, erit tempus periodicum semper ut $\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{S}}$; quòd si igitur tempus periodicum sit $= t$, erit t ut $\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{S}}$ et $\frac{S}{a^3}$ uti $\frac{1}{tt}$. Ad valorem autem fractionis $\frac{S}{a^3}$ absolutè inveniendum, exprimatur

a in semi-diametris Terræ, atque in minutis secundis dato tempore periodico t, erit semper $t = \frac{5064\frac{1}{2}\, a \sqrt{a}}{\sqrt{S}}$; ex quo prodit $\frac{S}{a^3} = \frac{5064\frac{1}{2} \times 5064\frac{1}{2}}{t\,t}$, positâ unitate cùm pro gravitate naturali, tùm pro unâ Terræ semi-diametro. At si tempus Terræ periodicum seu annus sidereus in minutis secundis exponatur, fiet $t = 31558164$, atque $\frac{S}{a^3} = 0{,}50723$ pedum positâ semi-diametro Terræ per observationes exactissimas 19695539 pedum Paris. reg. omnino uti antè invenimus.

§. 41. Simili modo ex superiori æquatione elevatio aquæ a vi Lunæ oriunda determinabitur; positâ enim vi Lunæ absolutâ $= L$, poni oportet $S = L$, ejusque valor proximè erit $= \frac{1}{40}$, quem a Newtono repertum tantisper retinebimus, quoad verus valor per alia phænomena accuratiùs definiatur. Quoniam itaque Lunæ a Terrâ mediocris distantia est $= 60\frac{1}{2}$ semi-diam. Terræ, erit $\frac{S}{a^3} = L \times 88{,}94$ ped. $= 2{,}223$ pedum et $\frac{S}{a^4} = L \times 1{,}47 = 0{,}037$ pedum. Cùm autem Lunæ excentricitas sit quasi $\frac{550}{10000}$; erit dum Luna in perigæo versatur $\frac{S}{a^3} = L \times 104{,}44$ ped. $= 2{,}611$ pedum et $\frac{S}{a^4} = L \times 1{,}82 =$ 0,04[illegible] pedum. At si Luna fuerit in apogæo, prodibit $\frac{S}{a^3} = L \times 75{,}74$ ped. $= 1{,}893$ pedum et $\frac{S}{a^4} = L \times 1{,}19 = 0{,}030$ pedum. Ex his igitur si Luna a Terrâ mediocriter distet, erit aquæ elevatio $A\,a = L \times 90{,}41$ pedum $= 2{,}260$ pedum elevatio autem $B\,b = L \times 87{,}47$ pedum $= 2{,}187$ pedum: ac depressio ad latera $D\,d = E\,e = L \times 44{,}47$ pedum $= 1{,}112$ pedum. Pro perigæo verò Lunæ fiet $A\,a = L \times 106{,}26$ pedum $= 2{,}656$ pedum; $B\,b = L.\ 102{,}62$ pedum $= 2{,}565$ pedum; atque $D\,d = E\,e = L.\ 52{,}22 = 1{,}305$ pedum. Pro apogæo denique Lunæ habebitur $A\,a = L.\ 76{,}93$ pedum $= 1{,}923$ pedum, et $B\,b = L.\ 74{,}55$ pedum $= 1{,}864$ pedum, atque $D\,d = E\,e = L.\ 37{,}87$ pedum $= 0{,}947$ pedum.

§. 42. Tametsi autem hac methodo non difficulter tam elevatio maris quàm depressio quæ vel a Sole vel Lunâ seorsum gignitur, sit determinata, si quidem omnia ad statum quietis redacta concipiantur; tamen nimiùm foret difficile ejusdem methodi ope easdem res definire, si Sol et Luna conjunctim agant. Quamobrem aliam methodum exponamus, cujus usus pro utroque casu æquè pateat; quæ cùm a priori penitùs sit diversa,

simul ea, quæ jam sunt eruta atque a Newtonianis diversa deprehensa, maximè confirmabit. Petita verò est hæc altera methodus ex eâ æquilibrii proprietate, quâ requiritur, ut omnes columnæ aqueæ a superficie Terræ ad centrum pertingentes sint inter se æquiponderantes. Existente igitur vel Sole vel Lunâ in S, cujus vis absoluta ponatur = S, et distantia S C = a, sit A C columna aquea a superficie Terræ A ad centrum C usque pertingens, quæ altitudo A C sit = h. Ponatur anguli A C S cosinus = u, qui simul erit sinus altitudinis sub quâ punctum S a spectatore in A constituto super horizonte elevatum conspicitur; sumaturque intervallum quodcunque C M = z, et consideretur totius columnæ elementum M m = d z. Hoc igitur elementum primò a gravitate deorsum versùs C urgebitur, cujus effectus, cùm intra Terram pro variis distantiis non satis constet, ponatur dignitati cuicunque distantiarum a centro, putà ipsi z^n proportionalis: mox enim planum fiet exponentem n nil omnino determinationes esse turbaturum. Urgebitur ergo elementum M m versùs centrum C vi $= z^n\, dz$; ex quo totius columnæ A C nisus deorsum a gravitate oriundus, erit $= \frac{h^{n+1}}{n+1}$.



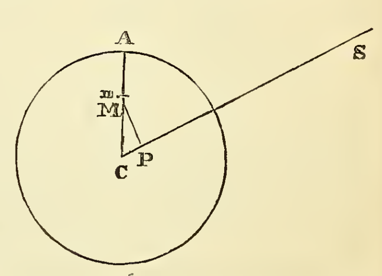
§. 43. Præterea autem elementum M m = d z a vi S sollicitabitur duplici modo, altero deorsum in directione M C, altero in directione ad illam M C normali, quæ posterior vis, cùm pondus columnæ nequaquam afficiat, tutò negligetur, solaque prior considerabitur. Demisso autem ex M in C S perpendiculo M P, positisque C P = x et P M = y, erit $\sqrt{(x^2 + y^2)} = z$, et $x = uz$ atque $y = z\sqrt{(1 - uu)}$. At ex §. 27. vis, quâ particula M m deorsum sollicitatur, est $= \frac{S(yy - 2xx)}{a^3\sqrt{(xx+yy)}} + \frac{3Sx(3yy - 2xx)}{2a^4\sqrt{(xx+yy)}} = \frac{Sz(1 - 3uu)}{a^3} + \frac{3Suz^2(3 - 5uu)}{2a^4}$. Quæ expressio per d z multiplicata, tumque integrata facto z = h, præbebit totius columnæ A C nisum a vi S oriundum $= \frac{Sh^2(1 - 3uu)}{2a^3} + \frac{Sh^3u(3 - 5uu)}{2a^4}$. Quocirca totus columnæ A C nisus deorsum tendens erit $= \frac{h^{n+1}}{n+1} + \frac{Sh^2(1 - 3uu)}{2a^3} + \frac{Sh^3u(3 - 5uu)}{2a^4}$; qui cùm in

omnibus columnis debeat esse idem, æquabitur conatui, quo columna æqualis semi-diametro Terræ 1 in statu naturali a solâ gravitate deorsum nititur, quæ vis est $= \frac{1}{n+1}$. Hinc igitur sequens emergit æquatio, $1 = h^{n+1} + \frac{(n+1) S h^2 (1 - 3uu)}{2a^3} + \frac{(n+1) S h^3 u (3 - 5uu)}{2a^4}$; ex quâ elicitur $h = 1 + \frac{S(3uu - 1)}{2a^3} + \frac{Su(5uu - 3)}{2a^4}$, quæ est ea ipsa expressio, quam suprà §. 36. alterâ methodo invenimus.

§. 44. Agant nunc vires ambæ ad Solem Lunamque directæ conjunctim; ac primò quidem designet S Solis vim absolutam, a ejus distantiam a Terra, et u sinum anguli, quo Sol suprà horizontem est elevatus. Deinde sit simili modo pro Luna L ejus vis absoluta, b ejus distantia a Terrâ, atque v sinus altitudinis Lunæ super horizonte. Ex his igitur columna aquea A C = h tam vi propriæ gravitatis quàm a viribus Solis ac Lunæ conjunctim in centrum C urgebitur vi $= \frac{h^{n+1}}{n+1} + \frac{S h^2 (1 - 3uu)}{2a^3}$ $+ \frac{L h^2 (1 - 3vv)}{2b^3} + \frac{S h^3 u (3 - 5uu)}{2a^4} + \frac{L h^3 v (3 - 5vv)}{2b^4}$, quæ æqualis esse debebit vi $\frac{1}{n+1}$. Ex hac autem æquatione resultat $h = 1$ $+ \frac{S(3uu - 1)}{2a^3} + \frac{L(3vv - 1)}{2b^3} + \frac{Su(5uu - 3)}{2a^4} + \frac{Lv(5vv - 3)}{2b^4}$. Quocirca aqua in A supra situm naturalem, quem a solâ gravitate sollicitata obtineret, a viribus Solis ac Lunæ conjunctim sollicitantibus, elevabitur per intervallum $= \frac{S(3uu - 1)}{2a^3} + \frac{L(3vv - 1)}{2b^3} + \frac{Su(5uu - 3)}{2a^4}$ $+ \frac{Lv(5vv - 3)}{2b^4}$, ex quâ expressione status aquæ vel elevationis vel depressionis ubique Terrarum cognoscetur.

§. 45. Hanc posteriorem viam secuti, non solùm actiones Solis ac Lunæ commodè conjungere potuimus, sed etiam nunc nobis licebit motûs vertiginis Terræ, et vis centrifugæ inde ortæ, rationem habere; id quod methodo priore opus fuisset insuperabile. Ponamus enim altitudinem columnæ naturalem A C, quam habitura esset a vi gravitatis et vi centrifugâ simul, seu quod eodem redit, in figurâ Terræ sphæroidicâ compressâ, esse = f, altitudinem autem quam habebit accedentibus viribus Solis ac Lunæ esse = h; atque manifestum est quantitates f et h quàm minimè ab 1 discrepare. Cùm igitur utriusque columnæ f et h idem debeat esse nisus deorsùm, columnæ autem f in quam sola gravitas

et vis centrifuga agunt, nisus sit $= \frac{f^{n+1}}{n+1} - \alpha ff$, denotante α quantitatem a vi centrifugâ in A pendentem, columnæ verò h nisus sit $= \frac{h^{n+1}}{n+1} - \alpha h^2 + \frac{S h^2 (1 - 3 u u)}{2 a^3} + \frac{L h^2 (1 - 3 v v)}{2 b^3} + \frac{S h^3 u (3 - 5 u u)}{2 a^4} + \frac{L h^3 v (3 - 5 v^2)}{2 b^4}$, erit æqualitate factâ $f^{n+1} - (n+1) \alpha ff = h^{n+1} - (n+1)\alpha h^2 + \frac{(n+1) S h^2 (1 - 3uu)}{2 a^3} + \frac{(n+1) L h^2 (1 - 3 v v)}{2 b^3} + \frac{(n+1) S h^3 u (3 - 5 u u)}{2 a^4} + \frac{(n+1) L h^3 v (3 - 5vv)}{2 b^4}$. Ponatur $h = f + s$, erit ob α quantitatem vehementer parvam, a verò et b maximas, $0 = f^n s + \frac{S f^2 (1 - u u)}{2 a^3} + \frac{L f^2 (1 - 3 v v)}{2 b^3} - 2 \alpha f s + \frac{S f s (1 - 3 u u)}{a^3} + \frac{L f s (1 - 3 v v)}{b^3} + \frac{S f^3 u (3 - 5 u u)}{2 a^4} + \frac{L f^3 v (3 - 5 v v)}{2 a^4}$, neglectis terminis in quibus s plures obtinet dimensiones, ob summam ipsius s parvitatem respectu ipsius f. Hinc itaque



$$\text{fiet } s = \frac{\frac{S (3 u u - 1)}{2 a^3} + \frac{L (3 v v - 1)}{2 b^3} + \frac{S f u (5 u u - 3)}{2 a^4} + \frac{L f v (5 v v - 3)}{2 b^4}}{f^{n-2} - \frac{2\alpha}{f} + \frac{S (1 - 3 u u)}{a^3 f} + \frac{L (1 - 3 v v)}{b^3 f}}.$$

Quòd si porrò ponatur semi-axis Terræ per polos transiens $= 1$, erit ob æquilibrium $\frac{f^{n+1}}{n+1} - \alpha ff = \frac{1}{n+1}$ et $f = 1 + \alpha$, ex quo denominator præcedentis fractionis ab unitate quàm minimè discrepabit; sub ipso enim æquatore est $\alpha = \frac{1}{578}$, ubi quidem est maximum: unde omnino ut antè elevatio aquæ a viribus Solis ac Lunæ orta supra altitudinem naturalem $s = \frac{S (3 u u - 1)}{2 a^3} + \frac{L (3 v v - 1)}{2 b^3} + \frac{S u (5 u u - 3)}{2 a^4} + \frac{L v (5 v v - 3)}{2 b^4}$; discrimen enim quod revera aderit, sensus omnino effugiet, pendebitque simul a valore exponentis n.

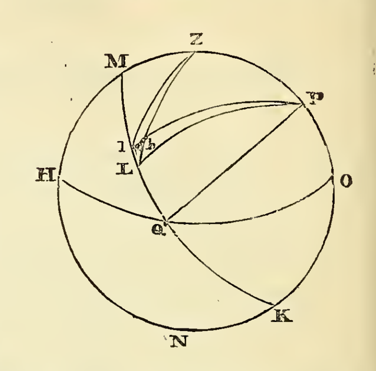
CAPUT QUARTUM.

De Fluxu ac Refluxu Maris si aqua omni inertiâ careret.

§. 46. Quæ in Capite præcedente sunt tradita respiciunt hypothesin assumtam, quâ Solem ac Lunam respectu Terræ perpetuò eundem situm tenere posuimus; ibique præcipuè statum æquilibrii, ad quem oceanus a viribus Solis et Lunæ perducatur, determinavimus. Longè aliter autem se res habet, si tam Luna et Sol quàm Terra in motum collocentur, quo casu ob perpetuam sitûs relativi mutationem nunquam æquilibrium adesse poterit; cùm enim tempore opus sit, quo data vis datum corpus ad motum perducat, duplici modo status oceani assignatus a vero discrepabit. Namque primò aqua quovis momento in eum æquilibrii situm, quem vires sollicitantes intendunt, pervenire non poterit, sed tantum ad eum appropinquabit continuò; deinde etiamsi in ipsum æquilibrii situm perveniat, in eo tamen non acquiescet, sed motu jam concepto ulteriùs feretur, uti ex naturâ motûs abundè constat. Hujus autem utriusque aberrationis ratio in inertiâ aquæ est posita, quâ fit ut aqua nec subitò in eum situm se conferat, in quo cum viribus datur æquilibrium, nec cùm hunc æquilibrii situm attigerit, ibi quiescat. Quocirca ne difficultatum multitudine obruamur, aquam omni inertiâ carentem assumamus, hoc est istius indolis, ut non solùm quovis momento se in statum æquilibrii subitò recipiat, sed ibi etiam omnem motum insitum deponendo permaneat, quamdiu iste situs viribus sollicitantibus conveniat. Hâc itaque factâ hypothesi, perspicuum est aquam quovis temporis momento in eo ipso statu fore constitutam, qui secundùm præcepta Capitis præcedentis positioni cùm Solis tùm Lunæ respondeat.

§. 47. Ut igitur in hâc hypothesi, quâ mare vis inertiæ expers ponimus, pro quovis loco ad quodvis tempus statum maris quàm commodissimè definiamus, primùm solam Lunam considerabimus, cùm in eâ præcipua æstûs maris causa contineatur, atque tam fluxus quam refluxus maris a transitu Lunæ per meridianum computari soleat: quòd si enim Lunæ effectus innotuerit, non solùm Solis effectus quoque mutatis mutandis colligetur, sed etiam effectus, qui ab ambobus luminaribus simul agentibus proficiscitur. Propositus igitur sit Terræ locus quicunque, cujus in cœlo zenith sit Z, horizon H Q O et P polus borealis, ita ut arcus P O sit hujus loci elevatio poli, et circulus P Z H N O meridianus. Sit porrò

M L K parallelus æquatori, in quo Luna jam motu diurno circumferatur, atque hoc momento reperiatur Luna in L; eritque tempus, quo Luna vel ex L ad meridianum M appellet, vel vicissim a meridiano ad L pertigit, ut angulus M P L, sive hoc tempus se habebit ad tempus unius revolutionis Lunæ, quod est 24. horarum 48′. uti se habet angulus M P L ad quatuor rectos. Sit igitur anguli M P L cosinus = t, sinus elevationis poli P O seu sinus arcûs P Z = p, cosinus = P, ac sinus declinationis Lunæ borealis = Q, qui idem est sinus distantiæ Lunæ a polo P L, hujus verò ipsius arcûs sinus sit = q, cui simul cosinus declinationis Lunæ æquatur, atque ob sinum totum constanter positum = 1, erit $Q^2 + q^2 = 1$. Cùm jam in triangulo sphærico Z P L dentur arcus P Z et P L cum angulo Z P L, reperietur per trigonometriam sphæricam arcûs Z L cosinus = $t p q + P Q$, qui simul est sinus altitudinis Lunæ supra horizontem, quem antè posuimus = v. Ex quibus erit $v = t p q + P Q$, et $3 v v - 1 = 3 (t p q + P Q)^2 - 1$, atque $5 v v - 3 = 5 (t p q + P Q)^2 - 3$; qui valores in formulis præcedentis Capitis substituti præbebunt statum maris, hoc est vel elevationem vel depressionem, pro loco proposito ad tempus assignatum.



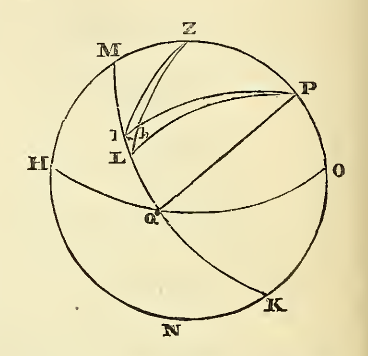
§. 48. Quòd si ergo Lunæ vis absoluta ponatur = L, ejusque a Terrâ distantia = b, erit intervallum, quo aqua supra statum naturalem elevabitur, $= \frac{L(3(tpq + PQ)^2 - 1)}{2b^3} + \frac{L(tpq+PQ)(5(tpq+PQ) - 3)}{2b^4}$, quæ expressio si fit negativa, indicat aquam infra statum naturalem esse depressam. Ponamus Lunam horizonte seu versùs austrum per meridianum transire, quo casu erit t = 1; hoc igitur tempore aqua supra statum naturalem erit elevata intervallo $= \frac{L(3(pq + PQ)^2 - 1)}{2b^3} + \frac{L(pq + PQ)(5(pq + PQ)^2 - 3)}{2b^4}$. Contrà verò dum Luna sub horizonte vel versùs boream ad meridianum appellit, fiet elevatio aquæ supra statum naturalem per intervallum $= \frac{L(3P^2Q^2 - 1)}{2b^3} + \frac{LPQ(5P^2Q^2 - 3)}{2b^4}$; quæ expressio semper est negativa, ideóque in-

dicat aquam infra statum naturalem consistere. Namque cùm P ubique sit minor unitate nisi sub ipsis polis, ac declinatio Lunæ nunquam ad 30°. assurgere possit, ex quo $Q < \frac{1}{2}$ et $QQ < \frac{1}{4}$, erit $3 P^2 Q^2$ perpetuò unitate minor; ideóque illa expressio negativa.

§. 49. De ratione autem elevationis aquæ in genere judicare licebit ex formulâ $\frac{L(3vv-1)}{2b^3} + \frac{Lv(5vv-3)}{2b^4}$, seu cùm posterior terminus vix sit sensibilis, ex solo priore $\frac{L(3vv-1)}{2b^3}$. Ex hâc autem expressione intelligitur aquæ elevationem a solâ elongatione Lunæ ab horizonte pendere, sive Luna sit super sive sub horizonte, retinet enim $3vv-1$ eundem valorem sive v sit affirmativum sive negativum. Deinde quia fit $3vv-1=0$ si Luna ab horizonte distet arcu 35°. 16'., tum aqua in ipso statu naturali erit constituta, neque elevata neque depressa. Elevabitur ergo aqua, cùm Luna ultra 35°. 16'. vel supra vel infra horizontem versetur, e contrario autem deprimetur quando Lunæ ab horizonte distantia minor est quàm 35°. 16'. Omnino autem aqua maximè erit depressa dum Luna ipsum horizontem occupat, hocque tempore infra situm naturalem subsidet intervallo $\frac{L}{2b^3} = 1,111$ pedum (§. 41.); atque de hoc situ elevabitur recedente Lunâ ab horizonte sive super sive sub Terrâ. Hinc iis in regionibus, in quibus Luna oritur et occidit, tempore 24. hor. 48'. mare bis maximè erit depressa, bisque elevata; status scilicet depressionis incidet in appulsus Lunæ ad horizontem, status autem elevationis in appulsus Lunæ ad meridianum. At quibus in regionibus Luna nec oritur nec occidit, quoniam ibi Luna altero appulsu ad meridianum maximè, altero minimè ab horizonte distat, spatio 24 h. 48'. aqua semel tantum elevabitur, semelque deprimetur: sub ipsis autem polis æstus maris omnino erit nullus, diurnus scilicet; nam variatio declinationis sola statum maris turbabit.

§. 50. Cùm igitur sub polis Terræ nullus sit fluxus ac refluxus maris, sed aqua tantum aliquantulum ascendat descendatque, prout Luna vel magis ab æquatore recedit vel ad eum accedit; videamus etiam quomodo æstus maris in aliis Terræ regionibus secundùm nostram hypothesin debeat esse comparatus. Considerabimus autem præcipuè tres regiones, quarum prima posita sit sub ipso æquatore, secunda habeat elevationem poli 30 graduum, tertia verò 60 graduum. Quia igitur in his omnibus regionibus Luna oritur atque occidit, maxima depressio aquæ ubique erit eadem, scilicet per intervallum $\frac{L}{2b^3}$ infra situm naturalem, eaque contin-

get bis, quando nimirum Luna in ipso horizonte versatur. Ab hoc itaque statu maximæ depressionis elevationes maris indicabimus et computabimus, spatiis assignandis, per quæ aqua attolletur dum Luna vel supra horizontem in M vel infra in K ad meridianum appellit, itemque dum ab utroque meridiano æqualiter distat, qui locus sit L existente angulo M P L recto. Præterea tres quoque Lunæ situs in suâ orbitâ contemplabimur, quorum primus sit, cùm Luna in ipso æquatore versatur, secundus cùm Luna habet declinationem borealem 20 graduum, tertius verò cùm Luna declinationem habet australem pariter 20 graduum. Denique in tabellâ sequente adscripsimus quantitatem anguli M P Q, ex quo tempus tam ortûs quàm occasûs Lunæ, quo aqua maximè est depressa, atque elevatio existit nulla, innotescit.



In locis sub Æquatore sitis, est elevatio Maris, dum Luna versatur in

	M	L	K	ang. M P Q.
☽ Declinatio 0°.	$\frac{3\,L}{2\,b^3} + \frac{2\,L}{2\,b^4}$	O	$\frac{3\,L}{2\,b^3} - \frac{2\,L}{2\,b^4}$	90°. 0′.
☽ Decl. boreal. 20°.	$\frac{2{,}649\,L}{2\,b^3} + \frac{1{,}549\,L}{2\,b^4}$	O	$\frac{2{,}649\,L}{2\,b^3} - \frac{1{,}549\,L}{2\,b^4}$	90°. 0′.
☽ Decl. austr. 20°.	$\frac{2.649\,L}{2\,b^3} + \frac{1{,}549\,L}{2\,b^4}$	O	$\frac{2{,}649\,L}{2\,b^3} - \frac{1{,}549\,L}{2\,b^4}$	90°. 0′.

Sub elevatione Poli 30°. erit Maris elevatio

	M	L	K	ang. M P Q.
☽ Declinatio 0°.	$\frac{2{,}250\,L}{2\,b^3} + \frac{1{,}082\,L}{2\,b^4}$	O	$\frac{2{,}250\,L}{2\,b^3} - \frac{1{,}082\,L}{2\,b^4}$	90°. 0′.
☽ Decl. boreal. 20°.	$\frac{2{,}909\,L}{2\,b^3} + \frac{1{,}880\,L}{2\,b^4}$	$\frac{0{,}087\,L}{2\,b^3} - \frac{0{,}156\,L}{2\,b^4}$	$\frac{1{,}239\,L}{2\,b^3} - \frac{0{,}154\,L}{2\,b^4}$	102°. 8′.
☽ Decl. austr. 20°.	$\frac{1{,}239\,L}{2\,b^3} + \frac{0{,}154\,L}{2\,b^4}$	$\frac{0{,}087\,L}{2\,b^3} + \frac{0{,}156\,L}{2\,b^4}$	$\frac{2{,}909\,L}{2\,b^3} - \frac{1{,}880\,L}{2\,b^4}$	77°. 52′.

Sub elevatione Poli 60°. erit Maris elevatio

	M	L	K	ang. M P Q.
☽ Declinatio 0°.	$\frac{0{,}740\,L}{2\,b^3} - \frac{0{,}125\,L}{2\,b^4}$	O	$\frac{0{,}740\,L}{2\,b^3} + \frac{0{,}125\,L}{2\,b^4}$	90°. 0′.
☽ Decl. boreal. 20°.	$\frac{1{,}760\,L}{2\,b^3} - \frac{0{,}582\,L}{2\,b^4}$	$\frac{0{,}263\,L}{2\,b^3} - \frac{0{,}514\,L}{2\,b^4}$	$\frac{0{,}092\,L}{2\,b^3} + \frac{0.158\,L}{2\,b^4}$	1[illegible]9°. 5′.
☽ Decl. austr. 20°.	$\frac{0{,}092\,L}{2\,b^3} + \frac{0{,}158\,L}{2\,b^4}$	$\frac{0{,}263\,L}{2\,b^3} + \frac{0{,}514\,L}{2\,b^4}$	$\frac{1{,}760\,L}{2\,b^3} - \frac{0.582\,L}{2\,b^4}$	50°. 55′.

§. 51. Si quis jam ex hâc tabulâ elevationem maris supra statum maximæ depressionis in mensuris cognitis definire voluerit, is loco fractionum $\frac{L}{b^3}$ et $\frac{L}{b^4}$ earum valores in pedibus Parisinis ex §. 41. substituat, habitâ ratione distantiæ Lunæ a Terrâ, prout ibidem est expositum. Consequuntur autem ex hac tabulâ multa egregia consectaria, quæ verò nondum summo cum rigore ad experientiam examinari possunt, etiamsi jam insignis convenientia deprehendatur. Aquam enim adhuc omnis inertiæ expertem ponimus; perspicuum autem est, si aquæ inertia tribuatur, tum diversa omnino phænomena oriri oportere. Quòd si igitur hi assignati effectus jam cum observationibus planè consentirent, id potiùs theoriam everteret quàm confirmaret, cùm aquam extra statum suum naturalem simus contemplati. Interim tamen satis tutò jam status maris sub ipsis polis poterit definiri, qui etsi ad experientiam examinari non potest, tamen ipsâ ratione confirmabitur. Ac primò quidem sub polis nulla erit maris mutatio diurna, cùm Luna per totum diem eandem teneat ab horizonte distantiam, id quod ipsa quoque ratio dictat, quia ibi non datur meridianus, a cujus appulsu æstus maris alibi æstimari solet. Dabitur tamen his locis mutatio menstrua, atque aqua maximè erit humilis cùm Luna in ipso æquatore versatur; quo quippe tempore perpetuò horizontem occupabit. Hinc porrò aqua sensim elevabitur prout Lunæ declinatio sive versùs boream sive versùs austrum augetur, donec tandem si declinatio fit maxima, per spatium 10 pollicum tantum elevetur; quæ mutatio cùm sit perquàm lenta, ab inertiâ aquæ vix turbabitur.

§. 52. Ex his verò iisdem formulis effectus a Sole oriundus non difficulter colligetur; tantum enim quantitates S et a, loco L et b substitui oportet, quo facto effectus Solis circiter quater minor reperietur quàm is qui a Lunâ oritur. Seorsim autem cùm Solis tùm Lunæ effectibus definitis, per conjunctionem simplicem effectus, quem ambo luminaria conjunctim producunt, determinabitur. Ponamus itaque primùm Solem Lunamque in conjunctione versari, id quod fit tempore novilunii; tum igitur neglectâ Lunæ latitudine, Sol et Luna in eodem eclipticæ loco versabuntur, atque simul ad meridianum æquè ac ad horizontem appellent. Quocirca manentibus superioribus denominationibus, erit quoque Solis declinationis sinus $= Q$, cosinus $= q$, ac pro angulo M P L cujus cosinus est $= t$, erit sinus altitudinis Solis pariter uti Lunæ $= tpq + PQ$. Ex quo dum ambo luminaria per meridianum versùs austrum transeunt, aquæ elevatio, quæ tum erit maxima, altitudinem naturalem superabit

intervallo $= \left(\frac{S}{2a^3} + \frac{L}{2b^3}\right)\left(3(pq + PQ)^2 - 1\right) + \frac{L(pq + PQ)}{2b^4} \times$ $\left(5(pq + PQ)^2 - 3\right)$, neglecto altero termino a vi Solis oriundo, cùm sensus omnino effugiat. Ad dum ambo luminaria infra horizontem ad meridianum pertingunt, erit elevatio aquæ $= \left(\frac{S}{2a^3} + \frac{L}{2b^3}\right) \times$ $(3(PQ - pq)^2 - 1) + \frac{L(PQ - pq)}{2b^4}(5(PQ - pq)^2 - 3)$. Maxima denique aquæ depressio incidet, quando luminaria vel oriuntur vel occidunt, eaque minor erit quàm altitudo aquæ naturalis intervallo $= \frac{S}{2a^3} + \frac{L}{2b^3}$. Cùm igitur $\frac{S}{2a^3}$ sit circiter subquadruplum ipsius $\frac{L}{2b^3}$, in novilunio omnes effectus Lunæ suprà recensiti, quartâ sui parte augebuntur.

§. 53. In plenilunio omnia eodem se habere modo deprehenduntur, quo in novilunio, quia enim tum Sol et Luna in oppositione versantur, erit declinatio Solis æqualis et contraria declinationi Lunæ, unde quidem pro Sole fit $-Q$, quod in novilunio erat $+Q$; at cùm Sol secundùm ascensionem rectam a Lunâ distet 180°. erit hoc casu $-t$, quod antè erat $+t$, ex quo pro plenilunio habetur sinus altitudinis Solis $= -tpq - PQ$, qui pro novilunio erat $= tpq + PQ$, ex quo quadratum hujus sinûs utroque casu est idem, ideóque etiam eadem phænomena in novilunio atque plenilunio. Deinde etiam hoc tempore aqua maximè deprimetur, cùm luminaria ambo in horizonte versantur, tumque aqua humilior erit quàm in statu naturali, intervallo $= \frac{S}{2a^3} + \frac{L}{3b^3}$. Ex hoc itaque situ donec Luna ad meridianum supra Terram appellit, aqua elevabitur per intervallum $= 3(PQ + pq)^2\left(\frac{S}{2a^3} + \frac{L}{2b^3}\right)$, tantoque iterum subsidet usque ad Lunæ obitum; tum verò rursus elevabitur usque ad appulsum Lunæ ad meridianum infra horizontem, idque per spatium $3(PQ - pq)^2\left(\frac{S}{2a^3} + \frac{L}{2b^3}\right)$, neglecto termino sequente quippe ferè insensibili. Cùm igitur sint $PQ + pq$ et $PQ - pq$ sinus distantiæ Lunæ ab horizonte dum in meridiano versatur, erunt spatia per quæ aqua tempore pleniluniorum ac noviluniorum supra statum maximè depressum elevatur, in ratione duplicatâ sinuum distantiarum Lunæ ab horizonte, dum per meridianum transit. Nisi ergo vel Luna in ipso æqua-

tore existat, vel Terræ locus sub æquatore sit situs, fluxus maris diurni ac nocturni erunt inæquales; luminaribus autem in æquatore extantibus, utraque aquæ elevatio fiet per spatium $= 3\,p\,p\left(\frac{S}{2\,a^3} + \frac{L}{2\,b^3}\right)$.

§. 54. Ut nunc in effectus, quos Sol et Luna in quadraturis siti conjunctim producunt, inquiramus; ponamus, ne calculus nimium fiat prolixus, Solem in ipso æquatore versari, quoniam tum plerumque minimus æstus observatur. Hoc itaque casu Solis declinatio erit nulla, Lunæ verò maxima, quam neglectâ latitudine assumamus 23°. 29′. cujus sinus sit $= Q$, cosinus $= q$, positâ hac declinatione boreali. Jam ponamus Lunam in meridiano in M versari, quo tempore Sol erit in horizonte; unde cùm aqua supra statum naturalem elevetur a Lunâ intervallo $\frac{L\,(3\,(p\,q + P\,Q)^2 - 1)}{2\,b^3}$, a Sole verò deprimatur intervallo $\frac{S}{2\,a^3}$, ab utrâque vi conjunctim elevabitur per spatium $\frac{L\,(3\,(p\,q + P\,Q)^2 - 1)}{2\,b^3} - \frac{S}{2\,a^3}$: at dum Luna sub horizonte ad meridianum appellit, aqua elevabitur per spatium $\frac{L\,(3\,(P\,Q - p\,q)^2 - 1)}{2\,b^3} - \frac{S}{2\,a^3}$. Sumatur inter has ambas elevationes inæquales more solito medium, eritque elevatio aquæ mediâ hac quadraturâ eveniens $= \frac{L\,(3\,p^2\,q^2 + 3\,P^2\,Q^2 - 1)}{2\,b^3} - \frac{S}{2\,a^3}$. Refluxus verò continget, cùm Luna horizontem attinget, quo tempore Sol in meridiano proximè versabitur, ex quo depressio totalis aquæ in refluxu infra statum naturalem proximè erit $= \frac{L}{2\,b^3} - \frac{S\,(3\,p\,p - 1)}{2\,a^3}$: quare a fluxu usque ad subsequentem refluxum aqua subsidet per intervallum $= \frac{3\,L\,(p^2\,q^2 + P^2\,Q^2)}{2\,b^3} - \frac{3\,S\,p\,p}{2\,a^3}$.

§. 55. Quamvis motus maris hoc modo assignatus ab inertiâ aquæ multum immutetur, tamen quia eandem ferè mutationem tam majoribus æstibus quàm minoribus infert, satis tutò assumere posse videmur spatia, per quæ aqua circa æquinoctia cùm tempore plenilunii sive novilunii, tùm etiam tempore quadraturarum actu ascendit, expressionibus inventis esse proportionalia. Quamobrem si in dato Terræ loco ex pluribus observationibus determinetur spatium medium, per quod mare a refluxu ad fluxum ascendit, tempore æquinoctiorum, tam in pleniluniis noviluniisve quàm in quadraturis, eorum ratio ad eam quæ ex formulis consequitur, proximè accedere debebit. Atque hinc ex definitâ hac ratione per ob-

servationes ratio poterit inveniri inter vires Solis et Lunæ absolutas S et L, quæ est ipsa via quâ Newtonus est usus ad vim Lunæ absolutam definiendam, cùm vis Solis sit cognita: quod negotium, cùm a Newtono non satis accuratè sit pertractatum, nos id ex istis principiis expediemus. Exprimat igitur m : n rationem intervallorum eorum, per quæ oceanus in dato Terræ loco, cùm in syzygiis luminarium quum quadraturis tempore æquinoctiorum, ascendendo descendendoque oscillatur; eritque $m : n = 3\,p\,p\left(\frac{S}{2\,a^3} + \frac{L}{2\,b^3}\right) : \frac{3\,L\,(p^2\,q^2 + P^2\,Q^2)}{2\,b^3} - \frac{3\,S\,p\,p}{2\,a^3}$; ex quâ elicitur ista proportio $m\left(q^2 + \frac{P^2\,Q^2}{p^2}\right) - n : m + n = \frac{S}{a^3} : \frac{L}{b^3}$; ex quâ cùm data sit vis a Sole orta $\frac{S}{a^3}$, deducitur vis a Lunâ oriunda $\frac{L}{b^3}$ saltem proximè. Instituamus calculum pro observationibus in Portu Gratiæ (Havre de Grace) factis, ex quibus diligenter inter se collatis pro ratione m : n prodit ista 17 : 11. Cùm igitur hujus loci elevatio poli sit circiter 50^0. erit $P = \sin. 50^0$. et $Q = \sin. 23^0. 29'$.; hincque $q\,q + \frac{P^2\,Q^2}{p\,p} = 1{,}0668$: ex quo prodibit $\frac{S}{a^3} : \frac{L}{b^3} = 7{,}1356 : 28$; ita ut vis Lunæ $\frac{L}{b^3}$ sit ferè quadrupla vis Solis $\frac{S}{a^3}$, ut jam Newtonus ex aliis observationibus conclusit: atque hanc ob rem ipsius determinationem vis Lunæ absolutæ L retinuimus.

§. 56. Si hæc, quæ de combinatione virium Lunam Solemque respicientibus sunt allata, attentiùs considerentur, mox patebit maximos æstus menstruos in novilunia ac plenilunia incidere debere; his enim temporibus tam elevatio aquæ quàm depressio a Luna oriunda a vi Solis maximè adjuvatur, cùm eodem tempore, quo Luna aquam maximè vel elevat vel deprimit, simul quoque Solis vis aquam maximè vel elevat vel deprimat. In quadraturis autem hæ duæ vires ferè perpetuò dissentiunt, ac dum Luna aquam maximè vel elevat vel deprimit, eodem tempore Sol contrarium exerit effectum, aquamque maximè vel deprimit vel elevat, ex quo minimum discrimen inter quemque fluxum ac subsequentem refluxum observabitur, æstusque erunt minimi. Quamobrem circa alias Lunæ phases æstus maris medium teneat inter maximum minimumque necesse est, quia tum vires Solis ac Lunæ nec omninò conspirant, nec sibi invicem adversantur. Per totum autem annum quibus noviluniis pleniluniisque maximus eveniat æstus, quibusque quadraturis minimus æstus respondeat, absolutè sine respectu ad situm loci habito definiri nequit. Sub

æquatore quidem ubi Luna, cùm est in æquatore, maximâ vi gaudet, dubium est nullum, quin æstus maximi in æquinoctia incidat, quando ambo luminaria in æquatore sunt posita, quæ eadem proprietas etiam in loca ab æquatore non multum dissita competit: at in locis ab æquatore magis remotis æstus maris, cùm Luna maximam habet declinationem, dantur quidem majores ex tabula, §. 50. verùm æstus mox subsequentes multo sunt minores. Quòd si autem inter binos æstus a Lunâ oriundos consequentes medium capiatur, patebit in regionibus 30°. ab æquatore remotis, quibus æstus est $\frac{2,250}{2\,b^3}$ L si Lunæ declinatio sit nulla, æstum maris medium, cùm Luna habet declinationem 20 graduum, fore $= \frac{2,074}{2\,b^3}$ L, ideóque adhuc minorem quàm cùm Luna æquatorem tenet. Contra verò sub elevatione poli 60 graduum, est æstus maris, Lunâ versante in æquatore, $= \frac{0,740}{2\,b^3}$ L, æstus autem medius, cùm Lunæ declinatio est 20°. est $= \frac{0,926}{2\,b^3}$ L, ideóque major. Ex quo consequitur in regionibus polis vicinioribus æstus maximos, non in æquinoctia, sed potius circa solstitia, incidere debere, quâ quidem in re theoria nostra per experientiam mirificè confirmatur.

CAPUT QUINTUM.

De tempore Fluxûs ac Refluxûs Maris in eâdem hypothesi.

§. 57. QUANQUAM in præcedenti Capite, quo in quantitatem æstûs maris præcipuè inquisivimus, etiam tempora, quibus tam fluxus quàm refluxus eveniat, jam indicavimus; tamen hoc Capite istud argumentum fusiùs atque ad observationes accommodatè persequemur. Observationes enim, quæ circa æstum maris institui solent, ad tria genera commodissimè referuntur; ad quorum primum pertinet maris cùm elevatio maxima tùm maxima depressio; atque indicatur quantum quovis æstu aqua cùm ascendat tùm descendat. Ad secundum observationum genus numerari convenit eas, quæ ad tempus respiciunt, quibusque definitur, quonam temporis momento ubivis Terrarum aqua cùm summam teneat altitudinem

tùm minimam. Tertium denique genus observationum ad ipsum motum maris reciprocum spectat, iisque determinatur quantâ celeritate quovis temporis momento alterna maris elevatio ac depressio absolvatur, sive momentanea mutatio, dum mare a fluxu ad refluxum transit et vicissim, investigatur. Quibus tribus rebus cùm observationes convenientissimè instituantur, iisdem theoria atque explicatio phænomenorum commodissimè tractabitur. Ac primæ quidem et tertiæ parti pro nostrâ hypothesi in præcedentibus Capitibus abundè satisfactum videtur.

§. 58. Quoniam autem a maris inertiâ aliisque circumstantiis maris motum turbantibus omnes cogitationes adhuc abstrahimus, manifestum est ubique Terrarum, si sola Lunæ vis mare agitaret, aquam maximè elevari debere cùm Luna ab horizonte longissimè fuerit remota, hoc est iis ipsis momentis quibus Luna per meridianum dati loci tam supra quàm infra Terram transit: sunt enim elevationes aquæ in duplicatâ ratione sinuum distantiarum Lunæ ab horizonte, ex quo simul successiva maris commotio cognoscitur. Excipiuntur autem hinc, ut jam notavimus, loca polis Terræ proxima, quibus Luna vel non oritur vel non occidit; ibi enim altero Lunæ ad meridianum appulsu aqua debet esse summa, altero ima. Verùm de his locis non admodum erimus solliciti; cùm tam observationes sufficientes, quibus theoria probetur, deficiant, quàm ipse maris motus indicatus rationi sit consentaneus, neque confirmatione indigeat. In Terræ locis ergo a polis satis remotis seu extra circulos polares sitis, quibus Luna intervallo 24 h. 48'. tam oritur quàm obit, elevabitur mare eodem temporis intervallo bis, totiesque deprimetur; atque utraque maxima maris altitudo continget, cùm Luna ad meridianum illius loci pervenit, minima verò cùm Luna horizontem attingit. Hinc igitur temporis intervallum inter binos aquæ fluxus seu summas elevationes interjectum constanter erit 12 h. 24'. ab anomaliis Lunæ mentem abstrahendo; at tempus summæ depressionis, cùm respondeat appulsui Lunæ ad horizontem, inter binas elevationes æqualiter non interjacebit, sed alteri elevationi eò erit propiùs, quò major fuerit cùm loci propositi elevatio poli tum Lunæ declinatio, hoc est quò majus fuerit discrimen inter ortum obitumve Lunæ et circulum horarium sextum.

§. 59. Sed conjungamus cum Lunâ vim Solis, ut nostræ conclusiones magis ad observationes perducantur. Ac primò quidem manifestum est tempore tam novilunii quàm plenilunii aquam maximè fore elevatam, quando Luna per meridianum loci transit, quippe quo momento etiam Sol ad eundem meridianum appellit, si quidem syzygia ipso meridie vel mediâ nocte celebratur. Quamobrem si novilunium pleniluniumve in

ipsum meridiem incidat; ipso quoque meridiei momento maxima habebitur aquæ elevatio; pariterque si id eveniat mediâ nocte, eodem ipso momento aqua maximam obtinebit elevationem. Verùm si conjunctio vel oppositio luminarium meridiem vel præcedat vel sequatur, tum fluxus non in ipsum meridiem incidet, sed vel tardiùs vel citiùs veniet, quia Luna his casibus tanquam primaria æstûs causa vel post vel ante meridiem ad meridianum pertingit. Atque hinc eo die, in quem sive plenilunium sive novilunium incidit, facilè poterit definiri acceleratio vel retardatio fluxûs respectu meridiei. Ponamus enim novilunium seu plenilunium celebrari n horis ante meridiem, unde cùm motus Lunæ medius a Sole diurnus sit 12°. circiter, ipso meridie Luna a meridiano jam distabit angulo horario $\frac{n}{2}$ grad. versùs ortum, ex quo Luna post meridiem demum per meridianum transibit, elapsis $\frac{n}{30}$ horis seu 2 n minutis primis. Sin autem novilunium pleniluniumve accidat n horis post meridiem, tum maris maxima elevatio 2 n minutis ante meridiem eveniet. Hæc autem momenta accuratissimè cognoscentur, si ad singulos dies transitus Lunæ per meridianum computentur; ac præterea tam ortus quàm occasus notetur, quippe quibus momentis maxima aquæ depressio respondet; majorem autem hujusmodi tabula afferet utilitatem, si insuper quovis die distantia Lunæ a Terrâ inducetur, quippe a quâ Lunæ effectus præcipuè pendet.

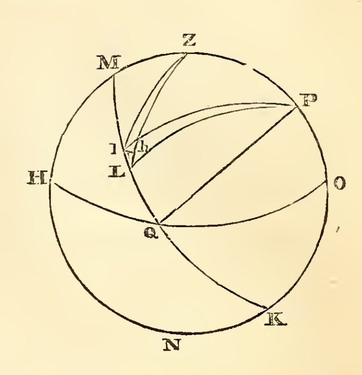
§. 60. Congruunt hæc jam apprimè cum observationibus, quibus constat, diebus novilunii vel plenilunii æstum maris accelerari si novilunium pleniluniumve post meridiem accidat, contrà verò retardari. Quamvis enim ob aquæ inertiam maxima maris elevatio non respondeat appulsui Lunæ ad meridianum, sed tardiùs eveniat, uti post docebitur, tamen similibus casibus æqualiter retardabitur; pro termino igitur fixo, si ad observationes respiciatur, non sumi debet momentum meridiei, sed id momentum, quo si Lunæ cum Sole conjunctio vel oppositio in ipsum meridiem incidit, summa aquæ elevatio observatur. Hoc igitur momento notato, uti ab iis qui hujusmodi observationes instituunt fieri solet, si plenilunium noviluniumve vel ante vel post meridiem incidat, summa maris elevatio vel tardiùs vel citiùs continget: et quidem syzygia vera n horis vel ante meridiem eveniat vel post, tum fluxus 2 n minutis vel tardiùs vel citiùs observari debebit. Atque hæc est ea ipsa regula quam celeb. Cassini in Mem. Academiæ Regiæ pro an. 1710, ex quamplurimis observationibus inter se comparatis derivavit; jubet scilicet numerum horarum, quibus

conjunctio sive oppositio luminarium verum meridiem vel præcedit vel sequitur, duplicari, totidemque minuta prima ad tempus medium notatum, quo fluxus evenire solet, vel addi vel ab eo subtrahi, quo verum fluxûs momentum obtineatur. Quoniam autem hæc correctio nititur motu Lunæ medio, perspicuum est eam correctione ulteriori opus habere, a vero Lunæ motu petitâ, quæ verò plerumque erit insensibilis, cùm summa aquæ elevatio non subitò adsit, sed per tempus satis notabile duret.

§. 61. Nisi autem luminaria proxima sint vel conjunctioni vel oppositioni, maxima maris elevatio non in ipsum Lunæ transitum per meridianum incidet. Quoniam enim Luna dum prope meridianum versatur, per aliquod tempus eandem altitudinem conservat, tantisper etiam mare eandem elevationem retinebit; et hanc ob rem si Sol interea sensibiliter vel ab horizonte recedat, vel ad eundem accedat, vis Solis ad mare elevandum vel crescet sensibiliter, vel decrescet; ex quo dum Luna prope meridianum existit, fieri potest, ut tamen mare etiamnum elevetur, vel adeò jam deprimatur a Sole. Ex his igitur perspicuum est summam maris altitudinem tardiùs seu post transitum Lunæ per meridianum accidere debere, si eo tempore Sol ab horizonte accedat, id quod evenit diebus novilunium et plenilunium præcedentibus. Contrà autem si Luna post Solem per meridianum transeat, idque vel ante Solis ortum vel ante occasum; tum, quia mare in transitu Lunæ per meridianum a vi Solis deprimitur, maximam habuit altitudinem ante appulsum Lunæ ad meridianum, id quod contingit diebus novilunium pleniluniumve sequentibus. Quando autem Sol ipsum horizontem occupat, dum Luna in meridiano versatur, tum etiamsi distantia Solis ab horizonte perquam sit mutabilis, tamen cùm elevationis vis quadrato sinûs altitudinis Solis sit proportionalis, quod omnino evanescit, etiam hoc casu maxima aquæ elevatio in ipsum Lunæ per meridianum transitum incidet, hicque casus circa quadraturas luminarium locum habet.

§. 62. Ut igitur innotescat, quamtum vires cùm Solis tùm Lunæ ad mare elevandum dato tempore vel crescant vel decrescant, dum ab horizonte aliquantillum vel recedunt, vel ad eundem accedunt, ponamus Solem Lunamve in L versari, atque inde ad punctum meridiani M progredi. Tempusculo ergo per angulum L P l $= d\,\theta$ repræsentato progredietur Luna vel Sol ex L in l atque ab horizonte removebitur intervallo L h: ad quod inveniendum sit ut antè anguli M P L cosinus $= t$, et sinus $= T$, eritque ipse angulus L P l $= d\,\theta = \frac{+\,d\,t}{\sqrt{(1 - t\,t)}} = \frac{d\,t}{T}$, ex quo orietur anguli M P l cosinus $= t + d\,t = t + T\,d\,\theta$. Si jam ponatur

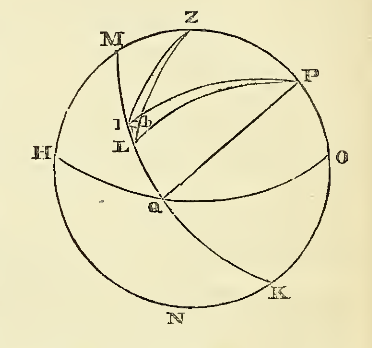
sinus elevationis poli $= P$, sinus declinationis borealis puncti $L = Q$, nam si declinatio sit australis, sinus Q sumi debet negativè, cosinus verò respondentes sint p et q, reperietur sinus altitudinis L supra horizontem $= v = t\,p\,q + P\,Q$: punctique l sinus altitudinis $v + d\,v = t\,p\,q + P\,Q + T\,p\,q\,d\,\theta$. Quocirca si Luna ponatur in L, cùm ejus vis ad mare attollendum sit $= \frac{L\,(3\,v\,v - 1)}{2\,b^3}$, erit hujus vis imcrementum tempusculo $d\,\theta$ ortum $= \frac{3\,L\,v\,d\,v}{b^3} = \frac{3\,L\,(t\,p\,q + P\,Q)\,T\,p\,q\,d\,\theta}{b^3}$. At si Sol ponatur in L, ejus vis ad mare elevandum tempusculo $d\,\theta$ capiet incrementum $= \frac{3\,S\,(t\,p\,q + P\,Q)\,T\,p\,q\,d\,\theta}{a^3}$.



Quamvis autem pro Sole et Lunâ eidem angulo $d\,\theta$ non æqualia tempora respondeant, tamen quia ea proximè ad rationem æqualitatis accedunt, sunt enim ut 24 ad $24\frac{3}{4}$ seu ut 32 ad 33, sine sensibili errore pro æqualibus haberi poterunt. Interim tamen si res accuratè definiri debeat, et vis Solis incrementum angulo $d\,\theta$ acquisitum sit $= \frac{3\,S\,(t\,p\,q + P\,Q)\,T\,p\,q\,d\,\theta}{a^3}$, erit vis Lunæ incrementum eodem tempusculo acceptum $= \frac{32\,L\,(t\,p\,q + P\,Q)\,T\,p\,q\,d\,\theta}{11\,b^3}$. Ex his intelligitur hæc incrementa tribus casibus evanescere, quorum primus evenit sub polis, quia ibi est $p = 0$; secundus, si punctum L in meridiano sit situm, tum enim fit $T = 0$; tertius denique locum habet, si punctum L in horizonte existat, ubi est $t\,p\,q + P\,Q = 0$.

§. 63. Ponamus nunc Solem in L versari ac Lunam per meridianum jam transiisse, hocque momento maximè aquam esse elevatam; jam enim ostendimus dum Sol ab horizonte recedit, aquam summam incidere post transitum Lunæ per meridianum. Hoc ergo momento necesse est, ut decrementum vis Lunæ, quod tempusculo $d\,\theta$ patitur, æquale sit incremento vis Solis eodem tempore accepto. Sit igitur anguli horarii ad polum sumti quo Luna jam a meridiano recessit, cosinus $= n$, sinus $= N$, atque sit Lunæ declinationis borealis sinus $= R$, cosinus $= r$, ex quibus orietur decrementum vis Lunæ tempusculo $d\,\theta$ ortum $= \frac{3\,L\,(n\,p\,r + P\,R)\,N\,p\,r\,d\,\theta}{b^3}$, quod cùm æquale esse debeat incremento vis Solis eodem tempusculo

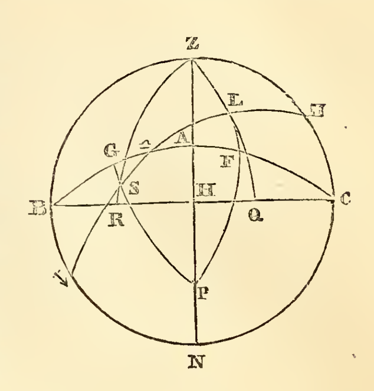
nato $= \frac{3 S (t p q + P Q) T p q d \theta}{a^3}$, denotante Q sinum declinationis borealis Solis, et q ejus cosinum, habebitur hæc æquatio $\frac{L (n p r + P R) N r}{b^3}$ $= \frac{S (t p q + P Q) T q}{a^3}$, neglectâ fractione $\frac{3}{5}\frac{2}{3}$, per quam incrementum vis Lunæ multiplicari deberet. Quoniam autem Luna a meridiano non procul distabit, poni poterit n = 1, atque cùm sit proximè $\frac{L}{b^3} = \frac{4 S}{a^3}$, obtinebitur iste valor N = $\frac{T q (t p q + P Q)}{4 r (p r + P R)}$; qui in tempus conversus dabit temporis spatium, quo aqua post transitum Lunæ per meridianum maximam altitudinem attingit.



Sub æquatore ergo erit N $= \frac{T t q q}{4 r r}$, ob P = o et p = 1; quare si declinationes luminarium vel negligantur vel æquales assumantur, ita ut sit q q = r r, fiet N $= \frac{T t}{4}$, cujus expressionis valor extat maximus si angulus M P L sit 45°. quo casu erit N = $\frac{1}{8}$, et angulus respondens = 7°. 11′. qui indicat aquam summam 30 minutis post transitum Lunæ per meridianum contingere debere: totidemque minutis aqua ante transitum Lunæ per meridianum maximè erit elevata, si Sol tum versùs occasum versetur angulo M P L = semi-recto. Quamobrem si Luna ad meridianum appellat horâ nonâ sive matutinâ sive pomeridianâ, fluxus demum post semi-horam eveniet, at si horâ tertiâ appellat Luna ad meridianum, aqua summa 30′. antè observabitur: in aliis verò Terræ regionibus ista aberratio magis est irregularis; interim tamen satis prope ex formulâ datâ per solam æstimationem potest definiri.

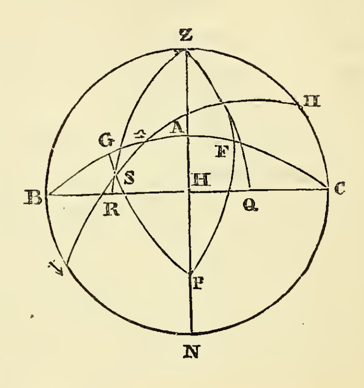
§. 64. Quòd si autem hanc rem curatiùs investigare velimus, amborum luminarium declinationes non pro arbitrio fingere licet, pendent enim a se mutuò maximè ob angulum horarium M P L inter ea interjectum datum: ut igitur pro datâ Lunæ phasi aberrationem maximæ aquæ elevationis a transitu Lunæ per meridianum determinemus, repræsentet nobis circulus Z B N C verticalem primarium, B C horizontem, Z N meridianum per dati loci zenith Z et nadir N ductum, atque æquator sit B A C, polus australis p, et ecliptica ♊ ♎ ♐. Constitutus nunc sit Sol in S et

Luna in L, quæ modò per meridianum transierit, quo tempore ponimus aquam maximè esse elevatam. Ponamus porrò longitudinis Solis ab æquinoctio verno computatæ sinum esse = F, cosinum = f; Lunæ verò longitudinis sinum esse = G, cosinum = g; sitque inclinationis eclipticæ B ♎ ♐ sinus = M, cosinus = m. Ex his definientur declinationes cùm Solis tùm Lunæ, quarum sinus antè erant positi Q et R; erit scilicet Q = F M, R = G M; hincque q = $\sqrt{(1 - F^2 M^2)}$ et r = $\sqrt{(1 - G^2 M^2)}$. Deinde angulus S p L æqualis est angulo cujus tangens est $\frac{m F}{f}$ demto angulo cujus tangens est $\frac{m G}{g}$; hujus verò ejusdem anguli ob angulos S p Z et L p Z datos, quorum sinus sunt positi T et N, tangens quoque est $\frac{n T + N t}{n t - N T}$, quæ tangens propter sinum N valde parvum proximè est = $\frac{T}{t} + \frac{N}{t\,t}$. Ponatur autem K pro sinu anguli qui excessus est anguli habentis tangentem = $\frac{m F}{f}$ super angulum cujus tangens est $\frac{m G}{g}$, et k pro cosinu, reperietur T = K — N k et t = k + N K scripto 1 pro n: quibus valoribus substitutis prodibit N = $\frac{K q (k p q + P Q)}{4 r (p r + P R) + (2 k^2 - 1) p q^2 + k P Q q}$ ex æquatione N = $\frac{T q (t p q + P Q)}{4 r \; (p r + P R)}$, paragr. præced.



§. 65. Ponamus nunc Lunam in quadraturis versari ac primò quidem in primo post novilunium quadrante, ita ut arcus L S futurus sit 90°. erit G = f, et g = — F; unde Q = M F et R = M f, ex quibus prodibit K = sin.(Atang. $\frac{m F}{f}$ —Atang. $\frac{-m f}{F}$) atque k ejusdem anguli cosinui æquabitur. Quare his tempestatibus aqua maximè elevata post transitum Lunæ per meridianum, intervallo temporis quod in arcum æquatoris conversum dabit angulum cujus sinus erit N = $\frac{K q (k p q + P Q)}{4 r (p r + P R) + (2 k^2 - 1) p q^2 + k P Q q}$.
Pro posteriore verò quadraturâ post novilunium, erit G = — f et g = F,

unde erit $Q = MF$ et $R = -Mf$, ex quibus fit ut antè $K = \sin.\left(\text{Atang.}\frac{mF}{f} - \text{Atang.}\frac{-mf}{F}\right)$ et $k =$ cosinui respondenti. Ne autem hic signa + et — calculum confundant, notari convenit K esse sinum arcûs, qui restat, si ascensio recta Lunæ subtrahatur ab ascensione rectâ Solis; atque k esse ejusdem arcûs cosinum. Ponamus exempli causâ Solem in initio Arietis versari, erit longitudo Solis$= 0^0$. seu 360^0. et longitudo Lunæ $=$ vel 90^0. vel 270^0. unde fiet $F = 0$, $f = 1$, $G = \mp 1$, et $g = 0$, atque $Q = 0$. Præterea ascensio recta Solis est 360^0. et ascensio recta Lunæ vel 90^0. vel 270^0.; utroque casu ergo fit $k = 0$; unde etiam prodit $N = 0$; quod idem evenit, si Sol versetur in initio Libræ. In utroque igitur æquinoctio, dum Luna in quadraturis versatur, aqua maximè erit elevata eo ipso momento, quo Luna ad meridianum appellit.



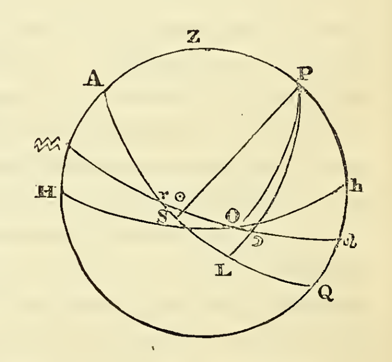
§. 66. Sit porrò Sol in solstitio æstivo, Luna verò in ultimo quadrante, erit longitudo Solis 90^0. Lunæ verò $= 0^0$. unde fit $F = 1, f = 0$; $G = 0$, $g = 1$, indeque $Q = M$ et $R = 0$; itemque $q = m$ et $r = 1$. Solis verò ascensio recta habebitur 90^0. Lunæ verò $= 0^0$. ex quo $K = 1$ et $k = 0$. Hinc ergo fit $N = \frac{mMP}{(4 - m^2)p}$. Pro primâ autem quadraturâ est longitudo Lunæ 180^0. unde $G = 0$, $g = -1$, at ut antè $F = 1$, $f = 0$; ergo $Q = M$, $R = 0$, itemque $q = m$ et $r = 1$. Cùm igitur Lunæ ascensio recta sit 180^0. erit $K = \sin. -90^0. = -1$, et $k = 0$, ex quibus fit $N = \frac{-mMP}{(4 - m^2)p}$. Quoniam autem est $4 > m^2$, dum Sol in solstitio æstivo versatur maxima aquæ elevatio in ultimâ quadraturâ continget post Lunæ transitum per meridianum supra Terram, priore verò quadraturâ ante hunc transitum, hæcque æquatio eò erit major, quò major fuerit elevatio poli; sub æquatore enim omnino evanescit. Sit poli elevatio 45^0. fietque his regionibus $N = \pm \frac{Mm}{4 - m^2}$; quare cùm sit M sinus 23^0. $29'$. prodibit $N =$ sinui anguli 6^0. $33'$.; qui in tempus conversus dat $26'$. In primâ igitur quadraturâ totidem minutis ante transitum Lunæ per meridianum aqua maximè erit elevata, in ultimâ verò qua-

draturâ tot minutis post transitum. Contrarium evenit si vel Luna sub Terra ad meridianum appellat, vel Sol in solstitio hyemali versetur. Ex his igitur formulis, si tabulæ adhibeantur, non erit difficile pro quovis loco Terræ ad quodvis tempus definire, quantum maxima aquæ elevatio transitum Lunæ per meridianum vel præcedere vel sequi debeat; cujusmodi supputationes maximam etiam afferent utilitatem, quando etiam inertiæ aquæ ratio habebitur.

§. 67. Quoniam igitur satis est expositum, quo momento mare maximè sit elevatum, maximam quoque maris depressionem definire aggrediamur. Ac primò quidem manifestum est, si sola Luna mare agitaret, tum minimam aquæ altitudinem observatum iri, eo ipso momento, quo Luna in horizonte versetur: atque hinc perspicuum est, idem usu venire debere, si Sol eodem momento quoque in horizonte existat, id quod accidit cùm noviluniis tùm pleniluniis. Præterea verò etiam ima aqua respondebit situi Lunæ in horizonte, si eo tempore Sol meridianum occupet, quia tum vis Solis per notabile temporis intervallum neque augetur nec diminuitur, etiamsi tum aqua non tantum deprimatur, quàm circa novilunia ac plenilunia. Ponamus igitur, quò reliquos casus evolvamus, dum Luna horizontem occupat, Solem ab horizonte removeri; hoc ergo casu aqua jam elevabitur, ex quo necesse est imam aquam ante adventum Lunæ ad horizontem extitisse, contrà verò si dum Luna in horizonte versatur, Sol ad horizontem appropinquet, aqua tardiùs scilicet post appulsum Lunæ ad horizontem continget. Ponamus itaque Lunam ante ortum sub horizonte H h in ☽ adhuc versari, Solemque in ⊙ esse positum, unde ad meridianum P Z H progrediatur, hocque ipso momento aquam maximè esse depressam. Necesse igitur est, ut decrementum momentaneum vis Lunæ ad mare movendum æquale sit incremento momentaneo vis Solis. Ad hanc æqualitatem declarandam sit anguli ☽ P O ad polum sumti, distantiam Lunæ a suo ortu O indicantis, sinus = V et cosinus = v, qui ob angulum ☽ P O valde parvum tutò sinui toti 1 æqualis concipi potest. Invento ergo angulo hoc ☽ P O seu arcu æquatoris illi respondente, eoque in tempus converso, constabit quanto temporis intervallo ima aqua appulsum Lunæ ad horizontem præcedat: idem verò calculus tam ad Lunæ occasum quàm ad accessionem Solis ad horizontem facilè accommodabitur.

§. 68. Positis nunc A ♈ a æquatore ac ♒ ♈ ♌ ecliptica, sit elevationis poli P h sinus = P, cosinus = p; sinus declinationis Lunæ borealis ☽ L = R, cosinus = r; ex quibus fiet anguli A P O cosinus $= \frac{-PR}{pr}$,

quia Lunæ, cùm in horizontem O pervenit, altitudo evanescit. Cùm igitur anguli A P O sinus sit $= \frac{\sqrt{(p^2 r^2 - P^2 R^2)}}{p\,r} = \frac{\sqrt{(1 - P^2 - R^2)}}{p\,r}$ $= \frac{\sqrt{(p\,p - R\,R)}}{p\,r}$, erit anguli A P ☽ sinus $= \frac{v\sqrt{(p\,p - R\,R)} - V\,P\,R}{p\,r}$, et cosinus $= \frac{-v\,P\,R - V\sqrt{(p\,p - R\,R)}}{p\,r}$, unde emergit decrementum momentaneum vis Lunæ $= \frac{3\,L\,V\sqrt{(p\,p - R\,R)}\,(\sqrt{(p\,p - R\,R)} - V\,P\,R)\,d\,\theta}{b^3}$ $= \frac{3\,L\,V\,(p\,p - R\,R)\,d\,\theta}{b^3}$, ob v = 1 et V valde exiguum. Sit porrò Solis declinationis borealis ⊙ S sinus = Q et cosinus = q, atque anguli A P ⊙ sinus = T, cosinus = t, erit vis Solis incrementum momentaneum $= \frac{3\,S\,(t\,p\,q + P\,Q)\,T\,p\,q\,d\,\theta}{a^3}$, quod illi vis Lunæ decremento æquale est ponendum, siquidem maris altitudo hoc tempore est minima. Quare cùm sit ferè $\frac{L}{b^3} = \frac{4\,S}{a^3}$, ista habebitur æquatio $4\,V\,(p\,p - R\,R) = T\,p\,q\,(t\,p\,q + P\,Q)$, quæ præbet $V = \frac{T\,p\,q\,(t\,p\,q + P\,Q)}{4\,(p\,p - R\,R)}$: cùm igitur hoc pacto innotescat angulus O P ☽, is in tempus conversus dabit temporis spatium, quo summa maris depressio ante ortum Lunæ contingit. At si punctum O designet Lunæ occasum, idem angulus præbebit tempus post Lunæ occasum, quo mare maximè deprimetur. Intelligitur ex formulâ inventâ quibus casibus ima aqua in ipsum appulsum Lunæ ad horizontem incidat; hoc scilicet primò evenit, si T = 0, hoc est si Sol in meridiano versetur, deinde si t p q + P Q = 0, id est si Sol quoque horizontem occupet; quos binos casus jam notavimus.



§. 69. Sit locus noster Terræ sub æquatore situs, seu elevatio poli nulla, erit P = 0, et p = 1, unde efficitur $V = \frac{T\,t\,q\,q}{4\,(1 - R\,R)} = \frac{T\,t\,q\,q}{4\,r\,r}$, in quâ formulâ cùm q et r denotent cosinus declinationum Solis ac Lunæ, non multum inter se discrepabunt; ponamus enim alteram declinationem esse maximam, alteram verò minimam seu = 0, erit tamen cosinuum ratio

minor quàm $1 : \surd \frac{3}{4}$, ex quo fractio $\frac{q\,q}{r\,r}$ semper intra hos limites $\frac{4}{5}$ et $\frac{3}{4}$ continebitur. Quòd si ergo hanc ab æqualitate aberrationem negligamus, id quod tutò facere possumus, quia rem tantùm prope definire conamur, habebitur $V = \frac{T\,t}{4} = \frac{2\,T\,t}{8}$. Denotat autem $2\,T\,t$ sinum dupli anguli horarii quo Sol a meridiano distat, et hanc ob rem ad momentum maximæ depressionis aquæ assignandum, videndum est quâ diei horâ Luna ad horizontem appellat, hujusque temporis vel a meridie vel mediâ nocte intervallum capiatur, atque in arcum æquatoris convertatur. Hujus deinde arcûs vel anguli sumatur duplum, hujusque dupli sinus, cujus pars octava præbebit sinum anguli, qui in tempus conversus dabit temporis intervallum, quo ima aqua Lunæ appulsum ad horizontem vel præcedit vel sequitur; id quod ex notatis circumstantiis discernere licet. Sic si Luna horâ 9 matutinâ adoriatur, erit tempus usque ad meridiem 3 horarum, angulusque respondens 45^0. cujus dupli sinus est ipse sinus totus, cujus pars octava sit sinus anguli $7^0.\ 11'$. cui tempus respondet ferè 30 minutorum, tantum itaque ima aqua ortum Lunæ præcedet.

§. 70. Ut hæc ad datum Lunæ cum Sole aspectum accommodari queant, ponamus longitudinis Solis ♈ ☉ sinum esse $= F$, cosinum $= f$ longitudinis verò Lunæ ♈ ☽ sinum esse $= G$, cosinum $= g$; atque inclinationis eclipticæ ☊ ♈ a sinum $= M$, cosinum $= m$. His positis erit $Q = M\,F$, et $R = M\,G$; atque ascensionis rectæ Solis ♈ S tangens reperietur $= \frac{m\,F}{f}$, Lunæ verò ascensionis rectæ ♈ L tangens $= \frac{m\,G}{g}$. Subtrahatur ascensio recta Solis ab ascensione rectâ Lunæ, et differentiæ sinus sit $= K$, cosinus $= k$. Cùm igitur anguli ☉ P ☽ sit sinus $= K$ et cosinus $= k$, anguli verò A P ☽ sinus $= \frac{\surd(p\,p - R\,R) - V\,P\,R}{p\,r}$ ob $v = 1$, et cosinus $= \frac{-P\,R - V\surd(p\,p - R\,R)}{p\,r}$, erit anguli A P ☉ sinus $= T = \frac{(k + K\,V)\surd(p\,p - R\,R) - k\,P\,R\,V + K\,P\,R}{p\,r}$ et cosinus $= t = \frac{(K - k\,V)\surd(p\,p - R\,R) - K\,P\,R\,V - k\,P\,R}{p\,r}$; quibus valoribus substitutis, simulque sinu V tanquam valde parvo considerato, reperietur sinus $V = \frac{(K\,P\,R + k\surd(p\,p - R\,R))\,q\,(K\,q\surd(p\,p - R\,R) - k\,P\,R\,q + P\,Q\,r)}{4\,r\,r\,(p\,p - R\,R)}$.

Sub æquatore autem, quo fit $P = 0$, $V = \frac{K\,k\,q\,q}{4\,r\,r}$: ex quo pro æquatore

regula superior a distantiâ Solis a meridiano petita simul ad differentiam ascensionalem Solis et Lunæ potest accommodari, ita ut maneat invariata. Sed ad præsens institutum, quo tantum veritatem causæ fluxûs ac refluxûs maris exhibitæ declarare annitimur, non opus est hæc pluribus persequi, quippe quæ potissimum ad accuratissimas æstûs marini tabulas supputandas pertinent, quæ res in propositâ quæstione illustrissimæ Academiæ non contineri videtur.

CAPUT SEXTUM.

De vero æstu Maris, quatenus à Terris non turbatur.

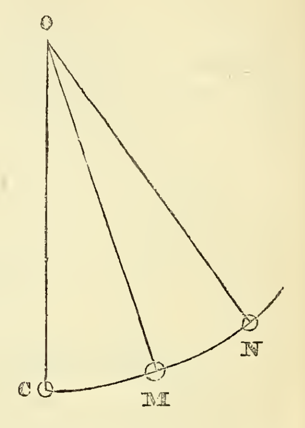
§. 71. Quæ hactenus ex viribus Solis ac Lunæ circa æstum maris fusiùs deduximus, eâ hypothesi nituntur, assumtâ, qua aquam inertiæ expertem posuimus: quamobrem non est mirandum si plerique effectus assignati cum phænomenis minùs congruant, atque adeo pugnare videantur; quòd si enim inter se prorsus convenirent, theoria non solùm non eo consensu confirmaretur, sed potiùs omnino subverteretur, cùm quilibet facilè agnoscat ob aquæ inertiam determinationibus exhibitis ingentem mutationem inferri debere. Quæ autem ex deductis conclusionibus maximè ab experientiâ dissentiunt, potissimum quantitatem elevationis aquæ ac temporis momentum, quo tam summa maris elevatio quàm ima depressio contingere solet, respiciunt. Nusquam enim ubi quidem mare est liberum atque apertum, tam exiguum discrimen inter fluxum ac refluxum in aquæ altitudine observatur, quale in præcedentibus definivimus, quatuor scilicet pedum tantum; quæ elevatio insuper tamen maxima est deprehensa, ac tum solùm oriunda, quando tum regio prope æquatorem est sita, quàm vires luminarium inter se maximè conspirant. Experientiâ namque constat, plerisque in locis, si æstus contingat maximus, aquam non solùm ad altitudinem duplo majorem, sed etiam quadruplam, imò nonnullis in locis adeo decuplam attolli; quanquam hæc enormis elevatio non soli inertiæ aquæ, sed maximam partem vicino continenti ac littorum situi est tribuenda, uti in sequenti Capite clarissimé monstrabitur. Deinde etiam quod ad tempus attinet, nusquam illis ipsis momentis, quæ assignavimus, fluxus ac refluxus unquam contingunt, nec etiam tempestatibus hîc definitis fluxus maximi vel minimi, sed ubique tardiùs evenire constanter

observantur; cujus quidem retardationis causa in ipsâ aquæ inertiâ posita esse primâ etiam fronte perspicitur.

§. 72. Quantumvis autem agitatio maris in præcedentibus Capitibus determinata ab observationibus dissentiat, tamen complures circumstantiæ sese jam præbuerunt, experientiæ tantopere consentaneæ, ut ampliùs dubitare omnino nequeamus, quin in viribus Solem Lunamque respicientibus, quas non temerè assumsimus, sed aliunde existere demonstravimus, vera et genuina æstûs maris causa contineatur. Hanc ob rem jam meritò suspicari licet, dissensiones quæ inter theoriam nostram, quatenus eam assumtæ hypothesi superstruximus, et experientiam intercedunt, ab aquæ inertiâ aliisque circumstantiis, quarum nullam adhuc rationem habuimus, proficisci. Quocirca si omnia inertiæ ratione habitâ ad observationes propiùs accedant, id quidem nostræ theoriæ maximum afferet firmamentum, atque simul omnes alias causas, quæ præter has vel sunt prolatæ vel proferri possunt, excludet, irritasque reddet. Cùm igitur consensum hujus theoriæ cum phænomenis, mox simus evidentissimè ostensuri, quæstioni ab inclytâ Academiâ propositæ ex asse satisfecisse jure nobis videbimur: cùm non solum nullas vires imaginarias effinxerimus, sed etiam virium Lunam Solemque respicientium existentiam aliunde dilucidè evicerimus. Neque vero in hoc negotio cum plerisque Anglorum ad qualitates occultas sumus delapsi, verùm potius causam istarum virium modo rationali et legibus motûs consentaneo in vorticibus constituimus, quorum formam atque indolem luculenter explicare possemus; idque fecissemus, nisi ab aliis cùm jam satis esset expositum, tùm etiam ab illustrissimâ Academiâ in præsente quæstione non requiri videatur.

§. 73. Dum igitur hactenus aquæ omnem inertiam cogitatione ademimus, ipsi ejusmodi qualitatem affinximus, quâ viribus sollicitantibus subitò obsequeretur, seque in instanti in eum statum reciperet, in quo cum viribus in æquilibrio consisteret; hocque pacto aquam non solùm subitò omnis motûs capacem posuimus, sed etiam ita comparatam, ut quovis momento omnem pristinum motum amittat. Longè aliter autem res se habet, si inertiæ ratio in computum ducatur; hæc enim efficit ut primò aqua non subitò se ad eum situm componat, quem vires intendunt, sed pedetentim per omnes gradus medios ad eum accedat; deinde verò eadem inertia in causa est, quòd aqua, cùm in statum æquilibrii pervenerit, ibi non acquiescat, sed ob motum insitum ultrà progrediatur, quoad omnem motum a potentiis renitentibus amittat. Ex quo perspicuum est, admissâ inertiâ aquæ, a potentiis sollicitantibus motum omninò diversum actu imprimi debere ab eo, quem reciperet, si inertiâ privata

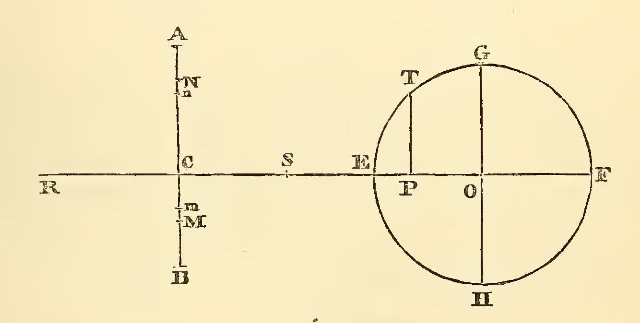
esset; cujus discriminis ratio exemplo corporis penduli commodè ob oculos poni potest. Ponamus enim corpus pendulum O C ob gravitatem situm tenens verticalem, a vi quâpiam in latus secundùm directionem C M sollicitari. Si nunc hoc pendulum inertiâ careret, seu ejusmodi esset indolis, cujus aquam hactenus sumus contemplati, tum subitò situm O M acciperet, in quo hæc vis cum gravitate æquilibrium teneret. At cùm pendulum inertiâ præditum consideratur, post aliquod demum tempus elapsum ad situm O M perveniet: ac deinde quia motu accelerato eò pertingit, ibi non quiescet, sed ultrà excurret, putà in N usque, ita ut spatium C N ferè sit duplo majus spatio C M, prouti calculus clarè indicat. Propter inertiam igitur pendulum primùm tardiùs vi sollicitanti obtemperat, atque a situ æquilibrii recedit; deinde verò etiam magis recedit, majoremque excursionem conficit, quàm si inertiâ careret; quæ sunt eæ ipsæ duæ res, in quibus theoria antè exposita ab experientiâ maximè dissentire deprehensa est.



§. 74. Si nunc istud penduli exemplum ad nostrum casum æstûs maris transferamus, primò ingens similitudo in situ penduli verticali ac statu maris naturali, quem obtinet remotis potentiis externis, observatur. Nam quemadmodum pendulum, si in quamcunque plagam de situ verticali declinetur, propriâ vi gravitatis se in eundem recipit, ita etiam aqua, si ex situ suo æquilibrii depellatur, vi gravitatis se ad eundem componit, ac præterea pariter ac pendulum oscillationes peragit, cujusmodi oscillationum casus in aqua observati passim inveniuntur expositi. Deinde etiam simili modo, quo pendulum, mare quò magis ex situ suo naturali fuerit deturbatum, eò majorem habebit vim sese in situm æquilibrii restituendi. Quòd si igitur mare a viribus externis, Solis scilicet ac Lunæ, mox elevetur mox deprimatur, necesse est ut inde motus oscillatorius seu reciprocus oriatur æstui maris omnino similis, qui autem per leges motûs difficulter definiri queat accuratè quidem; nam vero proximè, hoc non adeo erit difficile. Duæ autem sunt res, quæ absolutam ac perfectam totius motûs determinationem summoperè reddunt difficilem, quarum altera physicam spectat, atque in ipsâ fluidorum naturâ consistit, quorum motus difficulter ad calculum revocatur, præcipuè si quæstio sit de amplissimo oceano, qui aliis in locis elevetur, aliis verò deprimatur

Altera autem difficultas in ipsâ analysi est posita, eò quòd iste motus maris reciprocus prorsus sit diversus ab omnibus oscillationibus a mathematicis adhuc consideratis: vires enim Lunæ ac Solis mare sollicitantes neque a situ corporis oscillantis, neque ab ejus celeritate pendent, uti id usu venit in omnibus oscillationum casibus etiam nunc expositis, sed eæ vires a situ luminarium respectu Terræ, ideóque a tempore determinantur, cujusmodi oscillationes nemo adhuc, quantum quidem constat, calculo subjecit.

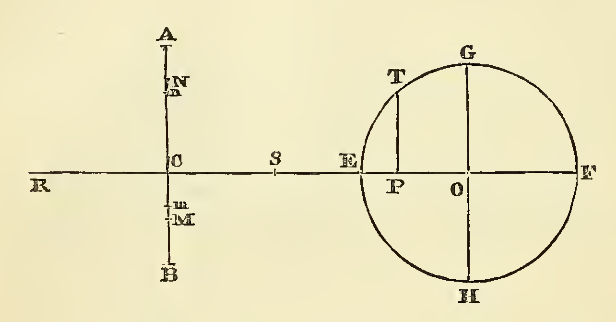
§. 75. Quod quidem ad priorem difficultatem physicam attinet, res hoc quidem tempore ferè desperata videtur; quamquam enim ab aliquo tempore theoria motûs aquarum ingentia sit assecuta incrementa, tamen ea potissimum motum aquarum in vasis et tubis fluentium respiciunt, neque vix ullum commodum inde ad motum oceani definiendum derivari potest. Quamobrem in hoc negotio aliud quicquam præstare non licet,



nisi ut hypothesibus effingendis, quæ a veritate quàm minimè abludant, tota quæstio ad considerationes purè geometricas et analyticas revocetur: alteram autem difficultatem mathematicam, etiamsi difficillimis integrationibus sit involuta, tamen feliciter superare confidimus. Considero scilicet superficiem aquæ R S, quæ hoc in situ æquilibrium teneat cum reliqua aqua, remotis viribus externis; his verò accedentibus alternis vicibus attollatur in A, deprimaturque in B. Quòd si igitur aqua in M usque sit depressa, atque externæ vires Solis ac Lunæ subitò cessarent, tum vi gravitatis propriæ conaretur sese elevare usque in situm R S naturalem, isteque conatus eò erit major, quò majus fuerit spatium C M quo a situ naturali distat. A veritate itaque non multum recedemus, si hanc vim ipsi spatio M C ponamus proportionalem: quamobrem posito spatio M C = s erit vis, quæ aquæ superficiem in M usque depressam attollet $= \frac{s}{g}$, quæ hypothesis ad veritatem eò propiùs accedit, quòd sponte

indicat, si aquæ superficies supra C jam sit elevata, tum vim fieri negativam, adeóque aquam deprimere. Præterea verò eadem hypothesis confirmatur pluribus phænomenis aquæ nisum respicientibus, ita ut de ejus veritate ampliùs nullum dubium supersit.

§. 76. Ponamus jam aquam in M constitutam urgeri a solâ Lunâ, atque ut calculus per se molestus minus habeat difficultatis, sit locus C sub ipso



æquatore situs, Lunæque declinatio nulla, ex quo Luna in circulo maximo per loci zenith transeunte æquatore scilicet circumferetur: sit E G F H iste circulus, cujus radius ponatur $= 1$, atque E F repræsentet horizontem, et G zenith. Positis his, sit Luna in T dum maris superficies versatur in M, ita ut P T $= y$ exprimat sinum altitudinis Lunæ super horizonte; unde vis Lunæ mare attollens erit $= \frac{L(3yy - 1)}{2b^3} = \frac{3yy-1}{h}$, posito brevitatis gratiâ h pro $\frac{2b^3}{L}$. Hanc ob rem ergo superficies maris in M duplici vi attolletur, scilicet vi $= \frac{s}{g} + \frac{3yy-1}{h}$. Quòd si ergo ponamus aquam in M jam habere motum sursum directum, cujus celeritas tanta sit quanta acquiritur lapsu gravis ex altitudine v, atque spatium M m $= -ds$ tempusculo infinitè parvo absolvatur, habebitur per principia motûs $dv = -ds\left(\frac{s}{g} + \frac{3yy-1}{h}\right)$. Ponamus porrò tempus ab ortu Lunæ in E jam elapsum, quod arcui E T est proportionale, esse $= z$, quæ littera ipsum arcum E T simul denotet, erit $y = \sin. z$ scilicet sinui arcus z, hoc enim modo sinus ac cosinus arcuum sumus indicaturi: unde orietur $1 - 2yy = \cos. 2z$, atque $3yy - 1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\cos. 2z$, hincque $dv = -ds\left(\frac{s}{g} + \frac{1}{2h} - \frac{3}{2h}\cos. 2z\right)$.

§. 77. Cùm igitur elementum temporis sit $= dz$, erit ex naturâ motûs

$d\,z = -\frac{d\,s}{\sqrt{v}}$, atque $v = \frac{d\,s^2}{d\,z^2}$; unde sumto elemento d z pro constante, fiet $d\,v = \frac{2\,d\,s\,d\,d\,s}{d\,z^2} = -d\,s\left(\frac{s}{g} + \frac{1}{2\,h} - \frac{3}{2\,h}\cos.\,2\,z\right)$, atque $2\,d\,d\,s + \frac{s\,d\,z^2}{g} + \frac{d\,z^2(1 - 3\cos.\,2\,z)}{2\,h} = 0$, quæ æquatio duas tantum continet variabiles s et z, et propterea si debito modo integretur, indicabit situm seu statum aquæ ad quodvis tempus. Quoniam autem hæc æquatio est differentialis secundi gradûs, atque insuper arcus et sinus arcuum continet, facilè intelligitur ejus integrationem minus esse obviam; interim tamen cùm alterius variabilis s plus unâ dimensione nusquam adsit, ea per methodos mihi familiares tractari poterit. Soleo autem, quoties ejusmodi occurrunt, initio eos terminos in quibus altera variabilis s omnino non inest, rejicere; unde hæc consideranda venit æquatio $2\,d\,d\,s + \frac{s\,d\,z^2}{g} = 0$, quæ per d s multiplicata fit integrabilis, existente integrali $d\,s^2 + \frac{s\,s\,d\,z^2}{2\,g} = c\,d\,z^2$ ob d z constans. Hinc porrò elicitur $d\,z = \frac{d\,s\sqrt{2\,g}}{\sqrt{(2\,c\,g - s\,s)}}$, atque $\frac{z}{\sqrt{2\,g}} =$ arcui cujus sinus est $\frac{1}{\sqrt{2\,c\,g}}$, ex quo obtinetur $s = \sqrt{2\,c\,g}.\,\sin.\,\frac{z}{\sqrt{2\,g}}$. Cognito autem hoc valore, idonea nascitur substitutio facienda pro æquatione propositâ $2\,d\,d\,s + \frac{s\,d\,z^2}{g} + \frac{d\,z^2(1 - 3\cos.\,2\,z)}{2\,h} = 0$, fiat enim $s = u\sin.\,\frac{z}{\sqrt{2\,g}}$, erit $d\,s = d\,u \times \sin.\,\frac{z}{\sqrt{2\,g}} + \frac{u\,d\,z}{\sqrt{2\,g}}\cos.\,\frac{z}{\sqrt{2\,g}}$, atque $d\,d\,s = d\,d\,u\sin.\,\frac{z}{\sqrt{2\,g}} + \frac{2\,d\,u\,d\,z}{\sqrt{2\,g}} \times \cos.\,\frac{z}{\sqrt{2\,g}} - \frac{u\,d\,z^2}{2\,g}\sin.\,\frac{z}{\sqrt{2\,g}}$. Quibus valoribus substitutis emerget ista æquatio $2\,d\,d\,u\sin.\,\frac{z}{\sqrt{2\,g}} + \frac{4\,d\,u\,d\,z}{\sqrt{2\,g}}\cos.\,\frac{z}{\sqrt{2\,g}} + \frac{d\,z^2(1 - 3\cos.\,2\,z)}{2\,h} = 0$, in quâ hoc commodè accidit, ut ipsa variabilis u non insit, sed tantùm ejus differentialia.

§. 78. Quòd si ergo ponatur $d\,u = p\,d\,z$, erit $d\,d\,u = d\,p\,d\,z$, et æquatio nostra transibit in sequentem differentialem primi gradûs tantum, $2\,d\,p\sin.\,\frac{z}{\sqrt{2\,g}} + \frac{4\,p\,d\,z}{\sqrt{2\,g}}\cos.\,\frac{z}{\sqrt{2\,g}} + \frac{d\,z(1 - 3\cos.\,2\,z)}{2\,h} = 0$: quæ integrabilis reddi invenitur, si multiplicetur per quantitatem quampiam ex

z et constantibus compositam, eò quòd p plures unâ dimensiones habet nusquam. Ad integrationem autem absolvendam notandum est hujus æquationis $d\,p + p\,Z\,d\,z = \Sigma\,d\,z$, in quâ Z et Σ functiones quascunque ipsius z denotent, integrale esse $e^{\int Z\,d\,z}\,p = \int e^{\int Z\,d\,z}\,\Sigma\,d\,z$. Reductâ autem nostrâ æquatione ad hanc formam, habetur $d\,p +$

$$\frac{2\,p\,d\,z\,\cos.\frac{z}{\sqrt{2\,g}}}{\sqrt{2\,g}\,\sin.\frac{z}{\sqrt{2\,g}}} = \frac{d\,z\,(3\,\cos.\,2\,z - 1)}{4\,h\,\sin.\frac{z}{\sqrt{2\,g}}},$$ ideóque $Z\,d\,z =$

$$\frac{2\,d\,z\,\cos.\frac{z}{\sqrt{2\,g}}}{\sqrt{2\,g}\,\sin.\frac{z}{\sqrt{2\,g}}} = \frac{2\,\text{diff.}\,\sin.\frac{z}{\sqrt{2\,g}}}{\sin.\frac{z}{\sqrt{2\,g}}};$$ atque hinc $\int Z\,d\,z =$

$2\,\log.\,\sin.\frac{z}{\sqrt{2\,g}}$; et $e^{\int Z\,d\,z} = \left(\sin.\frac{z}{\sqrt{2\,g}}\right)^2$. Ex his sequitur integrale nostræ æquationis $p\left(\sin.\frac{z}{\sqrt{2\,g}}\right)^2 = \frac{1}{4\,h}\int d\,z\,\sin.\frac{z}{\sqrt{2\,g}}\,(3\,\cos.\,2\,z - 1)$

$= \frac{3}{4\,h}\int d\,z\,\sin.\frac{z}{\sqrt{2\,g}}\,\cos.\,2\,z - \frac{1}{4\,h}\int d\,z\,\sin.\frac{z}{\sqrt{2\,g}}$, ad quas integrationes perficiendas notetur esse $\int d\,z\,\sin.\,\alpha\,z = C - \frac{1}{\alpha}\,\cos.\,\alpha\,z$, atque

$\int d\,z\,\sin.\,\alpha\,z.\,\cos.\,\beta\,z = C - \frac{\beta\,\sin.\,\alpha\,z.\,\sin.\,\beta\,z - \alpha\,\cos.\,\alpha\,z.\,\cos.\,\beta\,z}{\alpha^2 - \beta^2}$: ex his itaque conficietur $p\left(\sin.\frac{z}{\sqrt{2\,g}}\right)^2 = C + \frac{\sqrt{2\,g}}{4\,h}\,\cos.\frac{z}{\sqrt{2\,g}}$

$$-\frac{\left(2\,\sin.\frac{z}{\sqrt{2\,g}}\,\sin.\,2\,z + \frac{1}{\sqrt{2\,g}}\,\cos.\frac{z}{\sqrt{2\,g}}\,\cos.\,2\,z\right)3}{\left(\frac{1}{2\,g} - 4\right)4\,h}$$ atque $p =$

$$\frac{C}{\left(\sin.\frac{z}{\sqrt{2\,g}}\right)^2} + \frac{\sqrt{2\,g}.\cos.\frac{z}{\sqrt{2\,g}}}{4\,h\left[\sin.\frac{z}{\sqrt{2\,g}}\right]^2} - \frac{\left(4\,g\,\sin.\frac{z}{\sqrt{2\,g}}\,\sin.2\,z + \sqrt{2\,g}.\,\cos.\frac{z}{\sqrt{2\,g}}\cos.2\,z\right)3}{4\,h\,(1 - 8\,g)\left[\sin.\frac{z}{\sqrt{2\,g}}\right]^2}.$$

§. 59. Cùm autem posuissemus $d\,u = p\,d\,z$, erit $u = \int p\,d\,z =$

$$\int\frac{C\,d\,z}{\left[\sin.\frac{z}{\sqrt{2\,g}}\right]^2} + \int\frac{d\,z\,\sqrt{2\,g}.\,\cos.\frac{z}{\sqrt{2\,g}}}{4\,h\left[\sin.\frac{z}{\sqrt{2\,g}}\right]^2} - \frac{3}{4\,h}\int d\,z \times$$

$$\frac{\left[4\,g\,\sin.\frac{z}{\sqrt{2\,g}}\sin.\,2\,z+\sqrt{2\,g}.\cos.\frac{z}{\sqrt{2\,g}}\cos.\,2\,z\right]}{(1-8\,g)\quad\left[\sin.\frac{z}{\sqrt{2\,g}}\right]^2}.$$ Hæ autem formulæ omnes sunt absolutè integrabiles, prodibitque $u = D - \frac{C\cos.\frac{z}{\sqrt{2\,g}}}{\sin.\frac{z}{\sqrt{2\,g}}} - \frac{g}{2\,h\sin.\frac{z}{\sqrt{2\,g}}} + \frac{3\,g\cos.\,2\,z}{2\,h\,(1-8\,g)\sin.\frac{z}{\sqrt{2\,g}}}$; ex quo tandem resultat $s = u\sin.\frac{z}{\sqrt{2\,g}} = D\sin.\frac{z}{\sqrt{2\,g}} + C\cos.\frac{z}{\sqrt{2\,g}} - \frac{g}{2\,h} + \frac{3\,g\cos.\,2\,z}{2\,h\,(1-8\,g)}$, quæ est æquatio generalis ad quodvis tempus z statum aquæ, seu distantiam ejus supremæ superficiei à C indicans, ubi constantes C et D ex dato maris statu ad datum tempus definiri oportet. Quòd si igitur ponamus motum aquæ jam ad uniformitatem esse deductum, ita ut aqua omnibus diebus, quando Luna in T versatur, in eodem loco M versetur, necesse erit ut valor ipsius s maneat idem, etsi arcus z integrâ peripheriâ $2\,\pi$ vel ejus multiplo augeatur. At posito $z + 2\,\pi$ loco z, terminus cos. 2 z manet quidem invariatus, at $D\sin.\frac{z}{\sqrt{2\,g}} + C\cos.\frac{z}{\sqrt{2\,g}}$ fit $= D\sin.\frac{z+2\,\pi}{\sqrt{2\,g}} + C\cos.\frac{z+2\,\pi}{\sqrt{2\,g}}$, quæ æqualitas adesse non potest nisi vel $\frac{1}{\sqrt{2\,g}}$ sit numerus integer, vel C et $D = 0$. Cùm itaque g determinari non liceat, quia jam est datum, ponendum erit $C = 0$ et $D = 0$, ita ut ista habeatur æquatio $s = \frac{-g}{2\,h} + \frac{3\,g\cos.\,2\,z}{2\,h\,(1-8\,g)}$, ex quâ facillimè ad quodvis tempus status maris cognoscetur: valores scilicet affirmativi ipsius s dabunt situm aquæ infra situm naturalem C, negativi verò supra C.

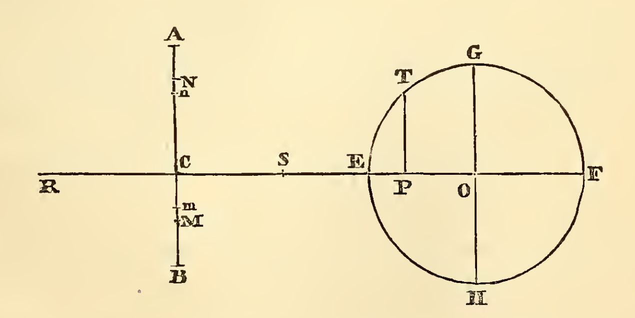
§. 80. Cognito autem spatio s per tempus z, celeritas quoque maris quâ in M ascendit reperietur ex æquatione $d\,z = \frac{-d\,s}{\sqrt{v}}$ erit enim $\sqrt{v} = \frac{-d\,s}{d\,z} = \frac{3\,g\sin.\,2\,z}{h\,(1-8\,g)}$, quæ expressio ipsi celeritati, quâ aquæ superficies, dum in M versatur, elevatur, est proportionalis: hæc ergo celeritas aquæ semper est ut sinus dupli arcûs E T, vel etiam ut sinus dupli temporis, quo Luna a transitu per meridianum abest, tempore scilicet in arcum æquatoris converso. Hinc igitur celeritas aquæ erit nulla si Luna fuerit

vel in E vel in G vel in F vel in H, hoc est, vel in horizonte vel in meridiano: quare cùm his temporibus aqua vel maximè sit elevata vel maximè depressa, unâ Lunæ revolutione aqua bis elevabitur, bisque deprimetur, ideóque bini fluxus binique refluxus contingent. Aqua quidem maximè erit depressa iis ipsis momentis, quibus Luna ad horizontem appellit, tum enim fit cos. $2z = 1$; atque spatium C B erit $= s = \frac{g(1+4g)}{2(1-8g)}$; at maxima elevatio incidet in ipsos Lunæ transitus per meridianum, quibus est cos. $2z = -1$: ac tum altitudo C A erit $= -s = \frac{g(2-4g)}{h(1-8h)}$. Quanquam autem hæc momenta cum experientiâ non satis conveniunt, tamen ea hypothesi assumtæ planè congruunt, quâ posuimus Lunam solam agere, ac perpetuò in ipso æquatore versari, ex quo æstus se tandem ad summam regularitatem componat necesse est. Quòd si enim Lunæ declinatio ponatur variabilis, atque Sol insuper agat, æstus jam formati perpetuò turbabuntur, ex quo ob æquabilitatem continuò sublatam effectus tardiores necessariò consequi debebunt. Præterea quoque nullam adhuc motûs maris horizontalis habuimus rationem, cùm enim aqua ad æstum formandum motu horizontali progredi debeat, perspicuum est hinc retardationem in æstu oriri oportere.

§. 81. Si aqua, uti in præcedentibus Capitibus posuimus, inertiâ careret, tum foret ex æquatione primâ $dv = -ds\left(\frac{s}{g} + \frac{3yy-1}{h}\right)$ perpetuò $s = \frac{g(1-3yy)}{h}$, quia aqua tum quovis momento cum viribus sollicitantibus in æquilibrio consisteret. Maxima igitur depressio etiam tum Lunæ horizontali responderet, cùm est $y = 0$, foretque spatium depressionis C M $= \frac{g}{h}$; maxima verò elevatio, quæ circa Lunæ appulsum ad meridianum continget, fiet per spatium C N $= \frac{2g}{h}$ ob $y = 1$. Quare si aqua inertiâ careret, foret spatium M N, per quod aqua motu reciproco agitaretur, $= \frac{3g}{h}$; inertiâ autem admissâ agitationes perficientur in spatio majore A B $= \frac{3g}{h(1-8g)}$, cujus excessus super spatium M N erit $= \frac{24gg}{h(1-8g)}$. Quantitas itaque æstûs pendet a valore litteræ g; qui quidem semper est affirmativus; nam si foret $g = 0$, quod evenit si

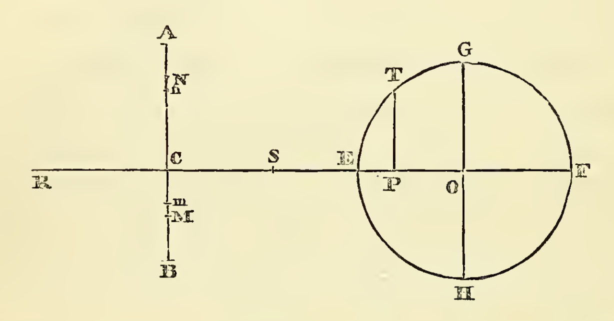
gravitatis vis esset infinitè magna respectu virium Lunæ et Solis, tum etiam nullus æstus oriretur; deinde quò magis 8 g ad 1 accedit, eò major prodibit æstus, qui adeo in infinitum excrescere posset si foret $8\,g = 1$; hoc quippe casu vis Lunæ gravitatem superaret, omnesque aquas ad Lunam attraheret; quod autem fieri non potest, multo minus autem esse potest $8\,g > 1$, quod tamen si eveniret, maxima elevatio appulsui Lunæ ad horizontem, maximaque depressio Lunæ meridianum occupanti responderet.

§. 82. Cùm igitur aqua, si inertiâ careret, agitetur per spatium M N $= \frac{3\,g}{h}$, suprà autem §. 41. eâdem hâc hypothesi, quâ tam locus quàm Luna in æquatore ponitur, aquam elevari supra libellam per spatium 2,260 pedum, infra eam verò deprimi spatio 1,112 pedum, erit $\frac{3\,g}{h} = 3{,}372$ pedum, ideóque $\frac{g}{h} = 1{,}124$ pedum $= 1\frac{1}{8}$ pedum. Quoniam verò valor ipsius g cum unitate comparatur, ideo venit, quod tempus per ipsum arcum circuli cujus radius est $= 1$ expressimus: hinc itaque valor ipsius g respectu unitatis definietur tempore eodem modo expresso, quo aqua in M usque depressa solâ vi gravitatis se in C restitueret, quod



tempus ex circumstantiis facilè poterit æstimari: prodibit autem per calculum tempus hujus restitutionis $= \frac{\pi}{2}\sqrt{2\,g}$, denotante π semi-peripheriam circuli radium $= 1$ habentis, seu tempus duodecim horarum lunarium. Quòd si igitur restitutio ponatur actu fieri tempore $\frac{12}{n}$ horarum, erit $\frac{\pi}{n} = \frac{\pi\sqrt{2\,g}}{2}$ et $g = \frac{2}{n\,n}$, ex quo perspicuum est, quò citiùs aqua se propriâ suâ vi restituere valeat, eò minùs excessurum esse spatium A B

spatium M N. Cùm autem de hâc restitutione non satis tutò judicare queamus, præstabit ex observationibus rationem spatii A B ad M N proximè assumere. Si enim ponamus esse A B = 2 M N, erit $\frac{3}{1 - 8g} = 6$, erit $g = \frac{2}{16}$; sin autem sit A B = 3 M N, fiet $\frac{3}{1 - 8g} = 9$ et $g = \frac{2}{12}$: at posito A B = 4 M N, erit $g = \frac{2}{32}$. Quoniam igitur aqua ob inertiam ferè duplo majus spatium absolvere poni potest, assumamus $g = \frac{2}{36}$ seu n = 6, ita ut aqua propriâ vi gravitatis tempore circiter 2



horarum in statum naturalem se restituere valeat. Posito autem $g = \frac{1}{18}$, fiet $\frac{3}{1 - 8g} = 5, 4$; spatiumque A B = 6 pedum proximè. Ne autem tractatio nimis fiat specialis, retineamus litteram n, cujus valorem esse circiter 6 vel 5 notasse sufficiet, qui valor satis propè ad æstimationem accedit: ita ut sit $g = \frac{2}{nn}$ et $AB = \frac{3nn}{nn - 16} \cdot \frac{9}{8}$ pedum: unde satis patet n necessariò esse debere $\triangleright$ 4, eritque adeo vel 5 vel 6.

§. 83. Tentemus nunc idem hoc Problema in sensu latiori, ac ponamus regionis C elevationis poli sinum esse = P, cosinum = p; Lunæ verò declinationis borealis sinum esse = Q, cosinum = q; Lunamque super Terra jam per meridianum transiisse, ab eoque distare angulo horario = z, ita ut z ut antè tam tempus quàm arcum circuli radii = 1 designet; quòd si nunc arcûs z cosinus ponatur = t, erit sinus altitudinis Lunæ super horizonte = t p q + P Q; ideóque vis Lunæ mare elevans $= \frac{L}{2b^3} \times (3(tpq + PQ) - 1) = \frac{3p^2q^2tt + 6pqPQt + 3P^2Q^2 - 1}{h}$, posito ut antè $\frac{L}{2b^3} = \frac{1}{h}$. Quoniam verò est t = cos. z erit 2 t t — 1 =

$\cos. 2 z$ et $t t = \frac{1 + \cos. 2 z}{2}$, ex quo vis Lunæ ad mare elevandum habebitur $= \frac{3 p^2 q^2 \cos. 2 z}{2 h} + \frac{6 p q P Q \cos. z}{h} + \frac{3 p^2 q^2 + 6 P^2 Q^2 - 2}{2 h}$. Ponamus nunc superficiem aquæ in M versari, existente $C M = s$, et celeritatem ejus quâ actu ascendit debitam esse altitudini v, erit $d v = - d s \left(\frac{s}{g} + \text{vi Lunæ}\right)$, cùm verò sit $d z = \frac{- d s}{\sqrt{v}}$ seu $\sqrt{v} = \frac{- d s}{d z} =$ ipsi celeritati ascensûs erit $v = \frac{2 d s d d s}{d z}$, posito $d z$ constante: hinc igitur emerget ista æquatio $2 d d s + d z^2 \left(\frac{s}{g} + \frac{3 p^2 q^2 + 6 P^2 Q^2 - 2}{2 h} + \frac{6 p q P Q \cos. 2 z}{h} + \frac{3 p^2 q^2 \cos. 2 z}{2 h}\right)$ relationem inter tempus z et statum maris s continens.

§. 84. Quòd si nunc hæc æquatio eodem modo tractetur, quo superior, ea pariter bis integrari posse deprehendetur, integrationibus autem singulis debito modo absolutis, et constantibus ita determinatis ut motus aquæ fiat uniformis, reperietur $s = \frac{- g (3 p^2 q^2 + 6 P^2 Q^2 - 2)}{2 h} - \frac{6 g p q P Q \cos. z}{h (1 - 2 g)} - \frac{3 g p^2 q^2 \cos. 2 z}{2 h (1 - 8 g)}$ ac celeritas ascensûs $\sqrt{v} = \frac{- d s}{d z} = \frac{- 6 g p q P Q \sin. z}{h (1 - 2 g)} - \frac{3 g p^2 q^2 \sin. 2 z}{h (1 - 8 g)}$. Cùm autem sit $\sin. 2 z = 2 \sin. z \cos. z$, celeritas duobus casibus evanescit, quorum primus est si $\sin. z = 0$, alter si $\cos. z = \frac{- P Q (1 - 8 g)}{p q (1 - 2 g)}$; illi casus dabunt aquam summam, hi verò imam. Hinc igitur patet aquam summam contingere debere iis ipsis momentis, quibus Luna per meridianum transit, imam verò non tum, cùm Luna horizontem attingit; namque Luna horizontem attingit, si est $\cos. z = \frac{- P Q}{p q}$, aqua verò est ima si est $\cos. z = \frac{- P Q (1 - 8 g)}{p q (1 - 2 g)} = \frac{- 5 P Q}{8 p q}$ posito $g = \frac{1}{18}$. Hic autem idem est notandum quod suprà, scilicet nos posuisse motum aquæ esse uniformem seu quotidie sui similem, Lunamque in ecliptica locum tenere fixum, seu saltem suam declinationem non variare. Quoniam verò ob variabilitatem declinationis Lunæ, itemque ob actionem Solis, iste motus perpetuò turbatur, atque insuper motûs maris horizontalis nulla adhuc habita est

ratio, facilè intelligitur, tàm fluxus quàm refluxus tardiùs venire debere, quàm quidem ex his formulis sequitur.

§. 85. Bini ergo unâ Lunæ revolutione contingent fluxus, alter si Luna super horizonte ad meridianum appellit, alter si sub Terra; priori casu est cos. $z = 1$, et cos. $2z = 1$, hoc itaque tempore mare supra libellam C elevabitur per spatium $\frac{g(3p^2q^2 + 6P^2Q^2 - 2)}{2h} + \frac{3gp^2q^2}{2h(1-8g)} + \frac{6gpqPQ}{h(1-2g)}$. Dum autem Luna sub horizonte meridianum attingit, tum aqua elevabitur per spatium $\frac{g(3p^2q^2 + 6P^2Q^2 - 2)}{2h} + \frac{3gp^2q^2}{2h(1-8g)} - \frac{6gpqPQ}{h(1-2g)}$, propter cos. $z = -1$ ac cos. $2z = 1$ hoc casu: harum igitur altitudinum differentia est $= \frac{12pqPQ}{h(1-2g)}$: atque mare in transitu Lunæ per meridianum supra horizontem altiùs elevatur, si declinatio Lunæ sit borealis; contrà verò si declinatio fuerit australis, major maris elevatio respondebit appulsui Lunæ ad meridianum infra horizontem. Lunâ verò in ipso æquatore versante, ambo fluxus inter se erunt æquales. Ratione autem elevationis poli, horum binorum fluxuum successivorum inæqualitas erit maxima sub elevatione poli 45°. pro his enim regionibus fit p P maximum; atque in aliis regionibus eò minor erit inæqualitas, quò magis fuerint a latitudine 45°. remotæ. Mare autem maximè deprimetur, si fuerit cos. $z = \frac{-PQ(1-8)}{pq(1-2g)}$; quo valore substituto, reperietur aqua infra libellam C subsidere per spatium $= \frac{3gp^2q^2}{2h(1-8g)} - \frac{g(3p^2q^2+6P^2Q^2-2)}{2h} + \frac{3gP^2Q^2(1-8g)}{h(1-2g)^2}$; omnino igitur aqua in æstu movebitur per spatium $= \frac{3gp^2q^2}{h(1-8g)} \pm \frac{6gpqPQ}{h(1-2g)} + \frac{3gP^2Q^2(1-8g)}{h(1-2g)^2}$, quorum signorum ambiguorum superius + valet si Luna super horizonte, alterum verò − si Luna sub horizonte in fluxu meridianum attingit.

§. 86. Si aqua inertiâ careret, tum superiore Lunæ transitu per meridianum elevaretur supra libellam C per spatium $= \frac{3(pq+PQ)^2-1}{h}g$, inferiori verò transitu per meridianum elevaretur ad altitudinem $\frac{3(pq-PQ)^2-1}{h}g$, quarum altitudinum discrimen est $= \frac{12gpqPQ}{h}$; ita ut discrimen admissâ inertiâ majus sit parte circiter octavâ, quàm idem discrimen si inertia tollatur. Maximè autem deprimetur aqua

sublatâ inertiâ, si fuerit cos. z $= \frac{-PQ}{pq}$, tumque infra libellam erit constituta intervallo $= \frac{g}{h}$; ex quo spatium, per quod æstus maris fit sublatâ inertiâ, prodit $= \frac{3p^2q^2 + 3P^2Q^2 \pm 6pqPQ}{h} g$; cùm igitur idem spatium concessâ inertiâ, sit $\frac{3gp^2q^2}{h(1-8g)} \pm \frac{6gpqPQ}{h(1-2g)} + \frac{3gP^2Q^2(1-8g)}{h(1-2g)^2}$, erit excessus hujus spatii super illud $= \frac{24g^2p^2q^2}{h(1-8g)} - \frac{-12g^2P^2Q^2(1+g)}{h(1-2g)^2} \pm \frac{12g^2pqPQ}{h(1-2g)}$. Fieri ergo potest ut spatium, in quo æstus maris continetur, majus sit sublatâ inertiâ, quàm si ea aquæ tribuatur, id quod eveniet si $\frac{P^2Q^2(1+g)}{(1-2g)^2} > \frac{2p^2q^2}{1-8g}$ vel $\frac{PQ}{pq} > \frac{(1-2g)\sqrt{2}}{\sqrt{(1+g)(1-8g)}}$, hoc est $\frac{PQ}{pq} > \sqrt{\frac{256}{95}}$, posito $g = \frac{1}{18}$; quod verò si evenit, Luna ne quidem horizontem in cursu diurno attingit, ac propterea aquam non deprimit. Ex quo sequitur æstum ubique ab inertiâ aquæ augeri: erit autem ad usum magis accommodatè spatium A B, per quod mare agitatur, ita expressum ut sit A B $= \frac{3g}{h(1-8g)} \times \left(pq \pm \frac{PQ(1-8g)}{1-2g}\right)^2$, ubi signorum ambiguorum superius transitum Lunæ per meridianum super horizonte, inferius verò sub horizonte respicit.

§. 87. Cùm sit $\frac{3g}{h} = 3{,}372$ pedum, Lunâ mediocrem a Terrâ distantiam tenente, atque g sit circiter $\frac{2}{25}$ vel $\frac{1}{18}$; erit posito $g = \frac{2}{25}$ spatium A B $= \frac{25}{9}\left(pq \pm \frac{3}{7} PQ\right)^2$, 3,372 pedum; at facto $g = \frac{1}{18}$ erit spatium A B $= \frac{9}{5}\left(pq \pm \frac{5}{8} PQ\right)^2$, 3,372 pedum. Ex his colligitur æstum fore maximum pro eadem elevatione poli, si fuerit tangens declinationis Lunæ $= \frac{3}{7}\frac{P}{p}$ casu $g = \frac{2}{25}$ vel $= \frac{5}{8}\frac{P}{p}$ casu $g = \frac{1}{18}$: horum autem casuum prior veritati magis videtur consentaneus, atque hanc ob rem valorem $g = \frac{2}{25}$ retineamus: hinc igitur sequitur sub æquatore æstum fore maximum si Luna nullam habeat declinationem, atque simul pro quaque regione declinatio Lunæ poterit assignari, cui maximus æstus respondeat: uti ex adjecto laterculo apparet.

Elevatio Poli.	*Declinatio* ☽		*Elevatio Poli.*	*Declinatio* ☽		*Elevatio Poli.*	*Declinatio* ☽
0°.	0°.	0′.	30°.	13°.	54′.	60°.	———
5°.	2°.	8′.	35°.	16°.	42′.	65°.	———
10°.	4°.	19′.	40°.	19°.	46′.	70°.	———
15°.	6°.	33′.	45°.	23°.	11′.	75°.	———
20°.	8°.	52′.	50°.	27°.	3′.	80°.	———
25°.	11°.	18′.	55°.	maxima.		85°.	———

In locis ergo ultra 45°. ab æquatore remotis æstus erit maximus, si Luna maximam obtineat declinationem, si quidem fuerit $g = \frac{2}{25}$, ac si per observationes constet cuinam Lunæ declinationi maximus æstus respondeat, tum inde valor litteræ g innotescet: quoniam autem sub elevatione poli 50°. æstus maximi nondum maximæ declinationi respondere observantur, ponamus id evenire sub elevatione poli 60°. reperietur $\frac{1 - 8g}{1 - 2g} = \frac{1}{4}$ atque $g = \frac{1}{10}$, unde ipsius g tutò hi limites constitui posse videntur $\frac{1}{10}$ et $\frac{1}{18}$; ex hâc verò hypothesi valor $\frac{1}{10}$ multo propiùs ad veritatem accedit; interim tamen etiamnum nil definimus, sed observationes hunc in finem sollicitè institutas expectamus.

§. 88. Quòd si autem ponamus $g = \frac{1}{10}$, tum bini æstus successivi, dum Luna in maximâ declinatione versatur, eò magis ad æqualitatem perducentur, quò ipsa theoria ad experientiam propiùs accedit; cùm enim sit horum binorum æstuum major ad minorem uti $\left(pq + \frac{PQ(1-8g)}{1-2g}\right)^2$ ad $\left(pq - \frac{PQ(1-8g)}{1-2g}\right)^2$, hæc ratio eò propiùs ad æqualitatem accedet, quò minor fuerit fractio $\frac{1-8g}{1-28}$, fit autem hæc fractio $= \frac{1}{4}$ si ponatur $g = \frac{1}{10}$. Hâc itaque hypothesi erit quantitas æstûs majoris $= (pq + \frac{1}{4}PQ)^2 . 16. 86$ pedum minoris verò $= (pq - \frac{1}{4}PQ)^2 . 16. 86$ pedum. At inter hos binos æstus aqua humillima non medium interjacet, sed minori est vicinior, neque tamen tantâ inæqualitate binos fluxus dirimit, quàm fieret, si ima aqua Lunæ horizontali responderet. Si enim tempus medium inter binos fluxus ponatur z, erit $\cos. z = 0$, at temporis, quo refluxus fluxum majorem insequitur, cosinus est $= \frac{-PQ}{4pq}$, ejusque ergo intervalli a tempore medio sinus est $= \frac{PQ}{4pq}$, quæ expressio adeo sub elevatione poli 60°. pro maxima Lunæ declinatione 28°. tantum fit = 13°. unde refluxus a tempore inter fluxus medio circiter 54′ aberrabit: minor verò erit aberratio, quò propiùs cùm regio Terræ

tùm Luna ad æquatorem versentur, id quod cum experientiâ mirificè convenit. Quoniam autem hæc ex valore ipsius g assumto consequuntur, imprimis notari oportet, litteram g non posse absolutè determinari, sed ejus quantitatem, quippe quæ mobilitatem totius oceani spectat, cùm ab extensione tùm etiam profunditate maris pendere; ex quo variis in locis hæc eadem littera g, varias significationes sortietur.

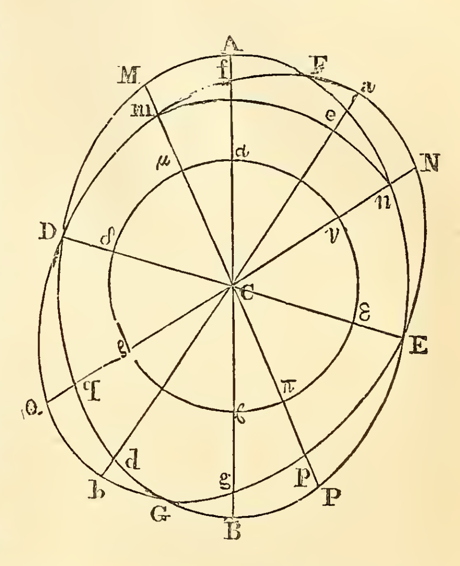
§. 89. Ex solutione horum duorum Problematum, quæ quidem in se spectata non solum sunt attentione digna, sed etiam cùm analysin tùm etiam motûs scientiam amplificant, quamvis ea casum propositum non penitus exhauriant, tamen motus in præcedentibus Capitibus definitus multò magis cum experientiâ conciliatur, id quod theoriæ nostræ jam insigne addit firmamentum. Simili autem modo vis a Sole profecta cum inertiâ aquæ potest conjungi, atque æstus maris definiri, quâtenus a solâ vi Solis oritur, quibus duobus effectibus conjungendis judicare licebit, quantus æstus quovis tempore et quovis loco debeat evenire. In hoc quidem Capite cogitationes adhuc ab omnibus obstaculis a Terrâ et littoribus oriundis prorsus abstrahimus, atque universam Terram undiquaque aquâ circumfusam ponimus; ex quo regulas hinc natas præcipuè ejusmodi observationibus, quæ in amplissimo oceano apud exiguas Insulas sunt institutæ, conferri conveniet. Quoniam autem nondum motûs aquæ progressivi, quo alternativè ad loca, in quibus fluxus et refluxus accidit, progreditur et recedit, rationem habuimus, necesse est ut etiam hunc motum et phænomena inde orta contemplemur. Ac primò quidem facilè intelligitur, cùm ob inertiam aquæ tùm etiam alia impedimenta motui opposita, aquam tam tardiùs elevari quàm deprimi oportere, quàm ex allatis hactenus consequitur: unde fluxus non ad transitus Lunæ per meridianum contingent, sed aliquanto seriùs evenient, omnino uti experientia testatur.

§. 90. Hæc autem retardatio præcisè ad calculum revocari non potest, quia a motu aquæ ejusque profunditate plurimum pendeat, prouti etiam videmus in diversis locis eam vehementer esse diversam, atque aliis locis fluxum contingere post Lunæ culminationem tribus horis nondum elapsis, aliis verò locis plus quàm duodecim horis tardiùs venire, quæ quidem insignis retardatio Terrarum positioni est adscribenda; interim tamen hinc sufficienter constat motum maris admodum posse impediri. Pro eodem verò loco satis luculenter perspicitur, quò major atque altior fluxus evenire debeat, eò tardiùs eundem accidere oportere. Quòd si enim æstus contingat infinitè parvus, dubium est nullum, quin is stato tempore adveniat, cùm impedimentis hoc casu ne locus quidem concedatur agendi:

unde dilucidè sequitur æstus eò tardiùs advenire debere, quò sint majores. Atque hoc ipsum experientia confirmat, quâ constat æstus majores, qui circa novilunia ac plenilunia contingunt, tardiùs insequi transitum Lunæ per meridianum, quàm æstus minores, qui circa quadraturas contingunt. Cùm enim Luna in quadraturis circiter 6 horis tardiùs respectu Solis per meridianum transeat, quàm in syzygiis, æstus tamen non 6 horis tardiùs, sed tantum circiter $5\frac{1}{4}$ horis tardiùs accidit. Videtur verò etiam calculus, qui pro utraque vi Solis ac Lunæ conjunctim institui potest simili modo, quo pro solâ vi Lunæ fecimus, ejusmodi retardationem majorem in syzygiis quàm in quadraturis indicare, etiamsi eum ob summas difficultates ad finem perducere non valuerimus; interim tamen satis planum est præcipuam ejus causam in ipsâ naturâ aquæ esse quærendam. Hæc autem allata ratio retardationis a Flamstedio maximè probatur, quippe qui observavit maximam retardationem non tam syzygiis luminarium, neque minimam quadraturis respondere, sed iis tempestatibus, quibus æstus soleant esse maximi et minimi, id quod demum post syzygias et quadraturas contingit.

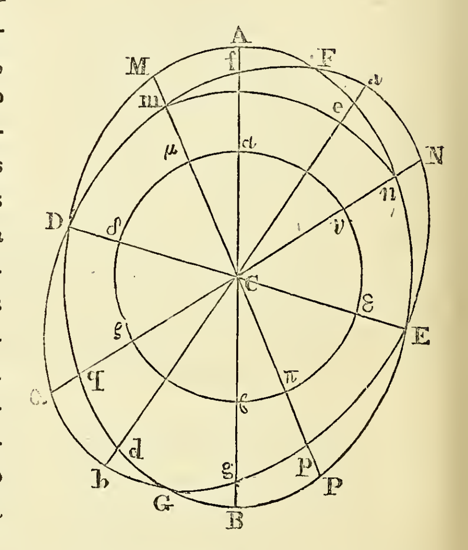
§. 91. Ad hanc autem fluxuum a syzygiis ad quadraturas accelerationem, respectu transitûs Lunæ per meridianum, ac retardationem a quadraturis ad syzygias, plurimùm quoque vis Solis conferre videtur. Suprà enim jam indicavimus post syzygias fluxum transitum Lunæ per meridianum antecedere debere, ob Solem tum jam versùs horizontem declinantem; unde etiam, stabilitâ inertiâ, diebus novilunia ac plenilunia sequentibus æstus maris citiùs insequi debet transitum Lunæ per meridianum, quàm in ipsis syzygiis, id quod etiam observationes mirificè confirmant; inter fluxum enim quintum et sextum post syzygias retardatio respectu Solis tantum 17 minut. deprehenditur, cùm tamen Luna 24 minut. retardetur. Hanc ob rem a Sole determinatur æstus ad actionem virium magis exactè sequendam, quæ determinatio cùm duret usque ad quadraturas, mirum non est, quòd æstus tùm respectu Lunæ citiùs contingant, magisque ad calculum accedant. Contrarium evenit in progressu a quadraturis ad syzygias, quo tempore æstus a Sole continuò retardantur, hocque necessariò efficitur, ut tandem in ipsis syzygiis fluxus tardiùs insequatur Lunæ culminationem quàm in quadraturis. Hanc autem rationem cum magnitudine æstûs conjungendam esse putamus ad hæc phænomena perfectè explicanda, sæpissimè enim in hâc quæstione plures causæ ad eundem effectum producendum concurrunt; hoc autem est id ipsum quod calculus ille summoperè implicatus et molestus quasi per transennam ostendere visus est.

§. 92. Quò autem tam de his phænomenis quàm reliquis certiùs et solidiùs judicare queamus, ipsum motum progressivum, quem aqua ab æstu recipit, investigabimus. Cùm enim aqua eodem loco nunc elevetur, nunc subsidat, necesse est ut priori casu aqua aliunde affluat, posteriori verò ab eodem loco defluat, unde nomina fluxûs ac refluxûs originem traxerunt. Repræsentet igitur tempore quocunque figura A D B E statum aquæ totam Terram ambientis, ita ut in locis A et B aqua maximè sit elevata, in locis verò mediis ab A et B æquidistantibus, maximè depressa. Post aliquod tempus transferatur æstus summus ex A et B in a et b, sitque a D b E figura aquæ Terram circumdantis: hoc igitur tempore necesse est, ut a parte oceani D F defluxerit aquæ copia F A M D m f, in partem verò F E tantundem aquæ affluxerit, portio scilicet F a N E n e: simili modo portio E G decrevit copia aquæ E P B G g p, portioque G D augmentum accepit G b Q D q d. Si nunc ponamus portionem F M m transire in locum F N n, ac portionem E P p in E N n deferri, satis clarè motum aquæ progressivum intelligere licebit. Cùm enim motus aquæ summæ A fiat ab ortu in occasum, aqua quæ circa A versùs orientem scilicet ab M ad N usque est sita, in occasum movebitur: similiterque ea quæ huic e diametro est opposita et spatium P Q occupat. Contrà verò reliqua aqua in M Q et N P contenta in ortum promovebitur. Verùm celeritas ubique non erit eadem; in punctis enim M, N, P et Q quippe limitibus inter motus versùs ortum et obitum, celeritas erit nulla, deinde ab M usque ad F crescet ubique ita ut incrementa celeritatis in punctis mediis ut A sint differentiis A f proportionalia: ab F verò usque ad N celeritas decrescere debet, et decrementum celeritatis in e erit ut a e; similique modo comparatus erit motus in reliquis portionibus figuræ propositæ.



§. 93. Si hæc diligentiùs prosequamur ac punctum a ipsi A proximum ponamus, reperiemus in loco quocunque M fore intervallum M m sinui dupli anguli M C A proportionale. Quare si anguli A C M sinus pona-

tur = x, cosinus = y, ac celeritas quam aqua in M habet, versùs occasum = u erit d u ut 2 x y. Cùm autem elementum arcûs A M sit ut $\frac{d\,x}{g}$; nam figuram instar circuli considerari licet: erit d u ut 2 x d x, atque u proportionale erit ipsi 2 x x — 1 ejusmodi adjecta constante, ut ubi M m est maximum, ibi celeritas evanescat. Hanc ob rem erit celeritas in loco quocunque M, quam aqua versùs occidentem habebit, uti cosinus dupli anguli M C A. Maxima igitur aquæ celeritas versùs occidentem erit in iis locis, in quibus aqua maximè est elevata; huicque celeritati æqualis est ea, quâ aqua in locis ubi maximè est depressa, versùs orientem promovetur; si quidem hæc in circulo fieri concipiamus, nam in sphæra motus aliquantum diversus erit, sed tamen hinc intelligi poterit.



At in locis quæ ab A et B 45 grad. distant, ob cosinum dupli anguli = 0, aqua omnino nullum habebit motum horizontalem. Ex his igitur non solum motus aquæ progressivus cognoscitur, quo alterna elevatio ac depressio producitur, sed etiam luculenter perturbationes, quæ a Terris, littoribus atque etiam a fundo maris proficisci possunt, perspiciuntur. Ceterum quanquam sectio nostra plana A D B E æquatorem solum denotare videtur, tamen eadem ad parallelum quemvis significandum satis commodè adhiberi potest: quin etiam motus pro sphæra hinc satis distinctè colligi poterit, operæ enim pretium non judicamus, per solidorum introductionem hanc rem cognitu tantò difficiliorem reddere.

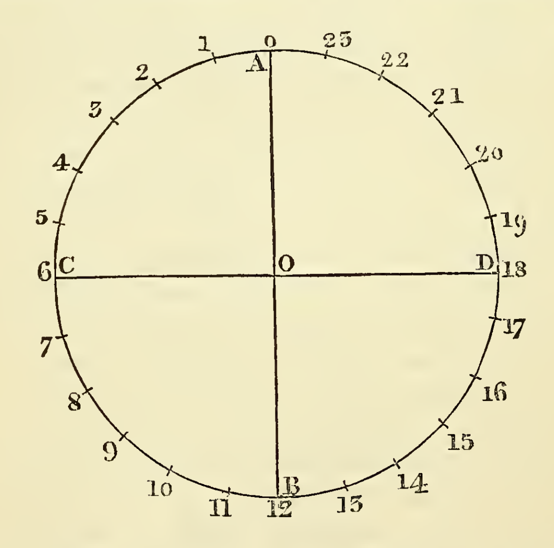
§. 94. Eò minus autem hujus accuratæ inquisitioni insistemus, quòd celeritas progressiva insuper a profunditate maris pendeat. Quòd si enim ponamus m n jam esse maris fundum, ita ut profunditas maris in M major non esset quàm M m, tam isti aquæ tantus motus inesse deberet, quo ea, dum fluxus ex A in a transit, ex situ n F M m in situm m F N n transferri posset. Hic autem motus quamvis sit difformis et per totam massam inæquabilis, tamen si tota translatio spectetur, totus motus ex

spatio a centro gravitatis interea percurso est æstimandus. Hoc igitur casu, quo Terræ superficiem solidam ad m n usque pertingere ponimus, reperietur centrum gravitatis massæ n F M m ferè æquè celeriter promoveri debere ac punctum A, ex quo ejus celeritas tanta esse deberet, quâ tempore unius horæ spatium ferè 15 graduum percurrere posset, quæ celeritas undique foret enormis ac stupenda. At si mari profunditatem majorem tribuamus, scilicet ad μ ν usque, tum illa celeritas multò fiet minor, decrescet namque in eadem ratione in qua profunditas crescit. Cum igitur celeritas maris, quæ antè in se spectata inventa est cosinui dupli anguli M C A proportionalis, eò fiat minor, quo majorem mare habeat profunditatem, tenebit ea in quoque loco rationem compositam ex ratione directâ cosinûs dupli anguli M C A atque ex inversâ profunditatis.

§. 95. Datur autem alius modus celeritatem maris horizontalem, positâ scilicet, ubique profunditate eâdem, determinandi, qui tamen ad diversas profunditates patet, si cum ratione inveniendâ conjungamus reciprocum profunditatum uti fecimus; deduciturque hic modus ex motu maris verticali, quo modò ascendit modò descendit, qui jam suprà est definitus. Primò enim manifestum est, si mare ubique eâdem celeritate, (positâ profunditate ubique æquali) in eandem plagam promoveretur, tum etiam altitudinem mansuram esse eandem ubique, neque ullam mutationem in elevatione aquæ orturam esse. At si aqua motu inæquabili progrediatur, manifestum est iis in locis, ubi celeritas diminuitur, aquam turgescere atque adeo elevari debere, quoniam plus aquæ affluit quàm defluit; contrà verò ubi celeritas aquæ crescat, ibi aquam subsidere oportere. Quare cùm elevatio et depressio maris a motûs progressivi horizontalis inæqualitate pendeat, licebit pro quovis loco hanc inæqualitatem definire, ex motu ascensûs et descensûs cognito. Cùm enim celeritas ascensûs sit decremento celeritatis progressivæ æqualis, celeritas descensûs verò incremento celeritatis progressivæ, ex dato motu verticali ratio motûs horizontalis definiri poterit. Invenimus autem suprà §. 84, si Luna a meridiano versùs occasum jam recessit angulo z, hoc est cùm regio proposita ab eâ, in quâ aqua est summa, versùs orientem secundùm longitudinem distet angulo z, fore celeritatem quâ aqua ascendit = $\frac{-6\,g\,p\,q\,P\,Q\ \sin. z}{h\,(1-2\,g)} - \frac{3\,g\,p^2\,q^2\,\sin. 2\,z}{h\,(1-8\,g)}$. Quare cùm huic celeritati ascensûs proportionale sit decrementum motûs horizontalis, erit ipsa celeritas horizontalis versùs occasum ut $\frac{g\,(3\,p^2\,q^2+6\,P^2\,Q^3-2)}{2\,h}$ +

$\frac{6\,g\,p\,q\,P\,Q\cos. z}{h\,(1-2\,g)} + \frac{3\,g\,p^2\,q^2\cos. 2\,z}{2\,h\,(1-8\,g)}$; hujus enim differentiale negativè sumtum et per d z divisum dat ipsam celeritatem ascensûs. Quoniam autem hæc expressio simul exhibet spatium, quo mare supra libellam elevatur, erit celeritas maris in quovis loco versùs occidentem proportionalis elevationi supra libellam, et inversè profunditati maris, quæ est vera regula pro motu maris, tam verticali quàm horizontali, definiendo; atque ita priori modo insufficienti supersedere potuissemus.

§. 96. Consideremus ergo motum, quo aqua tàm verticaliter quàm horizontaliter promovetur a fluxu usque ad refluxum, indeque ad sequentem fluxum, idque sub æquatore, dum Luna pariter in æquatore versatur: erit itaque celeritas ascensûs ut $-\sin. 2\,z$, celeritas autem horizon-



talis versùs occasum ut $15\cos. 2\,z + 1$ posito $g = \frac{1}{10}$, cui expressioni simul altitudo aquæ supra libellam est proportionalis. Quòd si ergo superficies Terræ seu perimeter æquatoris in 24 partes æquales dividatur, atque in locis A et B aqua sit maximè elevata, in C et D verò minimè, numeri 1, 2, 3, &c. designabunt ea Terræ loca in quibus ante unam vel duas vel tres vel, &c. horas lunares aqua maximè fuit elevata, tribuendo uni horæ lunari 62 minuta. In tabulâ ergo annexâ exhibetur motus tam verticalis, quàm horizontalis, ad singulas horas post fluxum elapsas.

Horæ post Fluxum.	*Celeritas Maris verticalis.*	*Celeritas Maris horizontalis.*
0	0,000 descendit.	1,067 in occasum.
1	0,500 descendit.	0,927 in occasum.
2	0,860 descendit.	0,567 in occasum.
3	1,000 descendit.	0,067 in occasum.
4	0,860 descendit.	0,432 in ortum.
5	0,500 descendit.	0,792 in ortum.
6	0,000 ascendit.	0,932 in ortum.
7	0,500 ascendit.	0,792 in ortum.
8	0,860 ascendit.	0,432 in ortum.
9	1,000 ascendit.	0,067 in occasum.
10	0,860 ascendit.	0,567 in occasum.
11	0,500 ascendit.	0,927 in occasum.
12	0,000 descendit.	1,067 in occasum.

Facilè autem intelligitur pro regionibus ab æquatore remotis, præcipuè si Luna habeat declinationem, tum utrumque motum magis fore irregularem, atque mox ascensum citiùs absolvi mox verò descensum; totus autem motus faciliùs ex ipsis formulis datis cognoscetur. Hîc denique profunditatem ubique eandem posuimus; quòd si enim esset diversa, motus horizontalis simul rationem inversam profunditatis tenebit.

§. 97. Denique antequam hoc Caput finiamus, notari oportet, neque maximos æstus iis ipsis temporibus evenire posse, quibus vires Solis et Lunæ maximè vigent, nec minimos æstus tum, cùm vis a Luna et Sole nata est debilissima, sed aliquanto tardiùs. Æstûs enim magnitudo non solum a quantitate virium sollicitantium pendet, uti id usu veniret, si aqua inertiâ careret, sed insuper a motu jam antè concepto. Quòd si enim antè mare omnino quievisset, tum primus certè æstus oriundus admodum futurus esset exilis, etiamsi vires sollicitantes essent maximæ; sequentes verò æstus continuò crescerent, donec tandem post tempus infinitum magnitudinem assignatam obtinerent, si quidem vires sollicitantes idem robur perpetuò servarent: atque hoc idem evenire debet, si æstus præcedentes tantum fuerint minores, quàm is qui viribus sollicitantibus convenit. Quare cùm æstus novilunia ac plenilunia præcedentes sint minores, ii quidem his temporibus ab auctis viribus augebuntur, non verò subitò totam suam quantitatem consequentur, atque hanc ob rem æstus etiamnum post syzygias augmenta accipient, donec ob tum secutura virium decrementa, æstus iterum decrescere incipiant. Ita tempore noviluniorum et pleniluniorum non tam ipsi æstus quàm incrementa eorum censenda sunt maxima, quatenus scilicet æstus præcedentes maximè deficiunt,

ab iis qui sequi deberent; ex quo manifestum est non illos æstus, qui in ipsis syzygiis luminarium contingunt, esse maximos, sed sequentes esse majores. Hocque idem intelligendum est de æstibus minimis, qui non in ipsas quadraturas incidunt, sed tardiùs sequuntur: unde ratio luculenter perspicitur, cur æstus tàm maximi quàm minimi non ipsis syzygiarum et quadraturarum tempestatibus respondeant, sed seriùs observentur, tertii scilicet demum vel quarti post hæc tempora.

CAPUT SEPTIMUM.

Explicatio præcipuorum Phænomenorum circa Æstum Maris observatorum.

§. 98. In præcedentibus Capitibus fusiùs exposuimus effectus, qui in mari a viribus illis duabus, quarum altera versùs Lunam est directa, altera versùs Solem, produci debent; eosque cùm per calculum analyticum, tùm per solida ratiocinia ita determinavimus, ut de eorum existentiâ dubitari omnino non liceat, si quidem illæ vires admittantur. At verò istas vires in mundo existere non solum per alia phænomena evidentissimè probavimus, sed etiam earum causam physicam assignavimus, quam in binis vorticibus, quorum alter circa Solem, alter circa Lunam sit constitutus, posuimus, quippe quæ est unica ratio cùm gravitatem tùm etiam vires, quibus planetæ in suis orbitis circa Solem continentur, explicandi. Quin etiam hæc ipsa phænomena internam vorticum structuram et indolem commonstrarunt; ob eaque vortices ita comparatos esse statuimus, ut vires centrifugæ decrescant in duplicatâ ratione distantiarum a centris eorumdem. Quare cùm in his viribus nihil gratuitò assumserimus, si effectus ex iis oriundi cum phænomenis æstûs maris conveniant, certissimè nobis persuadere poterimus, in assignatis viribus veram æstûs maris causam contineri; absonumque omninò fore, si causam æstûs maris in aliis viribus imaginariis anquirere vellemus. Quamobrem in hoc Capite constituimus omnes effectus, qui in superioribus Capitibus sparsim sunt eruti, conjunctim et ordine proponere, summumque eorum consensum cum experientiâ declarare. Quoniam autem nondum impedimentorum a littoribus Terrisque oriundorum rationem habuimus, facilè intelligitur, hinc excludi adhuc debere ejusmodi anomalias æstûs maris, quæ evidentissimè a Terris contingentibus ortum habeant, cujusmodi sunt æstus vel vehemen-

ter enormes vel vix sensibiles, uti in Mari Mediterraneo, vel insignes retardationes eorum, quibus rebus explicandis sequens Caput ultimum destinavimus: ita in hoc Capite tantum ea æstûs maris phænomena explicanda suscipimus, quæ in portubus amplissimum oceanum respicientibus vel insulis observari solent in oceano sitis.

§. 99. Si omnes proprietates, quibus fluxus ac refluxus maris præditus esse observatur, distinctè enumerare atque exponere velimus, deprehendemus eas ad tres classes revocari debere. Ad primam scilicet classem referenda sunt phænomena, quæ in uno æstu in se spectato conspiciuntur, cùm ratione temporis tùm etiam ratione quantitatis; hæcque phænomena commodissimè sub varietatibus diurnis comprehendi possunt, quâtenus ea se offerunt observatori, qui per integrum tantum diem observationes instituit, neque ea cum aliis phænomenis aliis temporibus occurrentibus comparat. Secunda classis complectitur varietates menstruas, quæ sese observatori per integrum mensem æstum maris contemplanti offerunt, quorsum pertinent æstus maximi minimique, item retardationes modò majores modò minores. Tertia denique classis comprehendit varietates annuas ac plusquam annuas, quæ sequuntur vel varias Lunæ a Terrâ distantias, vel Solis; vel etiam luminarium declinationem. Hanc ob rem phænomena uniuscujusque classis recensebimus, atque quomodo singula cum theoriâ traditâ congruant, ostendemus. Hîc verò, ut jam est monitum, a perturbationibus quæ a Terris ac littoribus provenire possunt, animum prorsus abstinemus, eas sequenti Capiti reservantes. Multò minùs verò ad ventum hîc respicimus, quo æstus maris cùm ratione magnitudinis tùm temporis plurimum affici observatur; sed tantùm ejusmodi phænomena explicare hîc conabimur, quæ memoratis perturbationibus minimè sint obnoxia.

§. 100. Quod igitur ad primam classem attinet, præcipuum phænomenum in hoc consistit, quòd ubique in amplissimo oceano quotidie bini maris fluxus seu elevationes, binique refluxus seu depressiones observentur, atque tempus inter binos fluxus successivos circiter 12. hor. 24′. deprehendatur. Huic verò phænomeno, si ulli alii, per theoriam nostram plenissimè est satisfactum, ubi ostendimus maximam aquæ elevationem deberi transitui Lunæ per meridianum tam supra quàm infra Terram: ex quo cùm Luna unâ revolutione diurnâ bis ad ejusdem loci meridianum appellat intervallo temporis circiter 12 hor. 24′. necessariò sequitur unâ revolutione Lunæ circa Terram binos fluxus tanto tempore a se invicem dissitos oriri debere, quemadmodum hoc ipsum calculus tam pro hypothesi aquæ inertiâ carentis, quàm admissâ inertiâ, clarissimè indica-

vit. Simul autem ex iisdem determinationibus intelligitur sub ipsis polis nullum omnino æstum dari diurnum, in regionibus verò a polis non procul remotis, ubi luminaria vel non oriuntur vel non occidunt, quotidie unum tantum fluxum unicumque refluxum contingere debere; quæ consequentia theoriæ, etsi observationibus nondum satis est comprobata, tamen quia ex iisdem principiis sequitur quæ institutis observationibus satisfaciant, nulli ampliùs dubio subjecta videtur. In locis autem æquatori propioribus, quibus quotidie bini fluxus totidemque refluxus eveniunt, momentum, quo aqua maximè deprimitur non satis exactè medium interjacere observatur inter fluxuum momenta, sed mox priori mox posteriori est propius, quod phænomenum cum nostrâ theoriâ apprimè congruit; ostendimus enim momentum refluxûs non exactè tempori medio inter fluxus respondere, nisi vel locus situs sit sub æquatore, vel Lunæ declinatio fuerit nulla, sed modò priori modò posteriori fluxui esse propius.

§. 101. Secundum phænomenum huc redit, ut ubique locorum fluxus post transitum Lunæ per meridianum venire observetur, idque aliquot horarum spatio, in portubus versùs apertum oceanum patentibus. Nam in regionibus quæ cum oceano non liberrimè communicantur, sed ad quas aqua juxta littora deferri debet, multò tardiùs æstus advenit, quæ retardatio si ferè ad 12 horas ascendit, in causa esse solet, ut hujusmodi in locis fluxus ante transitum Lunæ per meridianum venire videatur. Ita ad Portum Gratiæ videri posset fluxus 3 horis Lunæ culminationem antecedere, cùm tamen, re benè consideratâ, a præcedente culminatione oriatur, atque adeò eam 9 ferè horis demum sequatur, uti apparebit si æstuum momenta, quæ successivè ad littora Britanniæ Minoris et Normanniæ observantur continuóque magis retardantur, attentiùs inspiciantur. Deberet quidem ubique fluxus in ipsos Lunæ transitus per meridianum incidere, imò quandoque ob Solem præcedere, non solum demtâ inertiâ, sed etiam eâ positâ, si tantum aquæ motus verticalis spectetur; at si etiam motûs horizontalis ratio habeatur, tum dilucidè ostendimus fluxum perpetuò retardari, ac demum post Lunæ transitum per meridianum evenire debere. Tempus quidem hujus retardationis, cùm sit admodum variabile pluribusque circumstantiis subjectum, non definivimus, interim tamen id ex §. 82. colligi poterit, remotis externis impedimentis: cùm enim invenerimus aquam propriâ vi gravitatis sese in situm æquilibrii recipere tempore $\frac{12}{n}$ horarum, ac numerum n esse circiter 5 vel 6, manifestum est tanto etiam tempore opus esse, quo aqua eum situm quem vires intendunt, induat, ex quo fluxus circiter 2 horas vel $2\frac{1}{2}$ horas post transitum

Lunæ per meridianum contingere debebit, id quod cum observationibus in oceano libero institutis egregiè convenit; hancque idcirco præcipuam hujus retardationis causam meritò assignamus.

§. 102. Tertium phænomenon suppeditat æstûs magnitudo, quæ autem tam diversis locis quàm diversis tempestatibus maximè est mutabilis. Interim tamen exceptis enormibus illis æstubus, qui nonnullis in portubus observari solent, reliqui cum nostrâ theoriâ egregiè consentiunt; inertiâ enim sublatâ, invenimus sub æquatore maximum æstum fore per spatium circiter 4 pedum, ab inertia autem hoc intervallum augeri ita ut duplo, vel triplo, vel etiam quadruplo et plus fiat majus, prout valor ipsius g (vid. §. 82.) minor fuerit vel major, quippe qui a facultate oceani sese propriâ suâ vi in statum æquilibrii restituendi pendet; ex quo sub æquatore spatium per quod maximus æstus agitatur ad 8, 12, 16 et plures pedes exsurgere potest. In regionibus autem ab æquatore remotis invenimus magnitudinem æstûs tenere rationem duplicatam cosinuum elevationis poli, unde sub elevatione poli 45°., magnitudo æstûs circiter duplo erit minor quàm sub ipso æquatore; cujus veritas in locis a littoribus aliquot milliaria remotis per experientiam eximiè comprobatur. Deprehenditur enim ubique in locis a littoribus remotis æstus multò minor quàm ad littora; cujus discriminis causa in sequenti Capite dilucidè indicabitur. Quinetiam in medio mari plerumque æstus adhuc minor observatur, quàm hæc regula requirit; id autem ostendetur a non satis amplâ oceani extensione secundùm longitudinem proficisci, quemadmodum in Oceano Atlantico qui versùs occidentem littoribus Americæ; versùs orientem verò littoribus Africæ et Europæ terminatur, quæ amplitudo non est satis magna, ut integram æstûs quantitatem suscipere queat.

§. 103. Quartum phænomenon varietates menstruas respicit, atque ostendit æstus, qui circa plenilunia et novilunia contingunt, inter reliquos ejusdem mensis esse maximos, æstus verò circa quadraturas luminarium minimos; quæ inæqualitas cum theoriâ nostrâ ad amussim quadrat. Cùm enim æstus maris non solum ab eâ vi, quæ vortici Lunam ambienti competit, oriatur, sed etiam a vi Solem spectante pendeat, quæ ceteris paribus circiter quadruplo minor est vi Lunæ, manifestum est æstum maris maximum esse debere, si ambæ vires inter se conspirent, atque aquam simul vel elevent vel deprimant, id quod accidere ostendimus tam pleniluniis quàm noviluniis. Deinde simili modo, quoniam istæ vires inter se maximè discrepant in quadraturis, quibus temporibus dum aqua a Lunâ maximè elevatur, simul a Sole maximè deprimitur ac vicissim, perspicuum est iisdem temporibus æstum minimum esse debere. Præterea

verò ipsum discrimen cum theoriâ exactè convenit; in pluribus enim portubus æstus maximos et minimos ad calculum revocavimus, atque ex relatione eorum relationem inter vires Lunæ ac Solis investigavimus; hincque perpetuò eandem ferè rationem inter vires Solis ac Lunæ absolutas elicuimus, quemadmodum id fecit Newtonus ex observationibus Bristolii et Plymouthi, nos verò in Portu Gratiæ institutis, conclusionibus mirificè inter se congruentibus: qualis consensus profectò expectari non posset, si theoria veritati non esset consentanea. Neque etiam aliæ theoriæ adhuc productæ, cujusmodi sunt Galilæi, Wallisii atque Cartesii, qui causam in pressione Lunæ collocavit, huic phænomeno perfectè satisfaciunt, sed potiùs prorsùs evertuntur.

§. 104. Quintum phænomenon in hoc consistat, quòd unius mensis intervallo maximi æstus non sint ii, qui novilunia ac plenilunia proximè insequuntur, sed sequentes tertii scilicet circiter vel quarti, similique intervallo æstus minimi demum post quadraturas contingunt. Hujus autem phænomeni ratio in §. 97. fusiùs est exposita, ubi ostendimus, cùm æstus ante syzygias incidentes essent minores, maximam vim a Sole et Lunâ ortam non subitò æstum maximum producere valere, sed tantùm mare ad eum statum solicitare. Cùm igitur post syzygias vis æstum efficiens sensibiliter non decrescat, æstus etiamnum post hoc tempus incrementa capiet, atque ideò demum post syzygias fiet maximus; similisque est ratio diminutionis æstuum, quæ etiamnum post quadraturas contingere debet, ita ut æstus minimi demum post quadraturas eveniant. Hujusmodi autem retardationes effectuum a viribus in mundo existentibus provenientium quotidie abundè experimur: ob similem enim rationem singulis diebus maximum calorem non in ipso meridie sentimus, etiamsi hoc tempore vis Solis calefaciens sine dubio sit maxima, sed demum aliquot horis post meridiem, atque propter eandem causam neque solstitii æstivi momento maximus calor annuus sentitur, neque tempore solstitii hyberni frigus summum, sed utrumque notabiliter tardiùs.

§. 105. Sextum phænomenon in hoc ponimus, quòd momenta fluxuum tempore syzygiarum multo strictiùs ordinem tenere observantur, quàm circa quadraturas. Hîc verò ante omnia animadvertendum est præcipuam sensibilem anomaliam in momentis æstuum inde originem trahere, quòd hæc momenta ex tempore solari atque a vero meridie seu transitu Solis per meridianum soleant computari, cùm ea potiùs a transitu Lunæ per meridianum pendeant. Quòd si autem ad has observationes tempus lunare a transitu Lunæ per meridianum computandum adhibeatur, irregularitates apparentes maximam partem evanescent, hoc verò multò magis

in fluxubus circa syzygias quàm quadraturas: in quadraturis enim quoniam, dum Luna per meridianum transit, Sol non semper in horizonte versatur, sed vel ad horizontem demum accedit vel jam ab eo recedit, necesse est ut illo casu fluxus citiùs, hoc verò tardiùs contingat: quod discrimen cùm partim ab elevatione poli, partim a declinatione luminarium pendeat, momenta fluxuum in quadraturis magis irregularia reddit: interim tamen habitâ harum circumstantiarum ratione satis propè definiri potest. Circa tempora fluxuum autem, qui in noviluniis ac pleniluniis incidunt, hæc sola correctio seu reductio ad transitum Lunæ per meridianum omnem ferè anomaliam tollit, quorsum spectat regula a celeb. Cassino in Mem. 1710. tradita, quâ pro totidem horis, quibus plenilunium seu novilunium vel ante meridiem vel post incidit, totidem bina minuta ad tempus fluxûs medium vel addere vel ab eo subtrahere jubet, quippe quæ ex motu Lunæ est petita. Interim tamen hâc correctione adhibitâ aliqua anomalia superesse deprehenditur, cujus autem ratio ex nostrâ theoriâ sponte sequitur. Quando enim syzygia ante meridiem celebratur, tum dum Luna per meridianum transit, Sol jam ante eum est transgressus, atque ideo jam horizonti appropinquat, ex quo necesse est ut fluxus citiùs eveniat, quàm prima regula sola adhibita indicat. Atque etiam idem in tabulis fluxuum Dunkerquæ et in Portu Gratiæ observatorum, Mem. 1710. insertis, manifestò conspicitur: quando enim novilunium pleniluniumve pluribus horis ante meridiem accidit, tum fluxus citiùs advenisse observatur, quàm calculus Cassinianus indicabat; contrà verò tardiùs si syzygiæ demum pluribus horis post meridiem inciderint, cujus majoris retardationis causa in Sole tum adhuc ab horizonte recedente est quærenda.

§. 106. Septimum phænomenon suppeditat diversa retardatio fluxuum in syzygiis luminarium et quadraturis respectu appulsûs Lunæ ad meridianum; tardiùs scilicet ubique locorum fluxus, qui in syzygiis contingunt, insequuntur culminationem Lunæ, quàm ii, qui circa quadraturas veniunt. Hujus autem phænomeni duplex causa potest assignari, quarum prima a solâ quantitate æstuum petitur, quia enim æstus syzygiarum multò sunt majores quàm æstus quadraturarum, consentaneum videtur illos tardiùs venire quàm hos. Altera verò causa quæ hoc phænomenon multò distinctiùs explicat, nullique dubio locum relinquit, nostræ theoriæ omnino est propria, priorique longè est præferenda. Ponamus enim t esse tempus, quo in noviluniis ac pleniluniis fluxus post appulsum Lunæ ad meridianum venire solet; sequentibus igitur diebus hoc tempus t continuò diminuetur, quia tum Sol, dum Luna in meridiano versatur,

mare jam deprimit; quæ diminutio cùm duret ferè usque ad quadraturas, necesse est ut his temporibus fluxus multò citiùs post culminationem Lunæ sequantur, viribusque sollicitantibus magis obtemperent, uti hoc fusiùs §. 91. explicavimus, unde tempus retardationis in quadraturis tantum erit t — θ. Post quadraturas autem Sol exerit contrarium effectum, atque adventum fluxûs continuò magis retardat, idque æquali modo, quo antè acceleraverat, ex quo usque ad sequentem syzygiam intervallum t — θ iterum ad t usque augebitur. Hujusque phænomeni solius explicatio sufficere posset ad veritatem theoriæ nostræ evincendam, cùm id omnibus aliis theoriis explicatu sit insuperabile; neque a nemine adhuc saltem probabilis ejus causa sit assignata.

§. 107. Octavum phænomenon petamus ex inæqualitate duorum fluxuum sese immediatè insequentium, quorum alter transitui Lunæ superiori per meridianum respondet, alter inferiori, quæ inæqualitas maximè observatur in regionibus ab æquatore multum remotis, ac tum cùm Lunæ declinatio est maxima. Theoria quidem declarat Lunam, etiamsi in ipso æquatore versetur, tamen majori vi gaudere ad mare movendum, quando super horizonte meridianum attingit, quàm infra horizontem; at discrimen sub æquatore tam est exiguum, ut vix in sensus occurrere queat, integrum enim digitum non attingit (§. 41.); atque in regionibus ab æquatore remotis fit multò minus. Vera igitur hujus phænomeni ratio in altitudine Lunæ meridianâ seu distantia ab horizonte continetur; hinc enim sequitur quò major fuerit differentiâ inter distantias Lunæ ab horizonte, dum per meridianum transit tum super horizonte tum sub horizonte, eò majorem esse debere differentiam inter binos fluxus successivos, ex quo perspicuum est istam differentiam versùs polos continuò crescere debere, si quidem Luna habeat declinationem. Quòd si ergo Luna habuerit declinationem borealem, tum in regionibus septentrionalibus fluxus erit major qui transitum Lunæ per meridianum superiorem sequitur, alter verò sequens, qui transitui inferiori respondet, minor. Contrà autem si Lunæ declinatio fuerit australis, appulsui Lunæ ad meridianum superiori fluxus succedet minor, inferiori verò major; hancque differentiam Flamstedius observavit diligenter, nullumque est dubium, quin ea per copiosissimas observationes, quas Academia celeberrima Regia Parisina collegit, omnino confirmetur. In hoc autem negotio indoles fluxuum probè est inspicienda, quoniam aliquibus in portubus tantopere retardantur, ut sequentibus Lunæ transitibus per meridianum sint propiores, quàm illi, cui suam originem debent; ita Dunkerquæ circa syzygias fluxus circiter meridie observari solet, neque verò illi ipsi

transitui Lunæ per meridianum est tribuendus qui eodem tempore fit, sed præcedenti, prouti successiva retardationis incrementa ad littora Galliæ et Belgii borealia evidentissimè testantur. Quare si verbi gratiâ Dunkerquæ quis hujusmodi observationes perlustrare voluerit, is quemque fluxum non cum transitu Lunæ per meridianum proximo comparet, sed cum eo qui propemodum 12 horis antè contigit; alioquin enim contraria phænomena esset deprehensurus.

§. 108. Commodus hìc nobis præbetur locus explicandi transitum a binis æstubus, qui quotidie in regionibus extra circulos polares sitis eveniunt, ad singulos æstus, qui secundùm theoriam nostram in regionibus polaribus contingere debent. Quoniam enim theoria nostra monstrat, in zonis temperatis et torridâ quotidie duos fluxus observari debere, in zonis frigidis autem unum tantum, transitio subitanea a binario ad unitatem maximè mirabilis ac paradoxa videri posset. Sed quia, si fluxus bini successivi inter se sunt inæquales, refluxus aquæ seu maxima depressio fluxui minori est vicinior, bini æstus quoque successivi ratione temporis inter se erunt inæquales, si quidem voce æstûs intelligamus motum aquæ a summâ elevatione ad imam depressionem usque, ac vicissim. Quò magis itaque ab æquatore versùs polos recedatur, eò major deprehendetur inter binos æstus successivos inæqualitas, cùm ratione magnitudinis tùm temporis, major enim diutiùs durabit quàm minor, ambo verò simul ubique absolventur tempore 12 horarum, cum 24′. circiter: quòd si itaque in eas regiones usque perveniatur, in quibus Luna utrâque vice vel super horizonte vel sub horizonte meridianum attingit, æstus minor omnino evanescet, solusque major supererit, qui tempus 12 h. 24′. adimplebit. Ex quibus perspicuum est, si Luna habeat declinationem, inæqualitatem binorum æstuum successivorum ad polos accedendo continuò fieri majorem, atque tandem minorem omnino evanescere debere, quod cùm evenit, bini æstus in unum coalescunt.

§. 109. Explicatis anomaliis æstûs maris menstruis, pervenimus ad anomalias annuas vel plusquam annuas, ac nonum quidem phænomenon desumimus ex variatione æstûs, quæ a diversis Lunæ a Terrâ distantiis proficiscitur. Observantur enim æstus ubique majores ceteris paribus, in iisdem scilicet luminarium aspectibus iisdemque declinationibus, si Luna in suo perigæo versetur, minores verò, Lunâ in apogæo existente. Egregiè autem hæc conveniunt cum nostrâ theoriâ, quâ demonstravimus Lunæ vires ad mare movendum decrescere in triplicatâ ratione distantiarum Lunæ a Terrâ: quòd si igitur Luna versetur in perigæo, fluxus debebunt esse majores, quàm si Luna apogæum occupat. Præterea etiam

tabula quam celeb. Cassini in Mem. 1713. pro diversis Lunæ a Terrâ distantiis ex plurimis observationibus Brestiæ institutis collegit, satis accuratè cum theoriâ nostrâ conspirat, etiamsi enim pro Luna perigæa minorem elevationem aquæ tribuat, quàm ista ratio requireret, tamen discrimen valde est exiguum: quin etiam facilè concedetur Lunam perigæam totum suum effectum non tam citò consequi posse, quem consequeretur, si Luna perpetuò in perigæo versaretur. Aliter autem Luna apogæa est comparata, quæ ad diminuendum æstum maris tendit, cùm enim mare ob inertiam et impedimenta ipsum ad diminutionem æstûs sit proclive, sine ullâ resistentiâ Luna in apogæo constituta effectum suum exeret. Huc etiam pertinet, quod pariter celeb. Cassini se observasse testatur, similem differentiam etsi multò minorem a variis Solis a Terrâ distantiis produci, id quod nostræ theoriæ non solum est consentaneum, sed inde etiam ipsa quantitas hujus differentiæ potest definiri.

§. 110. Denique decimum phænomenon sese nobis contemplandum offert, quo vulgò statui solet æstus tam noviluniorum quàm pleniluniorum, qui contingunt circa æquinoctia, cæteris esse majores, etiamsi observationes hanc regulam non penitùs confirment; quamobrem videamus quomodo æstus cæteris paribus comparatus esse debeat pro diversis Lunæ declinationibus. Ac primò quidem ex nostrâ theoriâ (§. 87.) æstus dum Luna in æquatore versatur, maximos esse non posse, nisi in locis sub ipso æquatore sitis: atque eodem loco tabellam adjecimus, ex quâ patet, cuinam Lunæ declinationi maximi æstus respondeant. Ita pro elevatione poli 50^0. æstus maximi incidunt Lunæ declinationi 27°. si quidem g ponatur $= \frac{2}{25}$; at posito $g = \frac{1}{10}$, quod probabilius videtur, prodit Lunæ declinatio maximum æstum producens circiter 16°. id quod mirificè convenit cum observationibus ad littora Galliæ septentrionalia institutis, quibus constat maximos syzygiarum æstus mensibus Novembri et Februario accidere solere, quibus temporibus Luna ferè assignatam obtin declinationem. At quod fortè illi regulæ, quâ Lunæ in æquatore versanti maximi æstus adscribi solet, ansam præbuisse videtur, est modus æstuum quantitates definiendi peculiaris ac satis perversus; cùm enim crederent plerique observatores causis alienis tribuendam esse inæqualitatem, quæ inter binos æstus successivos intercedat, veram aquæ elevationem accuratiùs definire sunt arbitrari, si sumerent medium inter binos fluxus successivos. Quòd si autem hoc modo quique æstus æstimentur, tum utique maximi æstus in æquinoctia incidere observabuntur, id quod etiam nostræ theoriæ maximè est conforme, exceptis tantum regionibus polis viciñioribus. Cùm enim positis sinu elevationis poli $=$ P,

cosinu $= p$, sinu declinationis Lunæ $= Q$, cosinu $= q$, major æstus fiat per spatium $\frac{3g}{h(1-8g)}\left(pq+\frac{PQ(1-8g)}{1-2g}\right)^2$, minor verò per spatium $= \frac{3g}{h(1-8g)}\left(pq-\frac{PQ(1-8g)}{1-28}\right)^2$, (§. 86.) erit per hunc æstum maris mensurandi modum quantitas æstûs $= \frac{3g}{h(1-8g)}$ $\left(p^2q^2+\frac{(1-8g)^2P^2Q^2}{(1-2g)^2}\right) = \frac{3g}{h(1-8g)}\left(p^2-p^2Q^2+\frac{(1-8g)^2P^2Q^2}{(1-2g)^2}\right)$; ex quâ expressione perspicitur maximos æstus ubique, si quidem modo recensito mensurentur, Lunæ in ipso æquatore degenti respondere, nisi sit $\frac{(1-8g)^2P^2}{(1-2g)^2} > p^2$, hoc est nisi tangens elevationis poli major sit quàm $\frac{1-2g}{1-8g}$: his scilicet regionibus etiam Luna declinans ab æquatore majores æstus producet. At si ponatur $g = \frac{2}{25}$, prodit elevatio poli, ubi regula prolata fallere incipit, 66^0; sin autem ponatur $g = \frac{1}{58}$, fit elevatio poli major quàm 58°; at posito $g = \frac{1}{10}$, provenit poli elevatio 76°. Cùm igitur in locis polis tam vicinis observationes institui non soleant, satis tutò affirmare licet, maximos æstus menstruos accidere circa æquinoctia, si quidem quantitas æstûs quotidie mensuretur per medium arithmeticum inter spatia, quæ duo æstus successivi conficiunt.

§. 111. Quid nunc aliud de theoriâ nostrâ sit sentiendum, nisi eam veram et genuinam æstûs maris causam, qualis ab illustrissima Academia Regia in propositâ quæstione desideratur, in se complecti, non videmus? Non solum enim omnia phænomena, quæ in æstu maris observantur, clarè et distinctè explicavimus, sed etiam existentiam actualem earum virium, quibus hos effectus adscribimus, evidentissimè demonstravimus; ex quo efficitur causam a nobis assignatam, non tantum omnibus phænomenis satisfacere, sed etiam esse unicam quæ cum verâ consistere queat. Quòd si enim quispiam alias vires excogitet, quibus æquè omnia phænomena explicare posset, etiamsi hoc fieri posse minimè concedamus, ejus certè explicatio subitò concideret et everteretur a viribus nostræ theoriæ, quas aliunde in mundo existere abundè constat; quoniam ab illis viribus imaginariis hisque realibus conjunctim effectus duplicatus consequi deberet, quem experientia aversatur. Nunc igitur nobis summo jure asserere posse videmur, veram æstûs maris causam in duobus vorticibus esse posi-

tam, quorum alter circa Solem, alter circa Lunam agitetur, atque uterque ejus sit indolis, ut vires centrifugæ decrescant in duplicatâ ratione distantiarum a centris utriusque vorticis: quæ proprietas obtinetur, si celeritas materiæ subtilis gyrantis in quoque vortice teneat rationem reciprocam subduplicatam distantiarum. Neque verò hi duo vortices ad libitum sunt excogitati, sed ille qui Solem circumdat est is ipse, qui omnes planetas in suis orbitis continet; alter verò Lunam circumdans, etsi ejus vis nisi in æstu maris non sentitur, tamen sine ullâ hæsitatione admitti potest, cùm certò constet Terram, Jovem ac Saturnum similibus vorticibus esse cinctos, unde ejusmodi vortices nulli omnino corpori mundano denegari posse videntur. Parciùs quidem hîc materiam de vorticibus tractavimus, etiamsi in illis veram æstûs maris causam ponamus; hoc autem de industriâ fecimus, cùm hoc argumentum jam toties sit tractatum ac ferè exhaustum; neque nobis persuadere possumus, si hâc occasione doctrinam de vorticibus etiam meliùs, quam etiamnum a quoquam est factum, expediremus, ob eam rem præmium nobis tributum iri.

CAPUT OCTAVUM.

De Æstûs Maris perturbatione a Terris ac littoribus oriundâ.

§. 112. Pervenimus tandem ad ultimam nostræ disquisitionis partem, quæ præcipua est, in quâ theoriam expositam ad statum Telluris, in quo reverâ reperitur, debito modo accommodabimus. Hactenus enim, quò ardua ista disquisitio facilior redderetur ab omnibus circumstantiis externis quibus effectus a viribus Solis ac Lunæ oriundis vel turbari vel determinatu difficiliores reddi possent, cogitationem abstraximus. Primò scilicet non solum totam Terram ex aquâ conflatam posuimus, sed etiam inertiam aquæ mente sustulimus, ut eò pauciores res in computum ducendæ superessent. Deinde inertiæ quidem habuimus rationem, ac præcedentes determinationes debito modo correximus, verùm totam Terram aquâ undiquaque circumfusam assumsimus, seu etiamnum anomalias a Terris neglenximus. Nunc itaque nostra theoria eò est perducta, ut nihil ampliùs adjicere necesse foret, si quidem æstus maris a Terris littoribusque sensibiliter non afficeretur; nisi fortè anomaliæ quædam a ventis oriundæ commemorari deberent, quæ autem motu aquæ perspecto facilè

adjudicantur, atque ad omnes theorias æquè pertinent. Quamobrem ultimum hoc Caput destinavimus explicationi phænomenorum quorumdam singularium, quorum causa non tam in ipsâ aquâ viribusque eam sollicitantibus, quàm in Terrâ continenti littoribusque est quærenda: hac enim parte absolutâ nihil ampliùs restare videtur, quod vel ad theoriæ nostræ confirmationem, vel ad omnium phænomenorum adæquatam explicationem desiderari queat. Quamvis enim illustrissima Academia totum hoc argumentum non penitùs exhauriri jubeat, cùm adhuc nonnullas quæstiones de eodem in posterum proponere constituisset, tamen quia hoc tempore vera causa physica desideratur, veritatem nostræ theoriæ non satis confirmari arbitramur, nisi ejus convenientiam cum omnibus phænomenis dilucidè ostenderemus, cùm si vel unicum phænomenon refragaretur, eo ipso tota theoria subverteretur; quam ob causam prolixitatem nostræ tractationis, atque transgressionem limitum præscriptorum nobis sine difficultate condonatum iri confidimus.

§. 113. Primùm autem perspicuum est, motum maris horizontalem quo vel versùs orientem vel occidentem progreditur, ob Terram interpositam non solum perturbari, verùm etiam quandoque prorsus impediri debere. Suprà enim ostendimus, si tota Terra aquâ esset circumfusa, tum ubique ad fluxum formandum aquam ab oriente advehi debere, ante refluxum autem versùs ortum defluere. Quòd si ergo oceanus versùs orientem Terris terminetur, fieri omnino nequit tempore fluxûs ad hæc littora aqua ab oriente affluat, quo ipso cursus aquæ naturalis penitùs impedietur. Quoniam autem vires Solis ac Lunæ nihilominùs his in regionibus mare attollere conantur, effectum consequi non poterunt, nisi aqua ab occidente afferatur: sic quando ad littora Europæ aqua a viribus Solis ac Lunæ elevatur, aqua ab occidente eò deferatur necesse est, ab iis scilicet regionibus, ubi aqua eodem tempore deprimetur; quod idem fieri debet ad littora Africæ et Americæ occidentalia. Contrà verò ad littora Asiæ et Americæ orientalia aqua naturali motu feretur, atque in fluxu ab oriente adveniet, in refluxu verò versùs orientem recedet. Vires namque Solis ac Lunæ motum aquæ horizontalem non per se determinant, sed eâtenus tantum, quâtenus aliis in locis aquam attollunt, aliis verò eodem tempore deprimunt; atque aqua ob propriam gravitatem eum seligit motum, quo facillimè a locis quibus deprimitur, ad loca quibus attollitur promoveatur: quamobrem iste motus maximè a Terris oceanum includentibus determinetur necesse est. Hinc igitur perspectâ positione littorum cujusvis maris facilè definiri poterit, a quanam plagâ aqua in fluxu venire, quorsumque in refluxu decedere debeat, si modò elevationes et

depressiones aquæ per totum mare attentè considerentur: tota enim hæc quæstio pertinebit ad hydrostaticam.

§. 114. Cùm igitur ad littora Europæ aqua elevari nequeat, nisi affluxus ab occidente fiat copiosus, ad littora quæ versùs occidentem respiciunt aqua directè ab occidente adveniet, quæ autem littora ad aliam plagam sunt disposita, aquæ cursus versùs orientem directus inflectetur juxta littora, priusquam eò pertingat, omnino uti inspectio mapparum docebit. Quoniam verò iste aquæ juxta littora fluxus tantam celeritatem, quantam habet Luna, recipere nequit, necesse est, ut fluxus ad littora magis ad orientem sita tardiùs advehatur. Hæc autem versùs littora orientaliora retardatio maximè perspicua est in portubus Galliæ, Belgii, Angliæ, et Hiberniæ; cùm enim ad ostia fluviorum Garumnæ et Ligeris, quæ versùs oceanum amplissimum patent, tempore pleniluniorum ac noviluniorum fluxus adveniunt horâ tertiâ pomeridianâ, quæ retardatio naturalis censeri potest, neque littoribus adhuc turbata; hinc aqua demum ad littora Britanniæ Minoris ac Normanniæ progreditur; atque idcirco his in regionibus fluxus tardiùs evenire observantur. Sic ad Portum S. Malo tempore syzygiarum fluxus demum horâ sextâ sequitur, ad ostia verò Sequanæ usque ad horam nonam retardatur: atque ita porro retardatio augetur, donec tandem in Freto Gallico Dunkerquæ et Ostendæ mediâ nocte incidat. Ex hac verò retardatione innotescit celeritas aquæ, quâ juxta littora progreditur, eaque tanta deprehenditur quâ unâ horâ spatium circiter (†) 8. milliarium conficiat. Denique aqua tantam fere viam absolvere debet usque ad Dublinum, quantam ad Fretum Gallicum, ex quo fluxus etiam Dublini horâ circiter decimâ pomeridianâ observari solet. Atque simili modo retardatio fluxuum ad littora aliarum regionum sine ullâ difficultate explicari poterit.

§. 115. Quod autem ad quantitatem æstûs maris ad littora attinet, facilè intelligitur æstum maris ad littora majorem esse debere, quàm in medio mari. Primò enim aqua cum impetu ad littora allidit, ex quo allapsu solo jam intumescentia oriri debet. Deinde quoniam aqua eâdem celeritate, quam habebat oceano, ubi maxima est profunditas, progredi conatur, ad littora locaque vadosa vehementer inturgescet, tantum enim fere aquæ ad littora affertur, quantum sufficeret ad spatium, quod Terra occupat, inundandum. Tertiò iste aquæ affluxus in sinibus vadosis multò adhuc magis increscere debet, eò quòd aqua his in locis jam multum ap-

(†) Ita legitur in exemplari Parisino, procul dubio mendosè, sed locum restituere non sumus ausi; ab ostio Garumnæ ad Dublinum quingenta circiter Italica milliaria numerantur viâ rectissimâ, quæ horis 7 a fluxu percurruntur, qui ideo 70 milliaria singulis horis ad minimum emetiretur; unde 80 milliaria pro 8 milliaribus scribenda conjectamur.

pulsa ad latera diffluere nequit, si quidem sinus directè versùs eam plagam pateat, unde aqua advehitur. Ex his igitur non solum ratio patet, cur aqua fere ubique ad littora ad multo majorem altitudinem elevetur, quàm in medio mari, sed etiam cur Bristolii tam enormis fluxus circa syzygias luminarium observetur; cùm enim in hâc regione littus sit valdè sinuosum ac vadosum, aqua maximâ vi appellitur, neque ob sinuositatem tam citò diffluere potest. Atque ex his principiis non erit difficile rationem inconsuetorum æstuum, qui passim in variis portubus animadvertuntur, indicare atque explicare; quamobrem hujus generis phænomenis explicandis diutiùs non immoramur, cùm consideratio littorum et fluxûs aquæ eò sponte quasi manuducat.

§. 116. Quamvis autem tam affluxus aquæ ex Oceano Atlantico, quàm refluxus per Fretum Galliam ab Angliâ dirimens, ingenti fiat celeritate, tamen cùm versùs Belgium fœderatum mare mox vehementer dilatetur, ab isto alterno fluxu ac refluxu altitudo maris in Oceano Germanico sensibiliter mutari nequit. Atque hanc ob causam statui oportet, in hoc mari æstum proficisci maximam partem ab affluxu et refluxu aquæ circa Scotiam, ubi communicatio hujus maris cum Oceano Atlantico multo major patet; quam sententiam magnopere confirmat ingens æstuum retardatio ad littora Belgii et Angliæ orientalia observata: ad ostia scilicet Thamisis pertingit fluxus elapsis jam duodecim horis post transitum Lunæ per meridianum, atque Londinum usque tribus ferè horis tardiùs defertur; quod phænomenon consistere non posset si aqua per Fretum Gallicum solùm moveretur, cùm jam in ipso Freto duodecim horis retardetur fluxus. Interim tamen negari non potest quin communicatio Maris Germanici cum Oceano Atlantico per Fretum Gallicum æstum quodammodo afficiat, atque fluxum qui circa Scotiam advehitur vel adjuvet vel turbet, prout hi ambo motus ad mare elevandum ac deprimendum vel magis inter se conspirent vel minus. Simul autem hinc intelligitur æstum maris ex Oceano Atlantico neque cum Mari Mediterraneo neque cum Mari Baltico communicari posse, cùm intervallo sex horarum per Freta Herculea et Oresundica tantum aquæ in hæc maria neque affluere queat neque inde refluere, ut sensibilis mutatio in altitudine aquæ oriri queat. Quamobrem in istiusmodi maribus quæ a vasto oceano tantum angustis fretis separantur, æstus omnino nullus contingere potest, nisi forte talia maria Terris inclusa ipsa tam sint ampla, ut vires Solis ac Lunæ æstum peculiarem in iis producere queant; quâ de re mox videbimus.

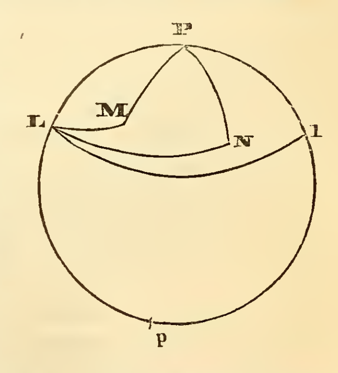
§. 117. Quemadmodum autem vidimus in Mari Germanico duplicem

æstum, quorum alter, qui quidem longè est minor, per Fretum Gallicum, alter circa Scotiam advehitur ex eodem Oceano Atlantico: ita propter singularem littorum quorumdam situm mirabilia phænomena in æstu maris evenire possunt. Quòd si enim littus quodpiam ita fuerit comparatum, ut æstus in id duplici viâ vel ex eodem oceano, vel ex diversis communicetur, ratione temporis, quo bini isti æstus adveniunt, insignes discrepantiæ oriri poterunt. Nam si per utramque viam fluxus eodem tempore advehatur, atque adeo simul refluxus congruant, æstus multo majores existere debebunt. Sin autem eo tempore, quo per alteram viam fluxus advenit, ex alterâ viâ refluxus incidat, tum æstus omnino destruetur si quidem per utramque viam aqua æqualiter vel affluat vel defluat. Ad hoc verò non sufficit ambæ viæ sint æquales, sed etiam requiritur ut bini æstus successivi sint æquales, id quod evenit si Luna vel non habeat declinationem, vel littus in æquatore fuerit positum. Quòd si autem eâdem duplici communicatione positâ, tam Luna habeat declinationem, quàm littus notabiliter ab æquatore sit motum, tum ob inæqualitatem binorum æstuum sese insequentium, fluxus majores ex alterâ viâ advenientes, superabunt refluxus minores eodem tempore per alteram viam factos, atque hoc modo in tali littore singulis diebus non bini fluxus, sed unus tantum accidet; hancque rationem allegat Newtonus æstûs illius singularis Tunquini observati, ubi si Luna in æquatore versatur, nullus æstus deprehenditur, sin autem Luna habeat declinationem, unicus tantum unâ Lunæ revolutione circa Terram. Nos autem mox hujus mirabilis phænomeni aliam magis naturalem nostræque theoriæ conformem indicabimus causam.

§. 118. Hactenus æstum maris, quemadmodum in amplissimo oceano a viribus ad Lunam ac Solem tendentibus producatur, atque vario littorum situ cùm ratione quantitatis tùm retardationis diversimodè turbetur, sumus contemplati, neque necesse esse duximus ventorum marisque cursuum propriorum rationem habere: cùm satis pronum sit perspicere, quomodo his rebus æstus maris tam augeri vel diminui, quàm accelerari vel retardari debeat. Superest igitur ut exponamus, quomodo in satis amplo tractu maris, qui ab oceano vel omnino est sejunctus, vel per angustum tantùm canalem conjunctus, peculiaris æstus a viribus Lunæ ac Solis produci queat. Perspicuum enim est, si talis tractus secundùm longitudinem ultra 90 gradus pateat, æstum pari modo generari debere, ac in amplissimo oceano, qui totam Tellurem ambire ponitur. Nam quoniam extensio tanta est, ut vires Lunæ et Solis in eo tractu simul maximam ac minimam aquæ altitudinem inducere queant, necesse est

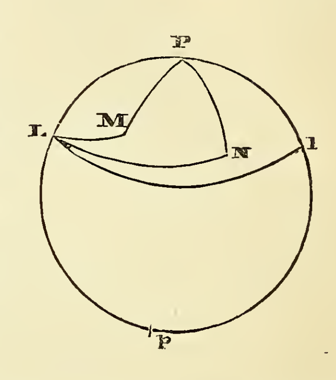
etiam, ut aqua alio in loco tantum elevetur, inque alio tantum deprimatur, quantum fieret, si iste tractus omnino non esset terminatus. At si iste tractus tam fuerit parvus ut singulæ partes æqualibus fere viribus simul vel attollantur vel deprimantur, nulla sensibilis mutatio oriri poterit. Aqua enim uno in loco attolli nequit nisi in alio subsidat et contrà, si quidem eadem aquæ copia in eo tractu perpetuò conservetur. Atque hæc est ratio ut in Mari Baltico, Caspio, Nigro, aliisque minoribus lacubus nullus omnino æstus deprehendatur.

§. 119. Quòd si autem istiusmodi maris tractus tantum spatium occupet, ut vires attollentes et deprimentes in extremitatibus sensibiliter differant, tum necesse est ut non solum aqua in altero extremo elevetur in alteroque deprimatur, sed etiam ut differentia inter aquæ altitudines tanta sit, quanta in aperto oceano eidem virium differentiæ respondet. Quamobrem definiri conveniet, quanta in diversis Terræ locis eodem tempore in altitudinibus aquæ a viribus Lunæ ac Solis produci queat. Ne autem calculus nimium fiat prolixus, solam Lunæ vim in computum ducemus, quippe quæ vim Solis multum excedit; et quoniam effectu Lunæ cognito facile est Solis effectum æstimando vel adjicere vel auferre. Repræsentet ergo P L p l superficiem Terræ cujus poli sint P et p, atque M et N sint duo termini in eodem maris tractu assumti, in quibus quantum maris altitudo quovis tempore differat, sit investigandum. Repræsentet porro L l parallelum, in quo Luna moveatur hoc tempore, sitque Luna in L; atque exprimet angulus L P M tempus, quod post Lunæ transitum per meridianum termini M est præterlapsum, angulus verò L P N tempus post transitum Lunæ per meridianum alterius termini N. Ductis autem circulis maximis P M et P N, erit arcus P M complementum latitudinis loci M, arcus P N verò loci N, angulus verò M P N dabit differentiam longitudinis locorum M et N; quæ proinde omnia ponuntur cognita.



§. 120. Ducantur jam ex loco Lunæ L ad terminos M et N circuli maximi L M et L N, exhibebuntque isti arcus complementa altitudinum, quibus hoc tempore Luna in locis M et N supra horizontem elevata conspicitur. Ponatur arcûs P L sinus = q, cosinus = Q, erit Q sinus declinationis borealis Lunæ, si quidem Q habeat valorem affirmativum, ac P polum borealem denotet. Deinde ponatur arcûs P M sinus = p,

cosinus = P, erit P sinus elevationis poli pro loco M; similique modo sit arcûs P N sinus = r et cosinus = R, ita ut R sit sinus elevationis poli loci N: denique sit anguli M P N sinus = M et cosinus = m, anguli vero L P M sinus = T, cosinus = t; unde erit anguli L P N cosinus = m t — M T. Ex his per trigonometriam sphæricam reperietur sinus altitudinis Lunæ supra horizontem loci M seu cosinus arcûs L M = t p q + Q P: pro loco N verò erit altitudinis Lunæ sinus = (m t — M T) q r + Q R. Quare si, ut suprà, vis absoluta ad Lunam urgens ponatur = L et distantia Lunæ a Terrâ = b, erit altitudo ad quam aqua in M elevari deberet = $\frac{L(3(t p q + P Q R)^2 - 1)}{2 b^3}$, et altitudo

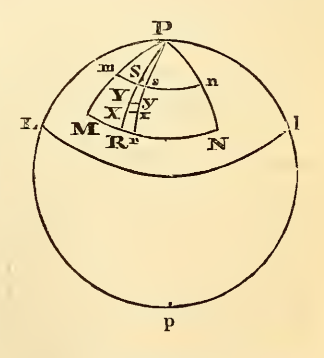


ad quam aqua in N elevari deberet = $\frac{L(3((m t - M T) q r + Q R)^2 - 1)}{2 b^3}$ utroque casu supra libellam naturalem. Si ergo illa expressio hanc excedat, aqua in M altiùs erit elevata quàm in N intervallo $\frac{3 L}{2 b^3} \times ((t p q + P Q)^2 - ((m t - M T) q r + Q R)^2)$, hæcque expressio, quando fiet negativa, indicabit, quantò aqua in N altiùs consistat quàm in M. In hoc verò negotio inertiam aquæ negligimus, quoniam tantum proximè phænomena hujusmodi casibus oriunda indicare annitimur; si enim hanc materiam perfectè evolvere vellemus, integro tractatu foret opus.

§. 121. Ponamus tractum nostrum maris ab oriente N versùs occidentem M sub eodem parallelo extendi, ita ut elevatio poli in locis M et N sit eadem; erit adeo R = P, et r = p. Transeat nunc Luna per meridianum loci M supra Terram, ita ut sit T = 0, t = 1; hoc ergo tempore magis erit elevata in M quàm in N intervallo $\frac{3 L}{2 b^3}((p q + P Q)^2 - m p q + P Q)^2) = \frac{3 L}{2 b^3}(M^2 p^2 q^2 + 2(1 - m) p q P Q)$. At quando Luna per meridianum loci N supra Terram transit, aqua tantundem magis erit elevata in N quàm in M. Ex quo sequitur, dum Luna a meridiano loci N ad meridianum loci M progreditur, aquam in M sensim elevari per spatium $\frac{3 L p q}{2 b^3}(M^2 p q + 2(1 - m) P Q)$ interea verò in N tantundem

subsidere. Sin autem Luna infra Terram a meridiano loci N ad meridianum loci M progrediatur, aqua in M elevabitur interea per spatium $= \frac{3 L p q}{2 b^3} (M^2 p q - 2(1 - m) P Q)$, per tantumque spatium aqua in N subsidet. Ponamus nunc angulum L P M esse 90 graduum, seu questionem institui, cùm Luna jam ante sex horas meridianum loci M sit transgressa, atque obtinebitur differentia inter aquæ altitudines in locis M et N $= \frac{3 L}{2 b^3} (P^2 Q^2 - (P Q - M p q)) = \frac{3 L p q}{2 b^3} (2 M P Q - M^2 p q)$. Sex autem horis, antequam Luna ad meridianum loci M apellit, aqua in N magis erit elevata quàm in M intervallo $= \frac{3 L p q}{2 b^3} \times (2 M P Q + M^2 p q)$. Sequuntur hæc si inertia aquæ negligatur; at inertiâ admissâ ex præcedentibus satis clarum est, cùm has differentias majores esse debere, tùm tempora mutationum tardiùs sequi debere.

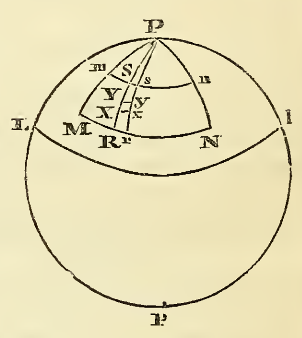
§. 122. Quoniam verò in hoc maris tractu perpetuò eadem aquæ quantitas contineri debet, necesse ut quantùm aquæ unâ parte supra libellam attollatur, tantundem ea in reliquâ parte infra libellam deprimatur. Quò igitur hinc altitudinem maris quovis loco exactè determinemus, ponamus tractum nostrum secundùm longitudinem terminari binis meridianis P M et P N, secundùm latitudinem verò binis parallelis M N et m n, positâque Lunâ in L sit sinus P L = q, cosinus = Q; sinus L P M = T, cosinus = t. Porro sit sinus arcûs P M = p, cosinus = P, sinus P m = r, cosinus = R, atque anguli M P N sinus = M et cosinus = m. Præterea sit elevatio in M dum Luna in L versatur, supra libellam = α, ita ut hoc loco suprema aquæ superficies a centro Terræ distet intervallo = $1 + \alpha$, unde cùm sinus altitudinis Lunæ in M sit $= t p q + P Q$, erit gravitatio totiùs columnæ aqueæ ab M ad centrum Terræ $= \frac{(1 + \alpha)^{n+1}}{n + 1} + \frac{L (1 - 3 (t p q + P Q)^2)}{2 b^3} = \frac{1}{1 + n} + \alpha + \frac{L (1 - 3 (t p q + P Q)^2)}{2 b^3}$, prouti suprà §. 43. et 44. demonstravimus.



Consideretur jam locus quicunque X in nostro tractu, in quo aqua supra libellam sit elevata spatio = φ; ac ducto per hunc locum meridiano P R, sit anguli L P R sinus = X, cosinus = x; arcûs P X sinus = z et co-

sinus = Z, unde gravitatio columnæ aqueæ ex X ad centrum Terræ pertingentis erit $= \frac{1}{1+n} + \varphi + \frac{L(1-3(x\,q\,z+Q\,Z)^2)}{2\,b^3}$. Cùm igitur hæc gravitatio æqualis esse debeat illi, orietur $\varphi = \alpha + \frac{3\,L}{2\,b^3}((x\,q\,z + Q\,Z)^2 - (t\,p\,q + P\,Q)^2)$, ex quâ formulâ si modò constaret elevatio aquæ in M, simul innotesceret elevatio vel depressio in quovis loco X.

§. 123. Cùm ergo in X aqua supra libellam elevetur spatio φ, in elemento tractûs infinitè parvo X Y y x, plus inerit aquæ, quàm in statu naturali, et quidem quantitas X Y, X x. φ, cujus elementi integrale per totum tractum sumtum debet esse = 0, ex quo valor ipsius α innotescet. Erit autem angulus R P r = $\frac{d\,Y}{x}$, hincque arculus X x = $\frac{z\,d\,X}{x}$, at elementum X Y = $\frac{d\,Z}{x}$, ex quo infinitè parvum rectangulum X Y y x = $\frac{d\,X\,d\,Z}{x}$, in quo ergo excessus aquæ supra statum naturalem est $= \frac{\varphi\,d\,X\,d\,Z}{x} = \frac{d\,X}{x}(\alpha\,d\,Z + \frac{3\,L\,d\,Z}{2\,b^3}((x\,q\,z + Q\,Z)^2 - (t\,p\,q + P\,Q)^2))$, quæ formula bis debet integrari. Ponatur primò X constans, et integratione absolutâ reperietur in elemento R S s r excessus aquæ supra statum naturalem $= \frac{d\,X}{x}(\alpha\,(R-P) + \frac{3\,L}{2\,b^3}(q^2\,x^2\,(R-P) - \frac{x^2\,q^2}{3}(R^3 - P^3) - \frac{2\,x\,Q\,q}{3}(r^3 - p^3) + \frac{Q^2}{3}(R^3 - P^3) - (t\,p\,q + P\,Q)^2\,(R-P)))$. Integretur hæc formula denuo ut integrale ad totum tractum M N n m extendatur, prodibitque incrementum aquæ, quod toti tractui accessisse oporteret, $= \alpha\,(R-P)\,A\ \text{sin.}\ M + \frac{3\,L}{2\,b^3} \times \left(\frac{q^2\,(3\,(R-P) - (R^3 - P^3))}{6}(M\,m\,(1 - 2\,T\,T) - 2\,M^2\,T\,t) + \frac{2\,Q\,q\,(r^3 - p^3)}{3}(T - M\,t - m\,T) + \frac{q^2\,(R-P)}{2}\,A\ \text{sin.}\ M + \frac{(3\,Q^2 - 1)(R^3 - P^3)}{6}\,A\ \text{sin.}\ M - (t\,p\,q + P\,Q)^2\,(R-P)\,A\ \text{sin.}\ M\right)$, quæ adeo quantitas debet esse = 0: unde oritur $\alpha = \frac{3\,L\,(t\,p\,q + P\,Q)^2}{2\,b^3}$

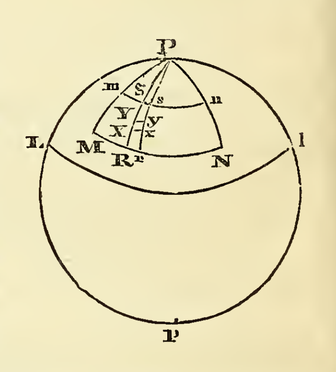


$+ \frac{L(1-3Q^2)(R^2+PR+P^2)}{4b^3} - \frac{3Lq^2}{4b^3} + \frac{3L}{2b^3(R-P)A\sin.M}$ $\left(\frac{q^2(3(R-P)-(R^3-P^3))}{6}(2M^2Tt - Mm(1-2TT)) + \frac{2Qq(p^3-r^3)}{3}(T - Mt - mT)\right)$.

§. 124. Cognitâ igitur verâ elevatione aquæ in M supra libellam, quam antè posuimus $= \alpha$, hinc intelligetur vera aquæ elevatio supra libellam in loco quocunque X. Ponatur enim sinus anguli M P X = S et cosinus = s, erit sin. L P R = X = T s + t S et x = t s — T S, manentibusque arcûs P X sinu = z et cosinu = Z, erit elevatio aquæ in X = φ $= \alpha + \frac{3L}{2b^3}((ts-TS)qz+QZ)^2 - \frac{3L}{2b^3}(tpq+PQ)^2$; quare loco α valore invento substituto, reperietur aqua in X supra libellam attolli actu per spatium $= \frac{3L}{2b^3}((ts-TS)qz+QZ)^2 + \frac{L(1-3Q^2)(R^2+PR+P^2)}{4b^3} - \frac{3Lq^2}{4b^3} + \frac{3L}{2b^3(R-P)A\sin.M}$ $\left(\frac{q^2(3(R-P)-R^3-P^3)}{6}(2M^2Tt - Mm(1-2TT)) + \frac{2Qq(p^3-r^3)}{3}(T - Mt - mT)\right)$. Quòd si ergo ponatur tractus noster ita augeri ut totam Tellurem ambiat, orietur casus jam suprà tractatus; quoniam enim fit M N = 360°. seu A sin. M = 2 π denotante 1 : π rationem diametri ad peripheriam, erit M = 0 et m = 1 : præterea verò quia M in polum australem p, m verò in borealem P incidit, erit p = 0, P = — 1, r = 0 et R = + 1 : si hi valores substituantur, prodibit elevatio aquæ in X $= \frac{L}{2b^3}(3((ts-TS)qz+QZ)^2 - 1)$, quæ expressio, quia t s — T S denotat cosinum anguli L P X atque (t s — T S) q z + Q Z sinum altitudinis Lunæ supra horizontem in X, cum superioribus formulis exactissimè convenit: si quidem terminus $\frac{L}{b^4}$ negligatur. Hæc verò eadem ipsa expressio quoque emergit, si tantum alterum hemisphærium vel boreale vel australe ponatur aquâ totum circumfusum, manent enim omnia ut antè, nisi quòd fiat p = 1 et P = 0: utroque enim casu fit $R^2 + PR + P^2 = 1$; ultimusque terminus ob M = 0 utroque casu evanescit.

§. 125. Ponamus nunc tractum maris secundùm longitudinem M N usque ad 180 gradus extendi, erit M = 0 et m = — 1 et A sin. M = π,

denotat enim A sin. M semper arcum circuli, qui mensura est anguli MPN; hinc si brevitatis gratiâ ponatur sinus anguli, quo Luna in X supra horizontem elevata apparet, = v, erit aquæ elevatio in X supra libellam = $\frac{3\,L\,v^2}{2\,b^3} + \frac{L\,(1 - 3\,Q\,Q)\,(R^2 + P\,R + P^2)}{4\,b^3} - \frac{3\,L\,q\,q}{4\,b^3} + \frac{2\,L\,T\,Q\,q\,(p^3 - r^3)}{(R - P)\,b^3\,\pi}$. Ponamus porro integrum hemisphærium L P l p aquâ esse circumfusum, fiet p = 0, P = —1, r = 0 et R = 1; unde elevatio aquæ in X erit = $\frac{L\,(3\,v^2 - 1)}{2\,b^3}$, omnino ac si tota Terra aquâ cincta esset, uti in præcedentibus Capitibus posuimus, vel quod eodem redit, dummodo omnis aqua super Terra mutuam habeat communicationem satis amplam. Quòd si autem tractus noster maris tantum ad æquatorem usque porrigatur a polo P, ita ut quartam superficiei terrestris partem solum obtegat, tum erit p = 1, P = 0, r = 0 et R = 1, hoc itaque casu aqua in X elevabitur ad altitudinem = $\frac{L\,(3\,v^2 - 1)}{2\,b^3} + \frac{2\,L\,T\,Q\,q}{\pi\,b^3}$ ex quo perspicitur hoc casu elevationem in X majorem, quàm si tota Terra aquâ esset circumdata, si expressio T Q q habeat valorem affirmativum, minorem verò si T Q q habeat valorem negativum. Sed limites huic quæstioni præscripti non permittunt hinc plura consectaria deducere, cùm debita evolutio satis amplum tractatum requirat, neque theoria ulteriori confirmatione indigeat. Quocirca coronidis loco duos tantum casus evolvemus, quorum altero latitudo tractûs ponetur infinitè parva, altero verò longitudo: quippe qui ad phænomena quædam singularia explicanda inservire poterunt.



§. 126. Ponamus igitur latitudinem M m infinitè esse parvam, seu R = P et r = p, reperietur aquæ in X elevatio supra libellam = $\frac{3\,L\,v^2}{2\,b^3} + \frac{3\,L\,(p^2 - q^2 - 3\,P^2\,Q^2)}{4\,b^3} + \frac{3\,L\,p\,q}{2\,b^3\,A\,\text{sin.}\,M}\Big(\frac{p\,q}{2}$ $(2\,M^2\,T\,t - M\,m\,(1 - 2\,T\,T)) + 2\,P\,Q\,(T - M\,t - m\,T)\Big)$. Considéremus autem elevationem in M, ubi cùm sit v = t p q + P Q, erit ea = $\frac{3\,L\,p\,q\,(2\,t\,t\,p\,q + 4\,t\,P\,Q - p\,q)}{4\,b^3} + \frac{3\,L\,p\,q}{4\,b^3\,A\,\text{sin.}\,M}\,(p\,q\,(2\,M^2\,T\,t - M\,m\,(1 - 2\,T\,T)) + 4\,P\,Q\,(T - M\,t - m\,T))$. Transeat nunc Luna

per meridianum loci M supra Terram, erit $T = 0$, et $t = 1$, atque elevatio in M prodibit $= \frac{3 L p q (p q + 4 P Q)}{4 b^3} + \frac{3 L p q}{4 b^3 A \sin. M}(M m p q + 4 M P Q)$; at si per eundem meridianum infra Terram transeat, erit aquæ elevatio $= \frac{3 L p q (p q - 4 P Q)}{4 b^3} - \frac{3 L p q}{4 b^3 A \sin. M}(M m p q - 4 M P Q)$. Quòd si autem Luna versùs ortum a meridiano distet angulo horario 90 graduum, seu circiter 6 horis ante appulsum Lunæ ad meridianum in M superiorem, erit $T = -1$ et $t = 0$, unde elevatio erit $= \frac{-3 L p^2 q^2}{4 b^3} + \frac{3 L p q}{2 b^3 A \sin. M}(p q M m - 2 P Q (1 - m))$, sex verò horis post transitum Lunæ per meridianum loci M versùs occasum, erit altitudo aquæ in M supra libellam $= \frac{-3 L p^2 q^2}{4 b^3} + \frac{3 L p q}{2 b^3 A \sin. M}(2 p q M m - 2 P Q (1 + m))$.

§. 127. Tribuamus huic tractui longitudinem 90 graduum, ut sit $M = 1$, $m = 0$, et $A \sin. M = \frac{\pi}{2}$, unde oritur elevatio aquæ in $M = \frac{3 L p q (2 t t p q + 4 t P Q - p q)}{4 b^3} + \frac{3 L p q}{2 \pi b^3}(2 p q T t + 4 P Q (T - t))$. Quæ si etiam declinatio Lunæ ponatur $= 0$, fiet $= \frac{3 L p^2 q^2 (2 t t - 1)}{4 b^3} + \frac{3 L p^2 q^2 T t}{\pi b^3}$ existente $q = 1$, unde apparet maximam elevationem non accidere cùm Luna per meridianum loci M transit, sed tardiùs, et quidem si dupli anguli L P M sinus fuerit $= \frac{2}{\pi}$, hoc est ferè unâ horâ post transitum Lunæ per meridianum, hoc igitur casu fluxus in M unâ ferè horâ tardiùs observetur, quàm si tota Terra aquâ esset circumfusa. Dum autem Luna per meridianum superius transit, erit elevatio $= \frac{3 L p p}{4 b^3}$, quæ etiam valet si Luna infra Terram meridianum attingat; at sex horis vel antè vel post, quando Luna in horizonte versatur, erit aquæ depressio $= \frac{-3 L p p}{4 b^3}$. Unde intelligitur in tali maris tractu pariter quotidie binos fluxus totidemque refluxus accidere debere, atque æstum propemodum fore similem æstui generali, nisi quòd majoribus anomaliis sit obnoxius, præcipuè si Luna habeat declinationem.

§. 128. Hinc explicari potest ratio æstûs, qui in Mari Mediterraneo

observatur, et qui in ipso hoc mari generatur. Cùm enim longitudo hujus maris ne 60 quidem gradus attingat, æstus erunt multò minores; decrescunt enim si cùm longitudo diminuatur, tum elevatio poli augeatur. Quòd si ergo in his formulis angulus M P N ponatur ferè 60 graduum, atque elevatio poli debita introducatur, reperientur quidem æstus bini quotidie evenire debere, qui autem futuri sint multò minores, quàm in medio mari, et pluribus anomaliis subjecti, quas quidem omnes ex formulis definire licebit. Quoniam ergo tam exigui æstus a ventis et cursu aquæ, qui in hoc mari notabilis deprehenditur, vehementer turbantur, ad pleraque littora hujus maris vix usquam æstus regularis observabitur. Excipi autem debet Mare Adriaticum, quod cùm sinum formet amplum, advenientem aquam meliùs colliget, atque elevationem multò sensibiliorem parietur, a quo æstus maris Venetiis observatus originem habet. Tametsi enim Mare Mediterraneum non solum, satis amplam habeat latitudinem, sed etiam vehementer inæqualem, tamen ejusmodi marium æstus admodum exquisitè ex præsenti casu, quo latitudinem omnino negligimus, colligi potest, quia extensio maris in longitudinem præcipuam causam æstuum binorum singulis diebus evenientium continet, neque extensio latitudinis multum conferat.

§. 129. Ponamus nunc tractûs nostri maris longitudinem evanescere, totumque tractum in eodem meridiano P p ab M usque ad N extendi, ita ut sit M = 0, m = 1; sinus autem elevationis poli in M sit = P, cosinus = p, in N verò sit sinus elevationis poli = R, cosinus = r. Ex his si Luna in L versetur, ob A sin. M = M, erit in M elevatio aquæ supra libellam $= \frac{3\,L\,(t\,p\,q + P\,Q)^2}{2\,b^3} +$

$$\frac{L\,(1 - 3\,Q^2)\,(P^2 + P\,R + R^2)}{4\,b^3} - \frac{3\,L\,q^2}{4\,b^3} + \frac{L}{4\,b^3}\,(q^2\,(3 - P^2 - P\,R - R\,R) \times (2\,T\,T - 1) - \frac{4\,Q\,q\,t\,(p^3 - r^3)}{R - P} = \frac{L}{2\,b^3} \times$$

$$((t\,t\,q\,q - Q\,Q)\,(R^2 + P\,R - 2\,P^2) + \frac{2\,Q\,q\,t\,(3\,P\,p\,R + r^3 - 3\,P^2\,p - p^3)}{R - P}.$$

Quòd si nunc ponatur alter terminus N ultra æquatorem versùs austrum situs, ita ut sinus elevationis poli australis in N duplo major sit quàm sinus elevationis borealis in M, seu R = — 2 P et r = $\sqrt{}$ (1 — 4 P²), erit $R^2 + P\,R - 2\,P^2 = 0$, atque elevatio aquæ in M supra libellam erit

$= \frac{L Q q t}{3 b^3 P} (9 P^2 p + p^3 - r^3)$. Ex hâc igitur formulâ sequitur, si Lunæ declinatio sit nulla seu $Q = 0$, tum nullum omnino æstum in M observari debere. Quòd si autem Luna habeat borealem, tum ad transitum Lunæ per meridianum superiorem aquam attolli ad spatium $= \frac{L Q q}{2 b^3 P} \times (9 P^2 p + p^3 - r^3)$; at dum Luna in alterutro circulo horario sexto versetur, tum aquam ad libellam naturalem fore constitutam; Lunâ autem infra horizontem ad meridianum appellente, aquam infra libellam depressum iri per spatium $= \frac{L Q q}{2 b \ P} (9 P^2 p + p^3 - r^3)$; contrarium denique fore æstum, si Luna habeat declinationem australem. In tali igitur maris tractu quotidie semel tantum aqua affluet, semelque refluet, si quidem Luna habeat declinationem; nam si Luna æquatorem occupat, æstus omnino erit nullus.

§. 130. Ex hoc casu aptissimè explicari posse videtur phænomenon illud æstûs singularis, qui in portu Tunquini ad Batsham observatur, ubi omninò ut in præsente casu dum Luna in æquatore versatur, mare nullum æstum sentit; at dum Luna removetur ab æquatore vel versùs boream vel versùs austrum, quotidie aqua semel tantum affluit semelque refluit, prorsus ut calculus monstravit; scilicet si Lunæ declinatio fuerit borealis, aqua versùs Lunæ occasum, hoc est post transitum Lunæ per meridianum super horizonte, affluit, versùs ortum verò defluit, quæ retardatio ab inertiâ aquæ et motu ad littora provenire intelligitur ut suprà. Contrà verò si Lunæ declinatio sit australis, aqua deprimitur Lunâ ad occasum inclinante, Lunâ autem oriente, attollitur: quæ phænomena apprimè conveniunt cum casu modò exposito. Est præterea elevatio poli Tunquini 20°. 50′. borealis, atque mare utrinque cùm Peninsulis tùm Insulis ab utroque Oceano Pacifico et Indico fere prorsus separatur, saltem ut libera communicatio non adsit: præterea hic idem maris tractus, qui versùs boream ad littora Regni Tunquini terminatur, extenditur ultra æquatorem ad gradus circiter 45. cujus latitudinis sinus circiter duplo major est, quàm sinus latitudinis borealis 20°. 51′.: quocirca ex his circumstantiis per nostram theoriam eadem ipsa singularia phænomena æstûs maris observari debent, quæ actu observantur: atque hoc modo si ullum adhuc dubium circa nostram theoriam reliquum fuisset, id resolutione hujus mirabilis phænomeni funditùs sublatum iri confidimus.

FINIS PRIMÆ PARTIS TOMI SECUNDI.

INTRODUCTIO

AD

LUNÆ THEORIAM NEWTONIANAM.

Tria sunt in Lunæ Theoriâ spectanda, in quibus versatur omnis quæstio astronomica quæ de ipsâ institui potest; primùm, ejus motus quâtenus e Terrâ observatur; secundò, figura lunaris orbitæ a circulo plùs minusve recedens et apsidum ejus positio; ac tertiò, ejus orbitæ ad eclipticam inclinatio.

Si extrà Solis actionem Luna motus suos ageret, Luna ellipsim quamlibet circa Terram describere posset in plano quovis, et ea ellipsis perpetuò eadem maneret constantemque angulum cum eclipticâ efficeret; itaque tota theoria Lunæ circa hæc versaretur elementa, primò, ut ex tempore quod Luna consumeret ut a quâdam stellâ discedens ad eamdem rediret, obtineatur duratio ejus mensis periodici siderei sicque motus ejus medius determinetur, unde facile obtinebitur via quam Luna dato tempore per eum motum medium emetiri potest, ita ut, datâ epochâ, hoc est, dato loco cœli in quo Luna aliquando observata fuisset, inde quem in locum migrare debuisset, dato tempore, per medii motûs calculum inveniri posset.

Postea; locus apogæi Lunæ, quod in cœlis eidem puncto semper responderet, foret requirendus, tum excentricitas ejus orbitæ, sic enim figura ellipseos quam Luna describit obtineretur, et quia, citra Solis actionem, Luna moveretur secundùm legem Keplerianam, hoc est, ita ut tempora quibus durantibus Luna moveretur, non quidem sint proportionalia angulis e Terrâ spectatis, sed areis descriptis, hinc fiet ut differentia loci Lunæ per motum medium computati ab ejus loco vero, obtineatur ex orbitæ lunaris figurâ per methodos notas, quæ differentia dicitur æquatio Lunæ soluta, hoc est, æquatio a Sole non pendens, et intelligetur quibus in locis illa æquatio sit adhibenda ex situ cognito apogæi Lunæ, pendet enim omninò ea differentia ex situ Lunæ in orbe suo respectu apogæi sui.

Tertiò. Quærendum foret observationibus, quibus in locis Luna

eclipticam secet, cui nempe cœli loco respondeant ejus nodi, qui in hac hypothesi fixi forent, et quonam angulo orbita Lunæ foret inclinata ad eclipticam, unde quoniam ea inclinatio constans esset, distantiâ Lunæ a plano eclipticæ per perpendiculum mensuratâ, foret semper proportionata distantiæ perpendiculari Lunæ a lineâ nodorum, itaque ex cognito loco Lunæ et nodorum cognosci poterit quonam sub angulo Luna ab eclipticâ distare videatur ex ipsâ Terrâ; et ad quodnam punctum eclipticæ referri debeat.

Si itaque Lunæ motus citra actionem Solis considerentur, tabulæ astronomicæ lunares hæc continere debebunt.

Primò. Epocham loci Lunæ dato aliquo tempore; tum observationem loci apogæi quod fixum maneret, et observationem loci nodorum pariter fixorum.

Postea continere debebunt tabulam motus medii, tum tabulam æquationis Lunæ secundùm ejus distantiam mediam ab apogæo; tabulam latitudinis Lunæ secundùm variam distantiam Lunæ a nodo et denique tabulam reductionis Lunæ ad eclipticam, secundùm eam distantiam Lunæ a nodo.

Possunt his addi, tabula distantiarum Lunæ a Terrâ secundùm ejus distantiam ab ejus apogæo, tabula diametrorum ejus apparentium secundùm eamdem distantiam ab apogæo, et denique tabula parallaxeos quâ deprimitur Luna respectu spectatoris in superficie Telluris collocati, prout diversa est ejus a Terrâ distantia, et prout altitudo supra horizontem est diversa.

Talis foret tota de Lunâ theoria, citra Solis actionem; sed jam a longo tempore intellexerunt astronomi, lunares motus a Lunæ situ respectu Solis plurimum turbari, unde varias correctiones, sive æquationes variis titulis concinnare sunt conati.

Quàm luculenter ex gravitatis theoriâ, hæc non modò explicentur, sed etiam accurato calculo determinentur, demonstrare aggressus est Newtonus, et eas omnes æquationes quæ ex Sole pendent, calculis ex theoriâ suâ deductis ita feliciter statuit ut motus Lunæ ejusve æquationes ex calculo repertæ in minuto secundo aut propè cum iis quæ ab accuratioribus observationibus determinari potuerunt, consentiant, quod autoritatem integram illi theoriæ conciliat. Calculi autem illi, nec faciles sunt, nec compendiosi, nec semper commodè ad syntheticam formam reducendi; quos Newtonus hâc ultimâ ratione lectori suo sistere potuit, eos enucleatè tradit, cæteros omittit, et quod ex iis obtinetur strictim in Scholio indicat, et primo quales sint illæ æquationes juxta astronomorum observationes dicit, et quibusnam

legibus secundum ipsos observatores sint adstrictæ, mox tradit quales æquationes ex suis calculis emergant et quænam sint earum leges.

Ipsum tam observationibus ante ipsum institutis, quam observationibus Flamstedianis usum esse constat, imo et ipsum exinde tabulas lunares sibi construxisse liquet, ex quibus multa profert quarum pleraque in Rudolphinis, aut in Ludoviceis tabulis facile non comperiuntur, sed quæ maximè consentiunt cum novis ill. Cassini tabulis, ita ut quo perfectiùs cœli motus dignoscunt astronomi, eo propiùs ad Newtonianas theorias accedere deprehendantur.

Ut itaque Solis actionis in Lunam et ejus orbitam habeatur ratio; primum fiat abstractio excentricitatis orbitæ tam Telluris quàm Lunæ, deprehenditur quod ex Solis actione mensis periodicus Lunæ longior evadat et ejus orbita ex circulari in ellipsim mutetur, cujus axes per Prop. XXVIII. sunt determinati.

Secundò, tam ex eâ figurâ quam orbita Lunæ induit, quam ex acceleratione Lunæ per eam partem actionis Solis quæ secundum tangentem orbitæ lunaris dirigitur, nascitur variatio quam Tycho primus observavit, et maximam in octantibus $40\frac{1}{2}'$. statuit, illam ill. Cassinus facit $33'. 40''$. in Elementis Astronomiæ, eam verò ipse Newtonus in hypothesi orbitas Telluris et Lunæ esse circulares $35'. 10''$. calculavit Prop. XXIX.

Tertiò, ex eâ Solis actione nascitur motus apogæi lunaris in consequentia, cujus motus fundamentum indicat Newtonus Prop. XLV. Lib. I.

Quartò, inde deducitur motus medius nodorum Prop. XXXII. observationibus proximè congruus; quintò denique, inclinationis orbitæ lunaris mutatio explicatur Prop. XXXIV. et XXXV.

Nunc verò adjungatur consideratio excentricitatis orbitæ Telluris, eâ fit ut actio Solis major sit cùm Terra est in perihelio suo quàm in aphelio; inde orientur correctiones variæ his omnibus Lunæ erroribus adjungendæ; primùm cùm mensis periodicus Lunæ per actionem Solis longior evadat, et motus ejus medius augeatur, id incrementum quando Terra est in perihelio majus est quàm cùm est in aphelio, hinc ea tardatio inæqualiter in motum Lunæ distributa, efficit ut hoc nomine locus ejus per medium motum inventus ab ejus vero loco dissentiat, hinc itaque notis nostris ad initium Scholii ad calcem Prop. XXXV. adjecti, quod ad totam Lunæ theoriam pertinet, incrementum medium motus medii ex actione Solis ortum assignamus, tum postea aperimus rationem quâ obtineri potest æquatio ceu correctio motus medii adhibenda propter inæqualem Terræ a Sole distantiam, quæ quidem æquatio continetur in eâ quam ill. Cassinus, titulo *Primæ Æquationis Solaris*, tradit.

Eâdem ratione, variationes motus apogæi et motus nodorum ex situ diverso Terræ ad aphelium aut perihelium suum ex utriusque motu medio dato in secundo paragrapho derivare docetur.

His ex excentricitate orbitæ Telluris deductis adjungatur consideratio excentricitatis orbitæ lunaris, aut ejus inclinationis ad eclipticam: inde novæ irregularitates prioribus adnascuntur.

Primò, mensis periodicus paulo major fit cùm linea apsidum per Solem transit quàm cùm ipsi est perpendicularis, hinc correctio nova æquationi motus medii, quæ in primo Scholii paragrapho exponitur, est facienda, hanc novam æquationem ill. Cassinus exhibet in tabella cujus titulus est *Secunda Æquatio Solaris* et tertio paragrapho Scholii traditur.

Itidem si linea nodorum per Solem transeat, paulo major erit Solis actio, et correctio nova exinde nascetur eidem motui medio, hanc quarto paragrapho Scholii indicat Newtonus.

Præterea excentricitas ipsa orbitæ lunaris ex diverso situ apogæi respectu Solis mutatur, nunc major nunc minor evadit, idque etiam inæqualiter pro distantiâ Telluris a Sole.

Rursus ipse motus apogæi prout apogæum diversimodè situm est respectu Solis mutatur, hinc æquatio apogæi nascitur eaque duplex, prima supponendo Telluris a Sole distantiam constantem, altera verò pendet ex mutatione distationæ Telluris a Sole.

Hinc tandem cùm orbitæ lunaris forma, excentricitas et apogæi positio mutetur, omninò mutantur correctiones illæ quæ deducebantur ex Lunæ excentricitate mediocri, quæ æquationem solutam constituebant; ultimo autem Scholii paragrapho Newtonus docet quâ ratione novæ illæ correctiones sint instituendæ: omnia verò in hoc Scholio sine demonstratione tradit, nec indicato suorum calculorum artificio, ideóque nostri putavimus officii, eam indagare viam cui Newtonus in iis reperiendis insistere debuit, labore quidem non parvo, successu qualicumque, utinam lectoribus non ingrato.

PHILOSOPHIÆ NATURALIS

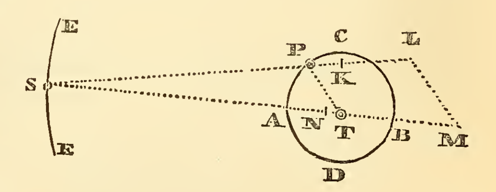
PRINCIPIA MATHEMATICA.

LIBRI TERTII CONTINUATIO.

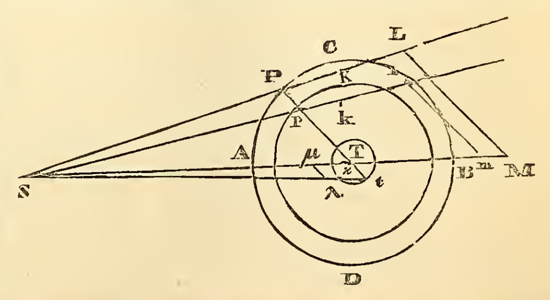
PROPOSITIO XXV. PROBLEMA VI.

Invenire vires Solis ad perturbandos motus Lunæ.

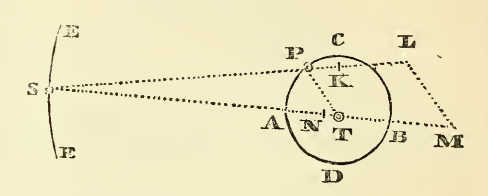
DESIGNET S Solem, T Terram, P Lunam, C A D B orbem Lunæ. In S P capiatur S K æqualis S T; sitque S L ad S K in duplicatâ ratione S K ad S P, et ipsi P T agatur parallela L M; et si gravitas acceleratrix Terræ in Solem exponatur per distantiam S T vel S K, erit S L gravitas acceleratrix Lunæ in Solem. Ea componitur ex partibus S M, L M, quarum L M et ipsius S M pars T M perturbat motum Lunæ, ut in Libri Primi Prop. LXVI. et ejus Corollariis expositum est. (q) Quâ-



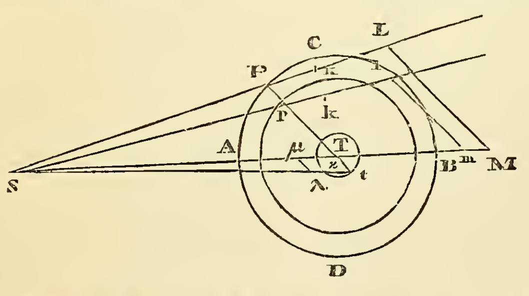
(q) * *Quâtenus Terra et Luna circa commune gravitatis centrum revolvuntur, perturbabitur etiam motus Terræ circa centrum illud a viribus consimilibus;* designet ut prius S Solem, sed sit T centrum commune gravitatis Terræ et Lunæ; sit itaque p Luna et t Terra circum commune gravitatis centrum revolventes, ita ut distantia p t sit æqualis P T, ductisque S p, S t, sumptisque in eis lineis productis si opus sit S k, S ϰ æqualibus S T, secatisque S l et S λ ita ut sint ad S T in duplicatâ ratione S T ad S p et ad S t, actisque l m, λ μ parallelis ad p t, si exponat S T vim acceleratricem centri communis gravitatis T in Solem, exponent S l et S λ vires accelerantes Lunam et Terram in Solem, et perturbabuntur utriusque motus respectu centri communis gravitatis per vires l m et λ μ, T m et T μ; quæ vires con-



tenus Terra et Luna circum commune gravitatis centrum revolvuntur, perturbabitur etiam motus Terræ circa centrum illud a viribus consimilibus; sed summas tam virium quàm motuum referre licet ad Lunam, et summas virium per lineas ipsis analogas T M et M L designare. [1] Vis M L in mediocri suâ quantitate est ad vim centripetam, quâ Luna in orbe suo circa Terram quiescentem ad distantiam P T revolvi posset, in duplicatâ ratione temporum periodicorum Lunæ circa Terram et Terræ circa Solem (per Corol. 17. Prop. LXVI. Lib. I.) hoc est, in duplicatâ ratione dierum 27. hor. 7. min. 43. ad dies 365. hor. 6. min. 9. id est, ut 1000 ad 178725, seu 1 ad $178\frac{29}{40}$. Invenimus autem in propositione quartâ quod, si Terra et Luna circa commune gravitatis centrum revol-



similes sunt viribus L M et T M quibus Lunam Solam perturbari dictum fuit in suppositione Terram esse immotam; nam ob maximam distantiam puncti S, lineæ P L, p l, T M, t λ pro parallelis sunt habendæ, ideóque figuræ T P L M, T p l m, T t λ μ pro parallelogrammis sunt habendæ, quæ angulum æqualem in T habent, præterea latera P T, T M; p T, T m; T t, T μ, eamdem habent inter se rationem; demonstratur enim in notâ 500. Lib. I. (quæ ad majorem facilitatem repetitur in notâ (u) subsequente) esse P T ad T M, p T ad T m, T t ad T μ ut radius ad triplum cosinus anguli A T P qui cosinus cùm idem sit in tribus hisce casibus, latera parallelogrammorum circa æqualem angulum posita erunt proportionalia, ea verò latera designant tam vires quibus Luna circa Terram immotam revolvendo perturbatur, quàm eas quibus perturbarentur Luna et Terra circa centrum commune revolvendo, illæ *Vires ergo sunt consimiles.*



Sed summas tam virium quàm motuum referre licet ad Lunam. Quippe in observationibus motus Lunæ respectu Terræ, quasi hæc immota esset, consideratur, tunc autem summæ virium acceleratricum, ex quibus velocitates respectivæ nascuntur, ipsi tribui debent, *et summas virium per lineas T M et M L ipsis analogas designare.* Vires enim acceleratrices p T et T t simul junctæ æquales sunt soli vi P T et similem effectum edunt, admovent utique corpora p et t, secundum directionem p T t, si ergo vis acceleratrix P T summæ utriusque æqualis admoveat corpus P versus immotum T, planè idem erit effectus ex corpore t vel T spectatus: vires M T, T μ divellunt corpora a se mutuò secundùm directionem S T, idem verò præstat vis T M quæ summæ ambarum est æqualis, nam est p T : T t : : m T : T μ : : ergo p T : p T + T t : : m T : m T + T μ et alternando p T : m T : : (P T : M T) : : p T + T t : m T + T μ. Sed est p T + T t = P T ergo etiam m T + T μ = M T.

(1) * *Vis M L in mediocri suâ quantitate, &c.* Ob magnam Solis distantiam figura P T M L est parallelogrammum ideóque M L est proximè æqualis lineæ P T, ergo vis M L erit ad vim quâ Sol agit in punctum T, ut P T ad S K sive S T, sed vires centrales qualescumque sunt inter se directè ut radii circulorum qui per eas describuntur et inversè ut quadrata temporum periodicorum, ergo ea vis quâ Sol agit in punctum T, est ad vim quâ Luna in orbe suo retinetur (posito illam revolvi circa Terram quiescentem) ut S T

vantur, earum distantia mediocris ab invicem erit $60\frac{1}{2}$ semidiametrorum mediocrium Terræ quamproximè. (s) Et vis quâ Luna in orbem circa Terram quiescentem, ad distantiam P T semidiametrorum terrestrium 60, revolvi posset, est ad vim, quâ eodem tempore ad distantiam semidiametrorum 60 revolvi posset, ut $60\frac{1}{2}$ ad 60; (t) et hæc vis ad vim gravitatis apud nos ut 1 ad 60×60 quamproximè. Ideóque vis mediocris M L est ad vim gravitatis in superficie Terræ, ut $1 \times 60\frac{1}{2}$ ad $60 \times 60 \times 60 \times 178\frac{29}{40}$, seu 1 ad 638092,6. Inde verò et ex proportione linearum T M, M L, (u) datur etiam vis T M: et hæ sunt vires solis quibus Lunæ motus perturbantur. Q. e. i.

ad P T directè, et ut quadratum temporis periodici Lunæ circa Terram ad quadratum temporis periodici Terræ circa Solem; ergo compositis rationibus, vis M L est ad vim quâ Luna in orbe suô retinetur, ut quadratum temporis periodici Lunæ ad quadratum temporis periodici Terræ circa Solem, hoc est in duplicatâ ratione dierum 27, hor. 7, 43′ ad 365 dies, 6 hor. 9′ quæ est duratio anni siderei.

(s) * *Et vis quâ Luna ad distantiam $60\frac{1}{2}$ semid. revolvi posset, est ad vim quâ ad distantiam 60 semid. revolvi posset eodem tempore, ut $60\frac{1}{2}$ ad 60.* Vires enim centrales sunt ut distantiæ directè et tempora periodica inversè (Cor. 2. Prop. IV. Lib. I.). Cùm ergo hîc tempora periodica æqualia ponantur, vires centrales sunt ut distantiæ. Newtonus autem loco distantiæ $60\frac{1}{2}$ semid. Terræ quæ revera intercedit inter Terram et Lunam, assumit distantiam 60 semid. tantùm, quia in præcedente ratiocinio vim quâ Luna in orbe suo retinetur, æstimaverat quasi Terra immota esset, et Luna ad distantiam $60\frac{1}{2}$ semid. a Terrâ tempore 27. dier. 7 hor. 43. min. circa Terram revolveretur; verùm cùm Terra reverâ circa centrum gravitatis commune Lunæ et Terræ revolvatur, ea vis quâ Luna ad distantiam $60\frac{1}{2}$ semid. tempore illo revolvi apparet, minor est eâ quâ ad eamdem distantiam eodemque tempore circa Terram immotam revolveretur, et est æqualis illi quâ, eodem quidem tempore periodico, sed ad distantiam 60 semid. circa Terram immotam revolveretur, ut constat ex Prop. LX. Lib. I. Eâ enim propositione statuitur quod si duo corpora revolvantur circa centrum commune gravitatis, axis ellipseos quam unum circa alterum motum describit, est ad axem ellipseos quam circa illud quiescens eodem tempore periodico et eâdem vi describere posset, ut summa corporum amborum ad primam duarum medieproportionalium inter hanc summam et corpus alterum; quare cùm Telluris corpus sit ad corpus Lunæ ut 42 ad 1, et prima duarum medieproportionalium inter 43 et 42 sit $42\frac{2}{3}$ sitque 43 ad $42\frac{2}{3}$ ut $60\frac{1}{2}$ ad 60 proximè, vis quâ Luna in orbe suo retinetur, ea est quâ ad distantiam 60 semid. Terræ eodem ipso tempore periodico, quod observatur circa Terram immotam, revolvi posset.

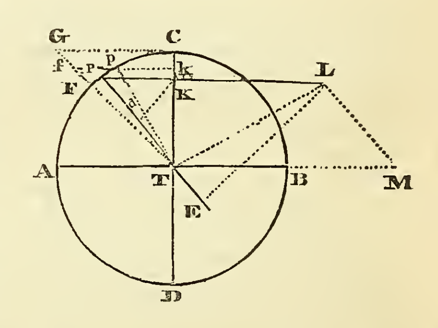
(t) * *Et hæc vis*, &c. Per hujusce Libri Prop. IV.

(u) * *Datur etiam vis T M.* Ob parallelas P T, L M et ingentem puncti S distantiam, P L et T M sunt parallelæ, et figura P T L M est parallelogrammum, ideóque T M sumitur ut proximè æqualis P L; est autem P L triplum cosinus anguli A T P existente T P sive L M radio: nam quia S K est æqualis S T, si centro S radio S T describatur arcus T K, erunt S T et S K in eum arcum perpendiculares, sed is arcus proximè coincidit cum rectâ T C perpendiculari lineæ S T in T (ob distantiam centri S) ergo punctum K in eâ rectâ T C occurret et S K sive P K illi rectæ T C erit perpendicularis, ideóque P K erit cosinus anguli A T P; sed, per constructionem, est SP^2 ad $SK^2 - SP^2$ (sive quia $SK = SP + PK$) ad $2SP \times PK + PK^2$ ut S K (sive $SP + SK$) ad $SL - SK$ (sive K L) ideóque est $KL = 2PK + \frac{3PK^2}{SP} + \frac{PK^3}{SP^2}$, sed omittendi sunt ultimi termini propter ingentem divisorem S P, ergo est $KL = 2PK$, et $PK + KL$ sive $PL = 3PK$. Q. e. d.

PROPOSITIO XXVI. PROBLEMA VII.

Invenire incrementum horarium areæ quam Luna, radio ad Terram ducto, in orbe circulari describit.

Diximus aream, quam Luna radio ad Terram ducto describit, esse tempori proportionalem, nisi quâtenus motus lunaris ab actione Solis turbatur. Inæqualitatem momenti, vel incrementi horarii hîc investigandam proponimus. Ut computatio facilior reddatur, fingamus orbem Lunæ circularem esse, et inæqualitates omnes negligamus, eâ solâ exceptâ, de quâ hîc agitur. Ob ingentem verò Solis distantiam, ponamus etiam lineas S P, S T sibi invicem parallelas esse. (x) Hoc pacto vis L M reducetur semper ad mediocrem suam quantitatem T P, ut et vis T M ad mediocrem suam quantitatem 3 P K. Hæ vires (per legum Corol. 2.) componunt vim T L; et hæc vis, si in radium T P demittatur perpendiculum L E, resolvitur in vires T E, E L, quarum T E, agendo semper secundùm radium T P, nec accelerat nec retardat descriptionem areæ T P C radio illo T P factam; et E L agendo secundum perpendiculum, accelerat vel retardat ipsam, quantum accelerat vel retardat Lunam. Acceleratio illa Lunæ, in transitu ipsius a quadraturâ C ad conjunctionem A, singulis temporis momentis facta, est (y) ut ipsa vis accelerans E L, (z) hoc est, ut $\frac{3\,P\,K \times T\,K}{T\,P}$. Exponatur tempus per motum medium lunarem, vel (a) (quod eodem ferè recidit) per angulum C T P, vel etiam per arcum C P. Ad C T erigatur normalis C G ipsi C T æqualis. Et diviso arcu



(x) * *Hoc pacto.* Vide notam (u) præcedentem.

(y) * *Ut ipsa vis accelerans* (13. Lib. I.).

(z) * *Hoc est ut* $\frac{3\,P\,K \times T\,K}{T\,P}$. Nam triangula P T K, P L E sunt similia propter angulum communem in P et angulos rectos K et E, ergo est T P : T K : : P L : E L $= \frac{P\,L \times T\,K}{T\,P}$, (sed per notam u) est P L = 3 P K ergo est E L $= \frac{3\,P\,K \times T\,K}{T\,P}$.

110. (a) * *Quod eodem ferè recidit.* In hypothesi orbem lunarem esse circularem, angulus C T P vel arcus C P forent proportionales tempori, semotâ consideratione perturbationis motus Lunæ ex Solis actione productæ; hæc verò perturbatio respectu ipsius motûs Lunæ est exigua, itaque anguli C T P vel arcus C P tempori ferè proportionales censeri possunt.

quadrantali A C in particulas innumeras æquales P p, &c. per quas æquales totidem particulæ temporis exponi possint, ductâque p k perpendiculari ad C T, jungatur T G ipsis K P, k p productis occurrens in F et f; et erit F K æqualis T K, et (b) K k erit ad P K ut P p ad T p, (c) hoc est in datâ ratione, (d) ideóque F K × K k seu area F K k f, erit ut $\frac{3\,PK \times TK}{TP}$, id est, ut E L; et compositè, area tota G C K F ut summa omnium virium E L tempore toto C P impressarum in Lunam, (e) atque ideò etiam ut velocitas hâc summâ genita, id est, ut acceleratio descriptionis areæ C T P, seu incrementum momenti. (f) Vis quâ Luna circa Terram quiescentem ad distantiam T P, tempore suo periodico

(b) * *K k erit ad P K ut P p ad T p* sive T P; ex notissimâ circuli proprietate fluit hæc proportio, nam si ex puncto p ducatur lineola p q perpendicularis ad P K, ea erit parallela et æqualis lineæ K k, formabiturque triangulum fluxionale P p q simile triangulo P K T, nam cùm anguli p P K et K P T rectum simul efficiant, et pariter anguli K P T et P T K, æquales sunt anguli p P K et P T K, unde est p q sive K k ad P K ut P p ad T P.

(c) * *Hoc est in datâ ratione.* Ratio enim P p ad T p est data, quia singulæ partes P p sumuntur æquales, sunt itaque singulæ in eâdem ratione ad radium T P.

(d) * *Ideóque F K × K k seu area F K k f ut* $\frac{3\,PK \times TK}{TP}$; cùm ratio K k ad P K sit data, data etiam erit ratio K k ad 3 P K, et hæc ratio manebit etiamnum data si consequens 3 P K per quantitatem constantem T P dividatur; erit ergo data ratio K k ad $\frac{3\,PK}{TP}$, denique non mutabitur hæc ratio si ambo termini per quantitates æquales F K et T K multiplicentur, ergo ratio K k × F K (seu areæ F K k f) ad $\frac{3\,PK \times TK}{TP}$ est etiam data, hoc est, est area F K k f ut $\frac{3\,PK \times TK}{TP}$.

(e) * *Atque ideò etiam ut velocitas* (13. Lib. I.).

(f) * *Vis quâ Luna circa Terram ad distantiam T P tempore suo periodico C A D B revolvi posset, efficeret ut corpus liberè cadendo tempore C T describeret longitudinem* $\frac{1}{2}$ *C T*, &c. Si corpus gyretur in circulo per vim ad ejus centrum tendentem, primum uniformiter girabitur; tum, quadratum arcûs quovis tempore descripti erit æquale circuli diametro ducto in altitudinem quam corpus liberè cadendo tempore eodem percurreret si uniformiter acceleraretur per vim centripetam quâ circulus describitur.

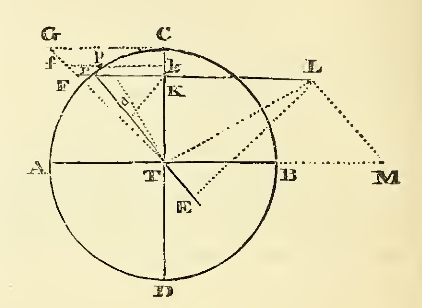
Nam si sumatur arcus quàm minimus, altitudo quæ per vim centralem liberè percurreretur dum ille arcus quàmminimus describeretur, foret ejus arcûs minimi sinus versus; sed ex naturâ circuli, factum diametri ducti in sinum versum arcûs, est æquale quadrato chordæ illius arcûs, sive quadrato arcûs ipsius si adeo sit exiguus ut pro suâ chordâ sumi possit.

Spatia verò liberè cadendo per vim uniformiter accelerantem descripta, sunt ut quadrata temporum, arcus verò interea percursi sunt ut tempora, quia corpus uniformi celeritate giratur, ergo spatium minimum per vim centripetam liberè descriptum est ad aliud quodvis spatium per eamdem vim centrifugam liberè descriptum (ideóque etiam facta horum spatiorum per diametrum circuli) sunt ut quadrata arcuum correspondentibus temporibus descriptorum: sed prius factum est æquale quadrato arcûs correspondentis, ergo et alterum factum erit æquale quadrato arcûs correspondentis, hoc est altitudo quæcumque cadendo liberè descripta in diametrum ducta efficit factum æquale quadrato arcûs eodem tempore revolvendo uniformiter percursi.

Quod cùm ita sit, cadat liberè corpus per $\frac{1}{2}$ C T, h. e. per radii semissem, ducaturque hæc longitudo per diametrum seu 2 C T factum C T² sive quadratum ipsius radii æquale erit quadrato arcûs eodem tempore descripti, erit ergo is arcus æqualis radio C T, sed velocitas acquisita liberè cadendo per radii semissem $\frac{1}{2}$ C T talis est ut corpus movendo uniformiter eâ celeritate acquisitâ duplum ejus altitudinis radium, nempe integrum C T eodem tempore describere posset, quæ est ipsa longitudo arcûs quam corpus uniformiter revolvens descripsisset eodem tempore; ergo velocitas acquisita lapsu per $\frac{1}{2}$ C T ea est quâ corpus in orbe suo revolvitur.

Ea denique longitudo $\frac{1}{2}$ C T percurretur tempore quod erit ad totum tempus periodicum ut C T ad circumferentiam C A D B, nam tempora sunt ut arcus uniformiter descripti; sed tempus, quo corpus per $\frac{1}{2}$ C T labitur, est æquale tempori quo arcus æqualis C T percurritur, ergo est illud tempus ad totum tempus periodicum ut C T ad totam peripheriam C A D B.

C A D B dierum 27. hor. 7. min. 43. revolvi posset, efficeret ut corpus, tempore C T cadendo, describeret longitudinem $\frac{1}{2}$ C T, et velocitatem simul acquireret æqualem velocitati, quâ Luna in orbe suo movetur. Patet hoc per Corol. 9. Prop. IV. Lib. I. Cùm autem perpendiculum K d in T P demissum ([g]) sit ipsius E L pars tertia, et ([h]) ipsius T P seu M L in octantibus pars dimidia, vis E L in octantibus, ([i]) ubi maxima est, superabit vim M L ([k]) in ratione 3 ad 2, ideóque erit ad vim illam, quâ Luna tempore suo periodico circa Terram quiescentem revolvi posset, ([l]) ut 100 ad $\frac{2}{3} \times 17872\frac{1}{2}$ seu 11915, et tempore C T velocitatem generare deberet ([m]) quæ esset pars $\frac{100}{11915}$ velocitatis lunaris, tempore autem C P A velocitatem majorem generaret in ratione C A ad C T seu T P. Exponatur vis maxima E L in octantibus per aream F K × K k rectangulo ([n]) $\frac{1}{2}$ T P



([g]) * *K d sit ipsius E L pars tertia.* Ob triangula similia P L E, P K d est E L ad K d ut P L ad P K, (sed per notam [u]) est P K tertia pars lineæ P L, est itaque pariter K d tertia pars lineæ E L.

([h]) * *K d ipsius T P seu M L in octantibus pars dimidia;* nam in octantibus anguli K T d, P K d, K P d sunt omnes 45 grad. est itaque T d = K d = d P; est ergo T d sive K d ipsius T P pars dimidia in octantibus.

111. ([i]) * *Ubi maxima est.* Ut inveniatur punctum in quod vis E L sive $\frac{3 PK \times TK}{TP}$ est maxima, sit T P = r, T K = x, P K = y erit E L = $\frac{3yx}{r}$ cujus fluxio est $\frac{3ydx + 3xdy}{r}$, maxima est ergo E L ubi hæc fluxio æquatur nihilo, ideóque ubi $y\,dx = -x\,dy$, sed cùm in circulo sit $y = \sqrt{rr - xx}$, et $dy = \frac{-x\,dx}{\sqrt{rr - xx}}$ unde substitutis valoribus æquatio $y\,dx = -x\,dy$ in hanc mutatur $dx\sqrt{rr - xx} = \frac{xx\,dx}{\sqrt{rr - xx}}$ et reductis terminis fit $rr = 2xx$, unde est $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$ et $dy = -dx$, et $y = x$; ideóque in triangulo P T K angulus T debet esse 45 grad. et P debet esse in octante circuli.

([k]) * *In ratione 3 ad 2.* Est E L ad K d ut 3 ad 1 (not. [g]) est K d ad T p sive M L ut 1 ad 2 (not. [h]) ergo E L ad M L ut 3 ad 2, ex æquo.

([l]) * *Ut 100 ad $\frac{2}{3}$ 17872$\frac{1}{2}$.* Vis E L est ad vim M L ut 3 ad 2; vis M L est ad vim quâ Luna in orbe suo circa Terram quiescentem revolvi posset tempore suo periodico ut 1000 ad 178725 (Prop. XXV. hujusce) sive ut 100 ad 17872$\frac{1}{2}$; ergo compositis rationibus vis E L est ad eam vim quâ Luna revolvitur ut 100 × 3 ad 2 × 17872$\frac{1}{2}$ sive ut 100 ad $\frac{2}{3}$ × 17872$\frac{1}{2}$ hoc est ad 11915, ideóque vis E L est $\frac{100}{11915}$ vis Lunæ.

([m]) *Quæ esset pars $\frac{100}{11915}$ velocitatis lunaris.* Patet ex notâ ([f]) vim quâ Luna revolvitur efficere ut corpus ab eâ vi uniformiter acceleratum cadendo tempore C T eam ipsam acquireret velocitatem quâ Luna revolvitur, vis ergo quæ vis lunaris est pars $\frac{100}{11915}$ eodem tempore generaret velocitatem quæ velocitatis lunaris foret pars $\frac{100}{11915}$.

([n]) * *Exponatur vis maxima E L in octantibus per aream F K × K k rectangulo $\frac{1}{2}$ T P × P p æqualem,* vis E L semper est proportionalis areæ F K × K k ex demonstratis, sed in octantibus ubi ea vis est maxima est F K sive T K = $\frac{TP}{\sqrt{2}}$ et K k = $\frac{Pp}{\sqrt{2}}$ ergo F K × K k = $\frac{TP \times Pp}{2}$.

× P p æqualem. (°) Et velocitas, quam vis maxima tempore quovis C P generare posset, erit ad velocitatem quam vis omnis minor E L eodem tempore generat, ut rectangulum $\frac{1}{2}$ T P × C P ad aream K C G F: tempore autem toto C P A, velocitates genitæ erunt ad invicem ut rectangulum $\frac{1}{2}$ T P × C A et triangulum T C G, sive ut arcus quadrantalis C A et radius T P. Ideóque (per Prop. IX. Lib. V. Elem.) velocitas posterior, toto tempore genita, erit pars $\frac{100}{11915}$ velocitatis Lunæ. (p) Huic Lunæ velocitati, quæ areæ momento mediocri analoga est, (q) addatur et auferatur dimidium velocitatis alterius; et si momentum mediocre exponatur per numerum 11915, summa 11915 + 50 seu 11965 exhibebit momentum maximum areæ in syzygiâ A, ac differentia 11915 — 50 seu 11865 ejusdem momentum minimum in quadraturis. Igitur areæ temporibus æqualibus in syzygiis et quadraturis descriptæ, sunt ad invicem ut 11965 ad 11865. Ad momentum minimum 11865 addatur momentum, quod sit ad momentorum differentiam 100 ut trapezium F K C G ad triangulum T C G (r) vel quod perinde est, ut quadratum sinûs P K ad quadratum radii T P, (s) (id est, ut P d ad T P) et summa exhibebit momentum areæ, ubi Luna est in loco quovis intermedio P.

(°) * *Et velocitas quam vis maxima tempore quovis C P generat ad velocitatem quam generant* vires veræ E L *eodem tempore agentes ut $\frac{1}{2}$ T P × C P ad aream K C G F*, velocitates genitæ sunt ut vires quibus generantur, ductæ in tempus per quod generantur, cùm itaque supponatur omnes arcus P p temporibus quamproximè æqualibus describi, si ii arcus P p æquales inter se sumantur (vid. not. [a] præced.) velocitates genitæ, dum arcus P p percurruntur, sunt ut ipsæ vires sive ut areæ F K k f, ideóque summa velocitatum genitarum tempore C P, sive dum arcus C P describitur, est ut tota area K C G F, sed vis in octantibus sive velocitas quæ in octante generatur durante tempore P p, est $\frac{\text{T P} \times \text{P p}}{2}$, quia eo in loco is est valor areæ F K k f, qui valor est ipse valor areæ P T p, ergo si singulis momentis P p similis velocitas generaretur, summa velocitatem genitarum tempore C P foret area C T P sive $\frac{1}{2}$ T P × C P, ergo velocitas quam vis maxima generat, est ad eam quam vires veræ generant, tempore utrinque eodem C P, ut $\frac{1}{2}$ T P × C P ad K C G F.

(p) *Huic Lunæ velocitati quæ areæ momento mediocri est analoga.* Areæ momentum mediocre illud est quod Luna dato exiguo tempore verreret si uniformi velocitate toto suo tempore ferretur, cùmque Luna per vim E L certis in locis plus minusve acceleretur, areæ momentum, seu ea areæ particula quæ dáto exiguo tempore describitur, nunc major nunc minor est; sed cùm orbis lunaris circularis censeatur, areæ momenta sunt ut arcus qui sunt eorum bases, cùmque iisdem temporibus illa momenta illique arcus describantur, sunt ut velocitates quibus describuntur. Hinc pro arearum momentis ipsæ velocitatum rationes assumuntur.

(q) * *Addatur et auferatur dimidium velocitatis alterius.* Hic assumit Newtonus velocitatem mediocrem, eam nempe quâ orbita lunaris tempore suo periodico uniformiter describeretur esse mediam proportionalem arithmeticè inter velocitatem minimam et maximam. Hanc tamen propositionem quasi evidentem assumere non licuit, si enim v. gr. diutius durarent parvæ velocitates quàm magnæ, velocitas mediocris propior foret parvis velocitatibus quàm magnis; hinc exponenda est prius ratio quâ crescunt illæ velocitates, ut possimus asserere mediocrem velocitatem Lunæ esse mediam arithmeticè inter extremas. Quod quidem efficere conabimur problemate huic propositioni mox subjungendo.

(r) * *Vel quod perinde est ut quadratum sinûs P K ad quadratum radii T P* area T C G est ad aream T K F ut quad. T C ad quad. T K et dividendo T C G — T K F (sive F K C G) ad T C G ut T C^2 — T K^2 (sive P K^2) ad T C^2.

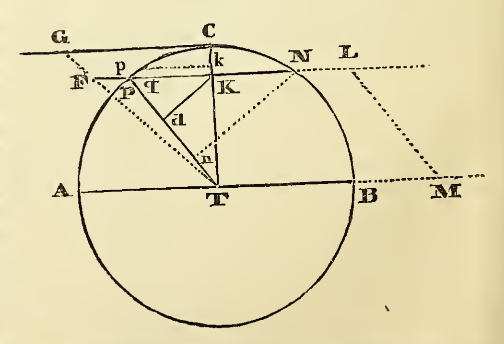
(s) * *Id est ut P d ad T P* est P d ad P K ut P K ad T P propter similitudinem triangulorum P K d, P T K, ergo per compositionem rationum est P d ad T P ut P K^2 ad T P^2.

Hæc omnia ita se habent, ex hypothesi quod Sol et Terra quiescunt, et Luna tempore synodico dierum 27. hor. 7. min. 43. revolvitur. Cùm autem periodus synodica lunaris verè sit dierum 29. hor. 12. et min. 44. augeri debent momentorum incrementa in ratione temporis, id est, in ratione 1080853 ad 1000000. Hoc pacto incrementum totum, quod erat pars $\frac{100}{11915}$ momenti mediocris, jam fiet ejusdem pars $\frac{100}{11023}$. Ideóque momentum areæ in quadraturâ Lunæ erit ad ejus momentum in syzygiâ ut 11023 — 50 ad 11023 + 50, seu 10973 ad 11073, et ad ejus momentum, ubi Luna in alio quovis loco intermedio P versatur, ut 10973 ad 10973 + P d, (t) existente videlicet T P æquali 100.

Area igitur, quam Luna radio ad Terram ducto singulis temporis particulis æqualibus describit, est quam proximè (u) ut summa numeri 219,46 et sinûs versi duplicatæ distantiæ Lunæ a quadraturâ proximâ, in circulo cujus radius est unitas. Hæc ita se habent ubi variatio in octantibus est magnitudinis mediocris. (x) Sin

(t) * *Existente videlicet T P æquali* 100: sequitur ex præcedentibus quod illud quod debet addi ad momentum minimum 10973 est ad 100 ut est P d ad P T, si ergo P T sit æqualis numero 100 erit P d æqualis illi numero qui debet addi ad momenti minimi valorem.

(u) * *Ut summa numeri* 219,46 *et sinûs versi duplicatæ distantiæ Lunæ a quadraturâ proximâ in circulo cujus radius est unitas;* areæ momentum in puncto P est ut 10973 + P d, est autem P d dimidium sinûs versus duplicatæ distantiæ Lunæ a quadraturâ proximâ, nam dicatur N punctum in quo linea P K L secat circulum, erit arcus P C N duplus distantiæ P C a quadraturâ proximâ, ductâque N n perpendiculari in radium P T erit P n sinus versus duplicatæ illius distantiæ, sed cùm N n et K d sint perpendiculares in eamdem lineam ideóque parallelæ, et sit punctum K medium lineæ P N, erit etiam d medium lineæ P n, eritque P d = $\frac{1}{2}$ P n, sive erit P d dimidium sinûs versi duplicatæ distantiæ Lunæ a quadraturâ proximâ, est ergo momentum areæ ut summa numeri 10973 + $\frac{1}{2}$ P n existente radio 100, seu ut hujus quantitatis duplum 21946 + P n ideóque si radius sit 1 ut 219,46 + P n.



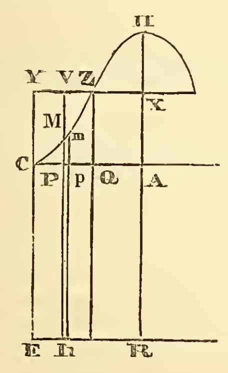
(x) * 112. *Sin variatio ibi major sit,* &c. Manente eâdem hypothesi, Lunæ orbem esse circularem et Lunam aliam non pati irregularitatem præter eam quæ ab eâ parte actionis Solis nascitur quæ per lineam E L designatur, variatio Lunæ erit arcus interceptus inter locum in quo Luna esse deberet si velocitate suâ mediocri moveretur tempore dato C P, et locum in quo reverâ est tunc temporis, cujus quidem variationis conditiones ex problemate sequenti exponere facile erit.

variatio ibi major sit vel minor, augeri debet vel minui sinus ille versus in eâdem ratione.

PROBLEMA.

Ex hypothesibus et demonstratis in Propositione hâc XXVI. exponere rationem secundùm quam describuntur areæ C T P A momenta.

Designet recta C A (in 2dâ. figurâ) tempus quo arcus C A describitur, erigantur per singula puncta P rectæ P M perpendiculares in C A et proportionales velocitati tempore C P per vim E L genitæ; per ea quæ in hâc Propositione demonstrantur independenter ab his, illæ velocitates in punctis P arcûs C P sunt ut trapezia F K C G correspondentia, illa verò trapezia sunt ut sinus versi duplicatæ distantiæ Lunæ a quadraturâ proximâ, sive ut sinus versus arcûs dupli C P, (ut mox in notis explicabitur) fiant ergo illæ perpendiculares P M æquales sinui verso arcus 2 C P, ultima perpendicularis A H erit æqualis ipsi diametro A B, quia est sinus versus dupli quadrantis; ducatur curva C M H per omnium perpendicularium vertices transiens, ducatur etiam A R perpendicularis ad C A, sitque A H ad A R ut velocitas ultimò acquisita in A ad velocitatem uniformem quâ Luna ferretur si



vis E L omninò non ageret, absolvaturque parallelogrammum A R E C, productâque lineâ M P usque ad lineam R E tota linea I M erit ut velocitas Lunæ tempore C P, et ducta linea quamproxima m p i erit area M P I m p i ut area descripta tempore P p, et tota area R E C M H repræsentabit totam aream tempore C A descriptam; denique secetur A H in X et ducatur X Y parallela C A quæ secet curvam C M H in Z et ex puncto Z ducatur ordinata Z Q. Liquet quod si punctum X ita sit assumptum ut parallelogrammum X R E Y sit æquale mixtilineo H A R E C M H, erit X R velocitas Lunæ mediocris, et C Q tempus quo Luna a quadraturâ profecta ad eam velocitatem mediocrem perveniet, quod quidem ex ipsâ constructione liquet. Jam autem dico quod illud punctum X incidet in medio lineæ A H, ita ut hæc velocitas mediocris X R sit media proportionalis arithmetica inter R A et R H et præterea quod punctum Q cadet in medio inter A et C, ita ut ea celeritas mediocris in octante obtineatur, (saltem si medium arcûs medio temporis respondeat, quod proximè verum est juxta notam 110 præcedentem).

Ut obtineatur itaque area H A P C M H, dicatur v arcus C P et dicatur m v recta C P quæ arcui C P est proportionalis (saltem quam proximè per not. 110.) et P p sit m d v, sinus rectus P K arcus C P dicatur y, sinus verò totalis sit r. Ex notis trigonometriæ principiis sinus versus dupli arcûs C P est $\frac{2\,y\,y}{r}$, ergo ordinata P M ei æqualis est $\frac{2\,y\,y}{r}$, et elementum areæ sive M P p m est $\frac{2\,y\,y}{r}\,m\,d\,v$, sed ex notâ proprietate circuli est $\sqrt{r\,r - y\,y}$ ad r ut d y ad d v, est ergo $d\,v = \frac{r\,d\,y}{\sqrt{r\,r - y\,y}}$ itaque areæ elementum evadit $\frac{2\,m\,y\,y\,d\,y}{\sqrt{r\,r - y\,y}}$ conferatur illud elementum cum elemento areæ circuli, radio T C descripti, dicatur C K, z, K k, d z, elementum P p k K est y d z, sed est T K ($\sqrt{r\,r - y\,y}$) ad P K (y) ut P q (d y) ad q p (d z) hinc $d\,z = \frac{y\,d\,y}{\sqrt{r\,r - y\,y}}$ et elementum areæ circuli fit $\frac{y\,y\,d\,y}{\sqrt{r\,r - y\,y}}$ quod elementum est ad elementum correspondens areæ H A P C M H ut 1 ad 2 m, hinc tota hæc area est ad aream quadrantis T C P A ut 2 m ad 1, sive si totus arcus C P A dicatur c et recta C P A dicatur m c, area H A P C M H erit m r c. Ergo si linea A R quæ designat velocitatem uniformem Lunæ, cùm nulla foret vis E L, dicatur l, area A R E C erit m l c et tota area H A R E C H erit m l c + m r c, sive æqualis parallelogrammo cujus unum latus foret m c, alterum l + r, sed R E ex constructione est æqualis m c, ergo si sumatur R X = l + r parallelogrammum XREZ erit æquale mixtilineo H A R E C M H, ideóque erit R X sive l + r velocitas Lunæ mediocris, sed erat A H = 2 r, ideóque R H = l + 2 r est ergo R X (l + r) media proportionalis arithmeticè inter R A (l) et R H (l + 2 r), ergo velocitas mediocris Lunæ est media proportionalis arithmeticè inter minimam velocitatem Lunæ (l) et maximam (l + 2 r).

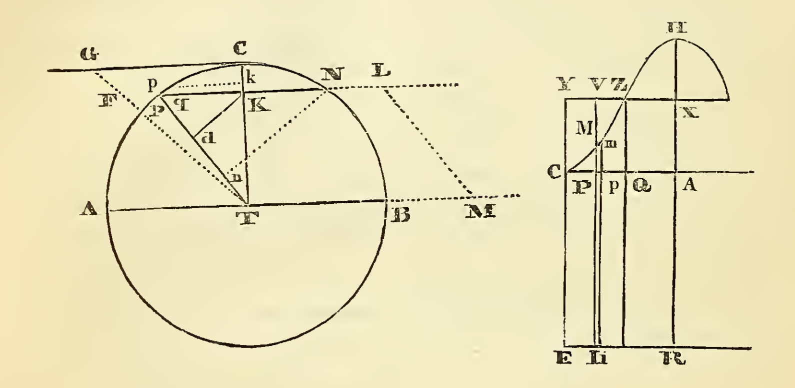
Quoniam verò ordinata Z Q = A X = r est sinus versus arcûs dupli C P, et est r sinus versus arcûs quadrantalis, ergo in hoc casu C P ejus

dimidius est octans circuli, in octante itaque obtinetur velocitas quæ est æqualis velocitati mediocri Lunæ. Quæ quidem in notâ superiore q demonstranda esse dixeramus.

Ex hujus autem problematis constructione liquet aream per velocitatem mediocrem Lunæ descriptam tempore C P, exprimi per aream Y E I V, et ejus valorem esse m l v + m r v, dum area verè per Lunam descripta exprimetur per spatium mixtilineum C E I M; spatium

3°. Quoniam quantitates l c + r c, et arcus quadrantalis C P A sunt quantitates constantes, manifestum est quod variationes in omnibus punctis P, sunt ut P K × T K, sive ut factum sinûs arcûs C P in ejus cosinum.

4°. Rectangulum T K × P K est maximum ubi punctum P est in octante, quod demonstratur eo modo quem in notâ 111. præcedente videre licet, hinc variatio maxima est in octantibus,



C E I P est m l v, spatium verò C P M, est ad aream C P K ut 2 m ad 1; tota area C T P est $\frac{rv}{2}$, spatium P K T est $\frac{y \times KT}{2}$, ergo area C P K est $\frac{rv - y \times KT}{2}$, est itaque spatium C P M $=$ m r v $-$ m y $\times$ K T et tota area C E I M est m l v + m r v $-$ m y $\times$ K T; unde liquet differentiam inter aream per velocitatem mediocrem descriptam et aream reverâ descriptam esse m y $\times$ K T, quâ deficit area reverâ descripta, ab eâ quæ per mediocrem motum percursa censetur.

Hinc 1°. liquet variationem debere subtrahi ex motu medio a quadraturâ ad syzygiam, illam evanescere in syzygiâ A, quia illic m y $\times$ K T $=$ o, a syzygiâ variationem addi debere motui medio, ut patet ex figuræ constructione.

2°. Ut quantitas m l c + m r c est ad rectangulum y K $\times$ T K, ita est quadrans circuli C P A T ad aream quæ (propter variationem) detrahenda est ex areâ C T P motu mediocri descriptâ, sive, quoniam C P A T est dimidium facti radii in arcum C P A, et ea area detrahenda est etiam dimidium facti radii in arcum variationis, erit etiam ut m l c + m r c ad m y $\times$ T K ita arcus quadrantalis C P A sive c ad arcum variationis qui itaque erit $\frac{y \times TK}{l + r}$ sive $\frac{PK \times TK}{l + r}$.

unde fluit hoc paradoxum, ubi vis E L maxima est, illic maximè retardatur Luna respectu motûs sui medii.

5°. *Si variatio maxima mutetur, augeri debet vel minui sinus ille versus, qui velocitatem genitam in* singulis punctis exprimit *in eâdem ratione;* nam velocitas quæ generatur, exprimitur per aream C K F G (vide figuram textûs) in octantibus autem punctum F coincidit cum puncto P, et area C K F G illic evadit æqualis areæ P K T, ergo velocitas in octantibus genita est ut T K per P K, sed area quæ variationem illic exprimit est etiam ut T K per P K, (per hujusce notæ Corol. 3.) ergo velocitas in octantibus est ut ipsa variatio in octantibus, sed velocitas in octantibus est ad velocitatem in quovis alio puncto in ratione datâ radii ad sinum versum duplicatæ distantiæ ejus dati puncti a quadraturâ proximâ, ergo hæc velocitas crescit ut velocitas in octantibus, ideóque etiam ut variatio maxima, *ergo sinus ille versus* illi velocitati proportionalis debet augeri vel minui in eâdem ratione.

Verùm ex actione T M aliam variationis portionem oriri ostenditur Prop. XXIX., illam autem portionem etiam futuram ut T K $\times$ P K per not. 114. mox adjiciendam constabit, ergo tota variatio erit ut T K $\times$ P K, sive, in octantibus, ut velocitas, quare manet hujus Corollarii veritas si agatur de totâ variatione.

PROPOSITIO XXVII. PROBLEMA VIII.

Ex motu horario Lunæ invenire ipsius distantiam a Terrâ.

(y) Area, quam Luna radio ad Terram ducto singulis temporis momentis describit, est ut motus horarius Lunæ et quadratum distantiæ Lunæ a Terrâ conjunctim; et propterea distantia Lunæ a Terrâ est in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione areæ directè et subduplicatâ ratione motus horarii inversè. Q. e. i.

Corol. 1. Hinc datur Lunæ diameter apparens: quippe quæ sit reciprocè ut ipsius distantia a Terrâ. (z) Tentent astronomi quàm probè hæc Regula cum phænomenis congruat.

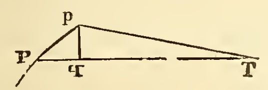
Corol. 2. (a) Hinc etiam orbis lunaris accuratiùs ex phænomenis quàm antehac definiri potest.

PROPOSITIO XXVIII. PROBLEMA IX.

Invenire diametros orbis in quo Luna, sine excentricitate, moveri deberet.

Curvatura trajectoriæ, quam mobile, si secundum trajectoriæ illius perpendiculum trahatur, describit, est ut attractio directè et quadratum velocitatis inversè. (b) Curvaturas linearum pono esse inter se in ultimâ

(y) 113. *Area quam Luna singulis momentis describit est ut motus horarius Lunæ et quadratum distantiæ Lunæ a Terra.* Designet T P p aream



descriptam a Lunâ quovis tempusculo, sitque P p arcus curvæ cujuslibet; centro T radio T p describatur arcus circularis P q qui pro rectâ perpendiculari in lineam T p assumi potest, ideóque area a Lunâ descripta erit ut T P × p q, gradus autem, aut minuta in arcu p q contenta mensurabunt motum angularem Lunæ dato tempore, qui æqualis est motui horario Lunæ, ideóque longitudo absoluta ejus arcûs p q erit ut ejus radius T P et motus horarius Lunæ conjunctim, hinc area T P × p q erit ut TP^2 et motus horarius Lunæ conjunctim.

(z) * *Tentent astronomi.* Observando nempe motum horarium Lunæ in variis temporibus ejus periodi et simul angulum inter Solem et Lunam interceptum ut inde habeatur ejus distantia PTC a quadraturâ proximâ C, inde enim poterunt colligi numeri proportionales distantiis P T Lunæ a Terrâ: nam, per præced. Prop. area a Lunâ descripta, est ut summa numeri 219.46 et sinus versi dupli anguli P T C quæ si dividatur per motum horarium qui observatione obtinetur, radix quadrata ejus quotientis erit ut distantiæ P T, et inversè ut Lunæ diametri apparentes. Quare si hi etiam observati fuerint, collatio observationum cum numeris sic inventis Regulam Newtonianam illustrabit.

(a) * *Hinc etiam orbis lunaris accuratiùs quàm antehac definiri potest.* Orbis lunaris figura definiri potest per observationes diametrorum apparentium Lunæ in datis angulis a puncto quodam fixo; sicque cùm distantiæ Lunæ sint his diametris apparentibus reciprocæ, longitudines distantiis Lunæ proportionales in lateribus eorum angulorum secari possunt et per eas extremitates duci potest curva orbi lunari similis: sed observatio diametri cujuslibet corporis lucidi est nimis lubrica ut satis tuta esse possit hæc methodus; faciliùs tutiusque observabuntur motus horarius Lunæ ejusque distantia a quadraturâ proximâ, hinc itaque accuratiùs cognitâ ratione distantiarum Lunæ a Terrâ in datis angulis, accuratiùs definietur quàm antehac orbis lunaris.

(b) *Curvaturas linearum*, &c. Curvatura lineæ est ejus deflexio a tangente, et æstimari

proportione sinuum vel tangentium angulorum contactuum ad radios æquales pertinentium, ubi radii illi in infinitum diminuuntur. (c) Attractio autem Lunæ in Terram in syzygiis est excessus gravitatis ipsius in Terram supra vim solarem 2 P K quâ gravitas acceleratrix Lunæ in Solem superat gravitatem acceleratricem Terræ in Solem vel ab eâ superatur. (d) In quadraturis autem attractio illa est summa gravitatis Lunæ in Terram et vis solaris K T, quâ Luna in Terram trahitur. (e) Et hæ attractiones, si $\frac{AT + CT}{2}$ dicatur N, sunt ut $\frac{178725}{ATq} - \frac{2000}{CT \times N}$ et $\frac{178725}{CTq} + \frac{1000}{AT \times N}$ quam proximè; seu ut $178725\, N \times CTq - 2000 \times ATq \times CT$ et $178725\, N \times AT + 1000\, CTq \times AT$. Nam si

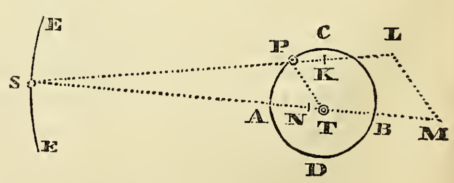
debet per angulum inter tangentem curvæ et curvam nascentem interceptum; illi anguli sunt semper quamminimi, ideóque, juxta principia trigonometrica, suis sinubus, suisve tangentibus sunt proportionales: hinc Newtonus ponit curvaturas linearum esse in ultimâ proportione tangentium angulorum contactûs, si tangentes illæ ad æquales radios referantur.

Radii illi æquales ad quos referuntur tangentes illæ, describerentur per continuationem velocitatis corporis uniformis secundum tangentem curvæ, ideóque quantulicumque sumantur, tempora quibus describentur erunt inversè ut illæ velocitates, tangentes verò anguli contactus quæ ad illos radios æquales referuntur, sunt attractionis effectus, siquidem supponitur illam attractionem agere secundùm perpendiculum ad curvam, is verò attractionis effectus est semper ut ipsa vis et quadratum temporis per quod agere concipitur, saltem si tempus exiguum intelligatur in quo attractio uniformiter ad modum gravitatis agere censenda sit; ergo illæ tangentes sunt ut attractio directe et quadratum velocitatis inversè, et in eâdem ratione sunt anguli contactûs sive curvaturæ linearum.

(c) *Attractio Lunæ in Terram in syzygiis est excessus gravitatis supra vim solarem 2 P K.* Ex iis quæ in Propositione XXV. demonstrata sunt, liquet per actionem Solis, Lunam a Terrâ distrahi ubicumque sita sit per vim T M, ad illam verò attrahi per vim L M, vis T M sive P L est semper æqualis 3 P K (vid. not. (u) ad Prop. XXV.) et est P L cosinus anguli A T P qui cosinus in syzygiis est æqualis radio, ita ut P T sive L M eo in casu sit æqualis P K, ergo Luna attrahitur ad Terram in syzygiis per vim gravitatis et per vim L M sive P K, et distrahitur ab eâ per vim 2 P K, superest itaque attractioni Lunæ in Terram in syzygiis excessus gravitatis supra vim solarem 2 P K.

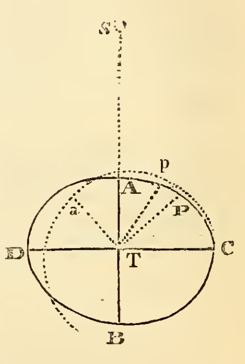
(d) *In quadraturis* autem evanescit vis T M, attractio ergo Lunæ in Terram est summa ejus gravitatis et vis L M sive C T sive K T quia in quadraturis puncta K et C coincidunt.

(e) * *Et hæ attractiones si* $\frac{AT + CT}{2}$ *dicatur N*, &c. Ex Propositione XXV. constat vim gravitatis quâ Luna retinetur in orbe suo in mediocri suâ distantiâ N esse ad vim solarem mediocrem T M ut 178725 ad 1000, ideóque ad vim 2 P K in syzygiis æqualem 2 T M ut 178725 ad 2000, sed distantiis A T, C T inæqualibus evadentibus variant istæ vires, est enim vis gravitatis in distantiâ N ad vim gravitatis in distantiâ A T ut $\frac{1}{N^2}$ ad $\frac{1}{AT^2}$ ideóque si prior exprimatur per 178725, erit posterior $\frac{178725\, N^2}{AT^2}$, et simili ratiocinio vis gravitatis in distantia C T erit $\frac{178725\, N^2}{CT^2}$, vires verò solares 2 P K, K T, crescunt ut ipsæ distantiæ; quare si vis 2 P K in distantiâ N sit 2000, in distantiâ A T erit $\frac{2000\, AT}{N}$, et si vis T M in quadraturis sit 1000 in eâ distantiâ N, erit ea vis in distantiâ C T,



$\frac{1000\, CT}{N}$; hinc attractio in syzygiis fit $\frac{178725\, N^2}{AT^2} - \frac{2000\, AT}{N}$, et in quadraturis

gravitas acceleratrix Lunæ in Terram exponatur per numerum 178725, vis mediocris M L, quæ in quadraturis est P T vel T K et Lunam trahit in Terram, erit 1000, et vis mediocris T M in syzygiis erit 3000; de quâ, si vis mediocris M L subducatur, manebit vis 2000 quâ Luna in syzygiis distrahitur a Terrâ, quamque jam ante nominavi 2 P K. (f) Velocitas autem Lunæ in syzygiis A et B est ad ipsius velocitatem in quadraturis C et D, ut C T ad A T et momentum areæ quam Luna radio ad Terram ducto describit in syzygiis ad momentum ejusdem areæ in quadraturis conjunctim, i. e. ut 11073 C T ad 10973 A T. (g) Sumatur hæc ratio bis inversè et ratio prior semel directè, et fiet curvatura orbis lunaris in syzygiis ad ejusdem curvaturam in quadraturis ut $120406729 \times 178725 \times A T q \times C T q \times N - 120406729 \times 2000\, A T q q \times C T$ ad $122611329 \times 178725\, A T q \times C T q \times N + 122611329 \times 1000\, C T q q \times A T$, (h) i. e. ut $2151969 \times A T \times C T \times N - 24081\, A T$ cub. ad $2191371 \times A T \times C T \times N + 12261\, C T$ cub.



Quoniam figura orbis lunaris ignoratur, hujus vice assumamus ellipsin D B C A, in cujus centro T Terra collocetur, et cujus axis major D C quadraturis, minor A B syzygiis interjaceat. (i) Cùm autem planum ellipseos hujus motu angulari circa Terram revolvatur, et trajectoria, cujus curvaturam consideramus, describi debet in plano quod omni motu angulari omnino destituitur: consideranda erit figura, quam Luna in ellipsi illâ revolvendo describit in hoc plano, hoc est figura C p a, cujus puncta singula p

$\frac{178725\, N^2}{C T^2} + \frac{1000\, C T}{N}$, sive omnia dividendo per N^2 est attractio in syzygiis $\frac{178725}{A T^2} - \frac{2000\, A T}{N^2 \times N}$ et in quadraturis $\frac{178725}{C T^2} + \frac{1000\, C T}{N^2 \times N}$; quoniam verò N est medium arithmeticum inter A T et C T quorum differentia est exigua, pro medio geometrico inter eas quantitates proximè sumi potest, ita ut fit $N^2 = A T \times C T$, quo valore substituto loco N^2 fit attractio in syzygiis $\frac{178725}{A T^2} - \frac{2000}{C T \times N}$ et in quadraturis $\frac{178725}{C T^2} + \frac{1000}{A T \times N}$ et reductione factâ ad eosdem denominatores fiunt istæ quantitates ut $178725\, N \times C T^2 - 2000\, A T^2 \times C T$ ad $178725\, N \times A T^2 + 1000\, C T^2 \times A T$.

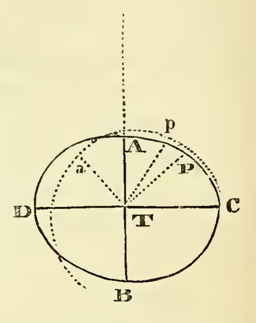
(f) * *Velocitas Lunæ*, &c. Quoniam in syzygiis et quadraturis arcus quos Luna describit sunt perpendiculares radiis A T, C T, areæ momenta dato tempore illic descripta sunt ut illi arcus et radii A T, C T conjunctim, ii arcus, dato tempore descripti, sunt ut velocitates, ergo velocitates in syzygiis et quadraturis sunt ut arearum descriptarum momenta et radii inversè.

(g) * *Sumatur* ratio duplicata velocitatum *inversè et ratio* simplex attractione *directè*, factâque multiplicatione ut fractiones deleantur *fiet curvatura orbis lunaris in syzygiis ad ejusdem curvaturam in quadraturis*, &c.

(h) * *I. e. ut.* Dividendo per $A T \times C T$, numeros signo $\times$ conjunctos in se invicem multiplicando neglectisque quatuor ultimis productorum cifris.

(i) * *Cùm autem planum ellipseos hujus motu angulari circa Terram revolvatur.* Axis enim

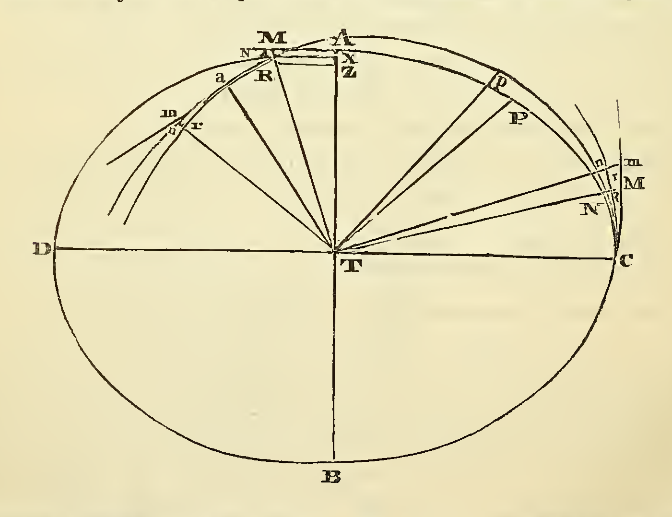
inveniuntur capiendo punctum quodvis P in ellipsi, quod locum Lunæ repræsentet, et ducendo T p æqualem T P, eâ lege ut angulus P T p æqualis sit motui apparenti Solis a tempore quadraturæ C confecto; vel (quod (l) eodem ferè recidit) ut angulus C T p sit ad angulum C T P ut tempus revolutionis synodicæ lunaris ad tempus revolutionis periodicæ seu $29^d. 12^h. 44'$, ad $27^d. 7^h. 43'$. Capiatur igitur angulus C T a in eâdem ratione ad angulum rectum C T A; et sit longitudo T a æqualis longitudini T A; et erit a apsis ima et C apsis summa orbis hujus C p a. Rationes autem ineundo invenio quod differentia inter curvaturam orbis C p a in vertice a, et curvaturam circuli centro T intervallo T A descripti, sit ad differentiam inter curvaturam ellipseos in vertice A et curvaturam ejusdem circuli, (m) in duplicatâ ratione anguli C T P ad angulum C T p;



minor hujus ellipseos ad Solem perpetuò dirigitur, ideóque eodem motu quo Sol circa Terram revolvitur, axis iste sive planum ellipseos circa Terram fertur.

(l) * *Quod eodem ferè recidit:* quia Lunæ motus medius ab ipsius motu vero non multùm discrepat.

(m) * *In duplicatâ ratione anguli C T P ad angulum C T p.* Centro T intervallo T A describatur circuli arcus A R a r, sit arcus A R ad arcum a r in ratione datâ anguli C T P ad angulum C T p, ducantur radii T R, T r et producantur ita ut tangentibus in A et a ductis occurrant in M et m, occurrant verò ellipsi in N, et curvæ C p a in n; erit N R = n r, quia ex constructione T n sumitur æqualis T N, et radii T R, T r sunt æquales; evanescentibus autem arcubus r a et R A curvatura orbis C p a in a erit ad curvaturam circuli radio T A descripti, ut m n ad m r, et ideo differentia inter curvaturam orbis C p a in a et curvaturam circuli radio T A descripti est ad curvaturam ejusdem



([n]) et quod curvatura ellipseos in A sit ad curvaturam circuli illius, in duplicatâ ratione T A ad T C; et ([o]) curvatura circuli illius ad curvaturam circuli centro T intervallo T C descripti, ut T C ad T A; ([p]) hujus autem curvatura ad curvaturam ellipseos in C, in duplicatâ ratione T A ad T C; ([q]) et differentia inter curvaturam ellipseos in vertice C et curvaturam circuli novissimi, ad differentiam inter curvaturam figuræ C p a in vertice C et curvaturam ejusdem circuli, in duplicatâ ratione anguli C T p ad angulum C T P. Quæ quidem rationes ex sinubus angulorum contactûs ac differentiarum angulorum facilè colliguntur. ([r]) His autem

circuli ut m r — m n sive n r aut R N ad m r, simili modo patet quod curvatura circuli radio T A descripti est ad differentiam inter curvaturam ellipseos in vertice A et curvaturam ejusdem circuli ut M R ad N R. Ideóque compositis rationibus differentia inter curvaturam orbis C p a in a et curvaturam circuli radio T A descripti, est ad differentiam inter curvaturam ellipseos in A et curvaturam ejusdem circuli ut M R, ad m r, hoc est, (Cor. 1. Lem. XI. Lib. I.) in ratione duplicatâ arcûs R A ad arcum r a, sive (per const.) in ratione duplicatâ anguli C T P ad angulum C T p.

([n]) * *Et quod curvatura ellipseos in A*, &c. Curvatura ellipseos in A est ad curvaturam circuli radio T A descripti in ratione M N ad M R; ducatur verò N X tangenti parallela, et axi occurrens in X, et pariter R Z, erit per proprietatem ellipseos A X $\times$ X B ad N X ^{2} ut T A ^{2} ad T C, ^{2} et per proprietatem circuli erit A Z $\times$ Z B = R Z ^{2}, sed quia sumuntur quantitates nascentes est A X = M N, A Z = M R, X B = A B = Z B et N X = R Z, quibus valoribus suo loco substitutis prima proportio evadit M N $\times$ A B : M R $\times$ A B : : T A ^{2} : T C ^{2} ideóque est M N ad M R, sive curvatura ellipseos ad curvaturam circuli in duplicatâ ratione T A ad T C.

([o]) * *Curvatura circuli*, &c. Nam circulorum curvaturæ sunt inversè ut eorum radii (not. 121. Lib. I.)

([p]) * *Hujus autem curvatura* potest demonstrari eo ipso modo quo demonstravimus rationem curvaturæ ellipseos in A ad curvaturam circuli radio T A descripti (not. [n]).

([q]) * *Et differentiam inter curvaturam ellipseos in vertice C*, &c. Demonstratio ferè eadem est ac in notâ ([m]): centro C intervallo T C describatur circuli arcus C R r, sit arcus C R ad arcum C r, in ratione anguli C T P ad angulum C T p ducatur tangens C M m, et radii T R M, T r m quorum prior occurrat ellipsi in N, posterior curvæ C p a in n, erit N R = n r propter æquales T N, T n per curvæ const. et radios æquales T R, T r; evanescentibus arcubus C N, C n, curvatura ellipseos in C est ad curvaturam circuli radio T C descripti ut M N ad M R, ideóque curvaturarum ellipseos et circuli differentia est ad curvaturam circuli ut R N ad M R, simili modo curvatura circuli est ad curvaturam orbis C p a ut m r ad m n, ideóque curvatura circuli ad differentiam curvaturarum orbis C p a et circuli ut m r ad r n: itaque compositis rationibus erit curvaturarum ellipseos et circuli differentia ad curvaturarum orbis C p a et circuli differentiam ut m r ad M R hoc est in ratione duplicatâ arcûs r C ad arcum R C, sive in ratione duplicatâ anguli C T p ad angulum C T P.

([r]) *His autem inter se collatis*, &c. Ut pateat ordo quo istæ rationes componuntur, dicatur s tempus revolutionis synodicæ, et t tempus revolutionis periodicæ, eritque angulus C T P ad angulum C T p ut t ad s.

(1) Differentia curvaturarum orbis C p a in a et circuli radio T A descripti, est ad differentiam curvaturarum ellipseos in A et ejusdem circuli ut t t ad s s (not. [m]).

(2) Curvatura ellipseos in A ad curvaturam circuli radio T A descripti ut T A ^{2} ad T C ^{2} (not. [n]).

(3) Hinc dividendo, differentia curvaturarum ellipseos in A et circuli est ad curvaturam ejusdem circuli ut T C ^{2} — T A ^{2} ad T C ^{2}: et per compositionem 1æ. et 3æ. proportionis.

(4) Est differentia curvaturarum orbis C p a in a et circuli radio T A descripti ad curvaturam ejusdem circuli ut s t $\times \overline{TA^2 - TC^2}$ ad s s $\times$ T C ^{2}.

(5) Hinc, convertendo curvatura orbis C p a in a ad curvaturam circuli radio T A descripti ut s s T C ^{2} — t t $\times \overline{TC^2 - TA^2}$ ad s s $\times$ T C ^{2}.

(6) Curvatura circuli radio T A descripti, ad curvaturam circuli radio T C descripti ut T C ad T A.

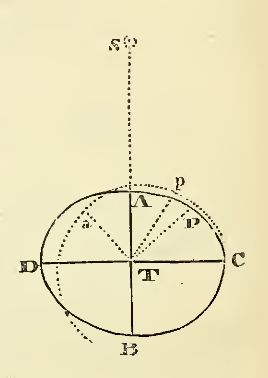
(7) Curvatura circuli radio T C descripti ad curvaturam ellipseos in C ut T A ^{2} ad T C ^{2}.

(8) Hinc, convertendo curvatura circuli radio T C descripti ad differentiam curvaturarum ejus circuli et ellipseos in C ut T A ^{2} ad T C ^{2} — T A ^{2}.

(9) Differentia curvaturarum ellipseos in C et ejus circuli radio T C descripti ad differentiam curvaturarum figuræ C p a in C et ejusdem circuli ut s s ad t t; et per compositionem 8æ. et 9æ. proportionis est.

(10) Curvatura circuli radio T C descripti ad differentiam curvaturarum figuræ C p a in C et

inter se collatis, prodit curvatura figuræ C p a in a ad ipsius curvaturam in C, ut A T cub. + $\frac{16824}{100000}$ C T q × A T ad C T cub. + $\frac{16824}{100000}$ A T q × C T. Ubi numerus $\frac{16824}{100000}$ designat differentiam quadratorum angulorum C T P et C T p applicatam ad quadratum anguli minoris C T P, seu (quod perinde est) differentiam quadratorum temporum $27^d. 7^h. 43'$, et $29^d. 12^h. 44'$, applicatam ad quadratum temporis $27^d. 7^h. 43'$.



Igitur cùm a designet syzygiam Lunæ, et C ipsius quadraturam, proportio jam inventa eadem esse debet cum proportione curvaturæ orbis Lunæ in syzygiis ad ejusdem curvaturam in quadraturis, quam supra invenimus. Proinde ut inveniatur proportio C T ad A T, duco extrema et media in se invicem. Et termini prodeuntes ad A T × C T applicati, fiunt 2062.79 C T q q — 2151969 N × C T cub. + 368676 N × A T × C T q + 36342 A T q × C T q — 362047 N × A T q × C T + 2191371 N × A T cub. + 4051.4 A T q q = 0. Hic pro terminorum A T et C T semisummâ N scribo 1, et pro eorundem semi-differentiâ ponendo x, fit C T = 1 + x, et A T = 1 — x: (s) quibus in æquatione scriptis, et æquatione prodeunte resolutâ, obtinetur x æqualis 0.00719, et inde semi-diameter C T fit 1.00719, et semi-diameter A T 0.99281, qui numeri sunt ut $70\frac{1}{24}$ et $69\frac{1}{24}$ quam proximè. (t) Est igitur distantia Lunæ a Terrâ in syzygiis ad ipsius distantiam in quadraturis (sepositâ scilicet excentricitatis consideratione) ut $69\frac{1}{24}$ ad $70\frac{1}{24}$, vel numeris rotundis ut 69 ad 70.

ejusdem circuli ut $TA^2 \times s^2$ ad $tt \times \overline{TC^2 - TA^2}$.

(11) Et convertendo curvatura circuli radio T C descripti ad curvaturam figuræ C p a in C ut $TA^2 \times s^2$ ad $TA^2 \times s^2 + tt \times \overline{TC^2 - TA^2}$.

Hinc tandem ex æquo et per compositionem 5æ. 6æ. et hujus 11æ. proportionis, est curvatura orbis C p a in a, ad ejus curvaturam in C ut $\overline{s^2 \times TC^2 - tt \times \overline{TC^2 - TA^2}} \times TC^2 \times TA^2 \times s^2$ ad $s^2 \times TC^2 \times TA \times (TA^2 \times s^2 + tt \times (TC^2 - TA^2))$ quæ divisa per $s^2 \times TC \times TA$ fiunt ut $\overline{s^2 - tt} \times TC^2 \times TA + t^2 \times TA^3$ ad $\overline{s^2 - tt} \times TA^2 \times TC + tt \times TC^3$, omnibusque divisis per t t et inverso terminorum ordine fiunt ut $TA^3 + \frac{s^2 - tt}{tt} \times TC^2 \times TA$ ad $TC^3 + \frac{s^2 - tt}{tt} \times TA^2 \times TC$. Q. e. i.

(s) *Quibus in æquatione scriptis.* Hæc æquatio fit $42456.19\, x^4 - 5082017.44\, x^3 + 148262.14\, x^2 - 12307251.44\, x + 88487.19 = 0$, sed cùm x debeat esse quantitas exigua, omnes terminos præter duos ultimos negligit, et ex æquatione $12307251.44\, x = 88487.19$ valorem obtinet $x = \frac{88487.19}{12307251.44} = 0.00719$.

(t) * *Est igitur distantia Lunæ a Terrâ,* &c. Astronomis est cognitum, quod si distantia mediocris Lunæ a Terrâ incidat in tempus syzygiarum, ea distantia mediocris minor erit quàm si incidat in tempus quadraturarum; clar. Halleius ex observationibus astronomicis deduxit, distantiam mediocrem Lunæ a Terrâ in syzygiis esse ad ipsius distantiam mediocrem in quadraturis ut $44\frac{1}{2}$ ad $45\frac{1}{2}$; quod si vel tantillùm propter observationum lubricitatem de hoc ultimo numero detrahatur, facilè accedit hæc ratio ad eam quam Newtonus deprehendit suo calculo.

PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA X.

Invenire variationem Lunæ.

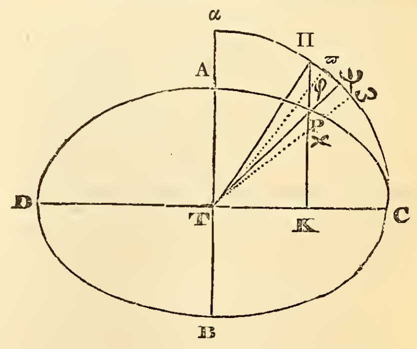
(u) Oritur hæc inæqualitas partim ex formâ ellipticâ orbis lunaris, partim ex inæqualitate momentorum areæ, quam Luna radio ad Terram ducto describit. Si Luna P in ellipsi D B C A circa Terram in centro ellipseos quiescentem moveretur, et radio T P ad Terram ducto describeret aream C T P tempori proportionalem: esset autem ellipseos semi-diameter maxima C T ad semi-diametrum minimam T A ut 70 ad 69: (x) foret tangens anguli C T P ad tangentem anguli motûs medii a quad-

(u) * *Oritur hæc inæqualitas*, &c. Pergit Newtonus in hypothesi quod semotâ Solis actione orbis Lunæ circularis foret; in præcedenti verò Propositione, determinavit quamnam mutationem induceret illi circulo vis Solis, quâtenus ea ejus portio assumitur quæ ad centrum Terra spectat et cum gravitate Lunæ versus Terram sociatur; itaque, sumpto novam figuram orbis lunaris ad ellipsim posse revocari, demonstrat in Prop. præcedente eam ellipsim talem esse ut axis major sit ad minorem ut 70 ad 69; motus autem Lunæ in tali ellipsi debet fieri ita ut areæ descriptæ circa centrum Terræ sint temporibus proportionales, quia vires quæ assumuntur, ad id centrum diriguntur; cùmque areæ illæ ellipticæ, angulis in centro factis proportionales non sint, sequitur illos angulos in centro facto temporibus proportionales non esse, ideóque aliquid corrigendum esse motui medio Lunæ, in quo anguli in centro Terræ facti proportionales temporibus assumuntur, ut habeatur Lunæ motus verus; et hæc correctio constituet partem variationis, quæ est, in hâc hypothesi, arcus interceptus inter locum medium Lunæ et locum ejus verum, et hæc pars variationis *ex formâ ellipticâ*, quam assumit *orbis lunaris* per Solis actionem, *oritur*.

Altera pars variationis oritur ex eâ actionis Solis parte quam consideravit Newtonus Prop. XXVI. et quâ fit ut ipsæ areæ a Lunâ descriptæ temporibus non sint proportionales; area itaque tempori proportionalis corrigenda est, idque detrahendum vel addendum quod debetur illi actioni, quodque per constructionem Probl. nostri n. 112. determinare facillimum erit; quam quidem constructionem non dedit Newtonus, quasi mediocribus uteretur quantitatibus ex æquo, ut aiunt, et bono assumptis, verùm vix dubitandum quin ad hanc vel similem constructionem, respexerit, ii enim non erant casus quibus hæc media sine demonstratione assumi possent a viro summè accurato et perspicace.

(x) * *Foret anguli tangens.* Sit C A D B ellipsis quam Luna describit, ita ut areæ circa centrum T sint temporibus proportionales, describatur circulus eodem centro, radio T C, in ejus circuli circumferentiá moveatur Luna motu medio, sumaturque in eo circulo arcus C Π tempori cuivis dato proportionalis, ducta ordinata Π P K, dico quod area elliptica T C P erit tempori proportionalis, hoc est quod tota area elliptica erit ad eum sectorem T C P ut est tempus periodicum Lunæ ad tempus datum.

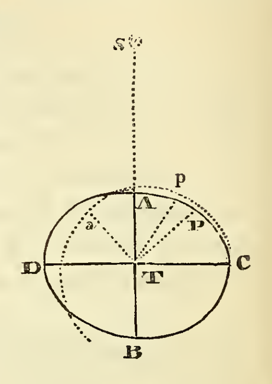
Est enim tota circuli circumferentia ad arcum C Π, sive totus circulus ad aream C T Π, ut tempus periodicum totum ad tempus datum ex constructione, sed ex notâ circuli et ellipseos proprietate, est tota area elliptica ad totam aream circuli ut T A ad C T, et pariter est sector



C T P ad C T Π ut T A ad C T (nam triangula rectilinea T P K, T Π K sunt ut bases P K, Π K; areæ curvilineæ C P K, C Π K sunt etiam, ex notâ ellipseos et circuli proprietate ut P K ad Π K, ergo toti sectores C T P, C T Π sunt ut P K ad Π K, quæ sunt ut T A ad C T,) ergo tota area elliptica est ad aream circuli ut sector C T P ad C T Π, et alternando, tota area elliptica ad sectorem C T P, ut est circuli area ad C T Π, seu ut est tempus periodicum, ad tempus datum.

Si ergo area C T P sit tempori proportionalis,

raturâ C computati, ut ellipseos semi-diameter T A ad ejusdem semi-diametrum T C seu 69 ad 70. (y) Debet autem descriptio areæ C T P, in progressu Lunæ a quadraturâ ad syzygiam, eâ ratione accelerari, ut ejus momentum in syzygiâ Lunæ sit ad ejus momentum in quadraturâ ut 11073 ad 10973, utque excessus momenti in loco quovis intermedio P supra momentum in quadraturâ sit ut quadratum sinus anguli C T P. Id quod satis accuratè fiet, si tangens anguli diminuatur in subduplicatâ ratione numeri 10973 ad numerum 11073, id est, in ratione numeri 68,6877 ad numerum 69. Quo pacto tangens anguli C T P jam erit ad tangentem motûs medii ut 68,6877 ad 70, et angulus C T P in octantibus, ubi motus medius est 45^{gr}. invenietur $44^{gr}. 27'. 28''$. qui subductus de angulo motûs medii 45^{gr}. (z) relinquit variationem maximam $32'. 32''$. Hæc



motus Lunæ qui a Terrâ videri debuisset sub angulo C T Π si Luna motu medio fuisset lata, videbitur sub angulo C T P, et si linea T K pro radio assumatur, erit K P tangens anguli C T P, et K Π tangens anguli C T Π, sed est P K ad Π K ut T A ad C T, ergo *tangens anguli C T P est ad tangentem anguli motûs medii ut T A ad T C seu* 69 *ad* 70.

(y) * *Debet autem descriptio areæ*, &c. Manentibus iis omnibus quæ in notis 112. et 113., exposita fuerunt, arcus variationis erit $\frac{PK \times TK}{1+r}$ (per Cor. 2. not. 113.) sumatur ergo in arcu C Π versus C arcus $\Pi\varpi = \frac{PK \times TK}{1+r}$ sive (quia in hâc figura Π respondet litteræ P in not. 112. assumptæ) $= \frac{\Pi K \times TK}{1+r}$, ducatur ϖ T quæ secet lineam Π K in φ triangulum Π ϖ φ simile erit triangulo T K φ, sive propter exiguitatem anguli Π T ϖ triangulum Π ϖ φ simile erit triangulo T K Π, hinc erit T K ad T Π (r) sicut $\Pi\varpi \left(\frac{K\Pi \times TK}{1+r}\right)$ ad Π φ quod erit itaque $\frac{r \times \Pi K}{1+r}$, ideòque erit K φ $(= \Pi K - \Pi\varphi) = \frac{\overline{1+r} \times \Pi K - r \times \Pi K}{1+r}$ $= \frac{1 \times \Pi K}{1+r}$, unde habetur hæc proportio $1+r : 1 :: \Pi K : \varphi K$; si verò sumatur T K pro radio, erit Π K tangens motûs medii et φ K tangens motûs medii imminuti hac variationis portione; debet minui in eadem ratione quam proxime tangens P K motus Lunæ in ellipsi spectatæ aut saltem in ratione paulo minore; cùm itaque $1+r$, sit medium arithmeticum inter $1+2r$ sive 11073 et 1 sive 10973, et ratio medii arithmetici ad minimum extremorum sit paulo major quàm medii geometrici ad eum extremum, satis accurate fieri dicit si sumatur tangens P K ad tangentem anguli motûs veri Lunæ ut medium geometricum inter 11073 et 10973 ad 10973, sive in subduplicatâ ratione 11073 ad 10973; quæ est æqualis rationi 69 ad 68,6877; cùm ergo sit Π K ad P K ut 70 ad 69, et cùm sit P K ad tangentem motûs Lunæ ultimò correcti ut 69 ad 68,6877, erit ex æquo tangens motûs medii ad tangentem motûs veri ut 70 ad 68,6877. Q. e. d.

(z) 114. *Relinquit variationem maximam.* Ex Cor. 4. not. 113. arcum variationis quæ

ita se haberent si Luna, pergendo a quadraturâ ad syzygiam, describeret angulum C T A graduum tantum nonaginta. Verùm ob motum Terræ, quo Sol in consequentia motu apparente transfertur, Luna, prius quam Solem assequitur, describit angulum C T a angulo recto majorem in ratione temporis revolutionis lunaris synodicæ ad tempus revolutionis periodicæ, id est, in ratione $29^d. 12^h. 44'.$ ad $27^d. 7^h. 43'.$ Et hoc pacto anguli omnes circa centrum T dilatantur in eâdem ratione, et variatio maxima quæ secus esset $32'. 32''$, jam aucta in eâdem ratione fit $35'. 10''$.

Hæc est ejus magnitudo in mediocri distantiâ Solis a Terrâ, (a) neglectis differentiis quæ a curvaturâ orbis magni majorique Solis actione in Lunam falcatam et novam quàm in gibbosam et plenam, oriri possint. (b) In aliis

pendet ex inæqualitate momentorum areæ, maximum esse in octantibus constat; eam autem variationis portionem quæ pendet ex formâ ellipticâ orbis lunaris, etiam maximam esse in octantibus hoc modo patet, producatur T P in Ψ et cùm arcus $\Pi\Psi$ vix excedat semi-gradum ubi maximus est pro recta sumatur, erit triangulus $\Pi\Psi P$ similis triangulo T K P, sive T K Π, ideóque est T Π ad T K ut Π P ad $\Pi\Psi$ qui erit ergo ubivis æqualis $\frac{\Pi P \times TK}{T\Pi}$, sed quoniam est ubivis 70 ad 69 ut Π K ad P K, erit dividendo 70 ad 1 ut Π K ad Π P, ideóque est $\Pi P = \frac{\Pi K}{70}$ et arcus $\Pi\Psi$ erit $\frac{\Pi K \times TK}{70\, T\Pi}$, jam autem demonstratum est notâ 111. quod maximum hujus quantitatis $\Pi K \times TK$ est in octantibus, ergo arcus $\Pi\Psi$ sive ea variationis portio quæ pendet ex formâ ellipticâ orbis lunaris, est maxima in octantibus sicut et altera portio, ergo variatio tota est maxima in octantibus.

(a) * *Neglectis differentiis quæ à curvaturâ orbis magni oriri possint.* Hactenus suppositum est, lineam D T C repræsentare orbis magni portionem, et fieri quadraturas in punctis D et C; quod quidem absolutè verum non est, quippe semi-diameter orbis lunaris sub angulo 10 circiter minutorum a Sole videtur, unde arcus D C est 20′ circiter et aliquam habet curvaturam, hinc revera utraque quadratura est circiter 20′ propior conjunctioni quàm oppositioni, quæ consideratio hic neglecta est.

Majorique Solis actione in Lunam falcatam et novam quàm in gibbosam et plenam, si vis Solis in punctum T exprimatur per $\frac{1}{ST^2}$ erit vis in Lunam novam et falcatam ut $\frac{1}{(ST - TA)^2}$ et vis in Lunam plenam et gibbosam ut $\frac{1}{(ST + TA)^2}$ revocentur omnia ad communem denominationem, erit vis in punctum T ut $\overline{ST - TA}|^2 \times \overline{ST + TA}|^2$ sive $ST^4 - 2ST^2 \times TA^2 + TA^4$, vis in Lunam novam $ST^4 + 2ST^3 \times TA + TA^2 \times ST^2$, vis in Lunam plenam $ST^4 - 2ST^3 \times TA + ST^2 \times TA^2$; hinc excessus vis in Lunam novam supra vim mediocrem est $2ST^3 \times TA + 3ST^2 \times TA^2 - TA^4$; et excessus vis mediocris supra vim in Lunam plenam est $2ST^3 \times TA - 3ST^2 \times TA^2 + TA^4$, qui quidem excessus differunt, et prior posteriorem superat quantitate $6ST^2 \times TA^2 - 2TA^4$; verùm propter magnitudinem lineæ S T præ linea T A, evanescit ferè hæc excessuum differentia respectu quantitatis communis $2ST^3 \times TA$, ideo pro æqualibus fuerunt habiti.

(b) *In aliis distantiis Solis a Terrâ.* Duplex est causa quæ errores ab actione Solis pendentes mutet, primùm vis Solis mediocris mutatur inversè ut quadrata distantiarum, et præterea cùm Sol celerior vel tardior fiat prout propior est vel remotior a Terrâ, Luna e converso ipsum tardius vel celerius attingit, unde mensis synodicus in perigæo Solis fit longior quàm idem mensis synodicus in apogæo; ex hac ultimâ causâ, si sola consideretur, fiet ut variatio maxima in ratione duplicatâ temporis revolutionis synodicæ crescat, quod quidem separatim demonstrandum de utrâque variationis portione $\Pi\Psi$ et $\Psi\omega$; et quidem in octantibus cùm triangulum $\Pi P \Psi$ sit rectangulum isosceles, est $\Pi\Psi = \frac{\Pi P}{\sqrt{2}}$, est verò $\Pi P = \frac{\alpha A}{\sqrt{2}}$, nam ex naturâ circuli et ellipseos est α T ad A T ut Π K ad P K et dividendo α T ad α A ut Π K ad $\Pi P = \frac{\alpha A \times \Pi K}{\alpha T}$ sed in octante est $\Pi K = \frac{\alpha T}{\sqrt{2}}$ ergo $\Pi P = \frac{\alpha A \times \alpha T}{\alpha T \sqrt{2}} = \frac{\alpha A}{\sqrt{2}}$ hinc $\Pi\Psi = \frac{\alpha A}{2}$, est autem α A effectus virium Solis Lunam retrahentium a suo circulo, durante quartâ parte temporis revolutionis synodicæ Lunæ, ergo si id tempus crescat manentibus iisdem viribus similiter agentibus,

distantiis Solis a Terrâ, variatio maxima est in ratione quæ componitur ex duplicatâ ratione temporis revolutionis synodicæ lunaris (dato anni tempore) directè, et triplicatâ ratione distantiæ Solis a Terrâ inversè. (c) Ideóque in apogæo Solis variatio maxima est 33′. 14″, et in ejus peri-

effectus totus α A erit ut quadratum temporis per quod illæ vires egerunt per Cor. 1. Lem. X. Lib. I. ideóque π ♈ crescit secundùm quadrata temporum.

Idem demonstrabitur de portione variationis ♈ ω quæ pendet ex acceleratione descriptionis areæ; quippe manentibus omnibus ut in not. 112. et fig. 3ª. recta C A majus tempus designare censeatur, et partes P p tempuscula in eadem ratione longiora, lineæ P M designant velocitates genitas durante momento P p, si ergo id momentum crescat viribus generatricibus iisdem manentibus, velocitates genitæ P M crescent in proportione temporis, et quia P p M m designat spatiolum illâ velocitate percursum, crescuntque et P M et P p in ratione temporum, crescet P M m p in ratione duplicatâ temporum, cùmque singula elementa curvæ in eâ proportione crescant, et tota area C A H, et ei æqualis C A X Y, ejusque dimidia C Q Z Y in eâdem proportione crescent; ex quâ si detrahatur C Q Z quod in eâdem proportione crevit, reliquum C Z Y quod areæ variationi maximæ ♈ T ω est proportionale, crescet etiam in eâdem duplicatâ ratione temporum, manente itaque radio T ω, ipse arcus ♈ ω crescet in duplicatâ ratione temporum.

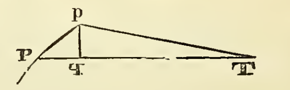
Hinc cùm π ♈ crescat in duplicatâ ratione temporum, tum etiam ♈ ω, summa itaque π ω sive tota variatio crescet in eâdem duplicatâ temporum ratione.

Dico præterea quod si spectetur imminutio actionis Solis propter auctam distantiam, variatio maxima decrescet in ratione triplicatâ distantiarum, nam designetur vis mediocris Solis per $\frac{1}{SK^2}$, est ex constructione S K ad T M ut vis Solis sive ut $\frac{1}{SK^2}$ ad vim T M, ergo ea vis T M est ut $\frac{TM}{SK^3}$ manente ergo T M quæ est æqualis P T; vis T M ex actione Solis pendens decrescit ut distantiarum cubus augetur; manente ergo tempore, sed vi mutatâ secundùm rationem triplicatam, eâdem ferè ratione ac prius ostendetur utramque variationis maximæ partem π ♈ ω et ♈ ω fore inversè in ratione triplicatâ distantiarum Solis; *hincque in variis Solis a Terrâ distantiis quæ in* datis anni temporibus recurrunt, *variationes maximæ erunt inter se in ratione duplicatâ durationis mensis synodici eo tempore, et triplicatâ inversè distantiæ Solis a Terrâ.*

(c) * *Ideóque*, &c. Ex his et præcedentibus facile intelligitur Newtoni calculus, si prius hæc Principia revocentur.

1°. Si dicatur m distantia mediocris Solis, sit ± e excessus vel defectus ejus distantiæ a mediocri distantiâ in loco quovis dato; denique dicatur s Solis motus horarius mediocris, dico quod Solis motus horarius in loco quovis suæ orbitæ exprimetur per quantitatem $\frac{m^2 s}{\overline{m \pm e}|^2}$.

Sit enim T Terra; P Sol; T P p area horæ tempore descripta, ejus areæ valor ubivis erit semper idem, sit p q arcus radio T p descriptus,



qui ob exiguitatem sumi potest ut ipsum perpendiculum in basim P T demissum, ideóque ob areas ubivis æquales is arcus erit ubivis inversè ut basis T P, sed numerus graduum ejus arcus p q est directè ut is ipse arcus et inversè ut ejus radius T p sive T P, ergo numerus graduum ejus arcûs p q est in ratione duplicatâ inversâ radii T P, is verò numerus exprimit motum Solis horarium, ergo Solis motus horarius, est inversè ut quadratum radii T P; cùm ergo in distantiâ mediocri est T P = m, in quâvis aliâ distantiâ est T P = m ± e, ergo est $\frac{1}{m^2}$ ad $\frac{1}{(m \pm e)^2}$ ut s ad $\frac{s m^2}{(m \pm e)^2}$, quod exprimit motum horarium Solis in quâvis distantiâ T P.

In distantiâ mediocri evanescit quantitas ± e ideóque motus horarius illic evadit $\frac{m^2 s}{m^2} = s$ secundùm hypothesim.

2°. Posito Lunam semper moveri motu suo horario mediocri, qui dicatur l, sitque p ejus tempus periodicum inter fixas, duratio mensis synodici quovis in loco orbitæ Telluris circa Solem, exprimetur per quantitatem $\frac{\overline{m \pm e}|^2 \times l p}{\overline{m \pm e}|^2 l - m^2 s}$ sive divisâ hâc quantitate per constantem $\frac{l p}{m^2}$ fiet mensis synodicus ut $\frac{\overline{m \pm e}|^2}{l - s \pm \frac{2 l e}{m} + \frac{e^2 l}{m^2}}$.

Nam dicatur x numerus graduum quem Sol emetitur durante quovis mense synodico, numerus graduum quem Luna eodem tempore emetietur, erit 360 + x, erit ergo motus horarius Lunæ l ad motum horarium Solis $\frac{m^2 s}{\overline{m \pm e}|^2}$ ut 360 + x ad x, et dividendo $m^2 l \pm 2 m e l +$

gæo 37′. 11″, si modò excentricitas Solis sit ad orbis magni semi-diametrum transversam ut $16\frac{15}{16}$ ad 1000.

Hactenus variationem investigavimus in orbe non eccentrico, in quo utique Luna in octantibus suis semper est in mediocri suâ distantiâ a Terrâ. Si Luna propter eccentricitatem suam, magis vel minus distat a Terrâ quàm si locaretur in hoc orbe, variatio paulo major esse potest vel paulo minor quàm pro Regulâ hic allatâ : sed excessum vel defectum ab astronomis per phænomena determinandum relinquo.

$e^2 l - m^2 s$ ad $m^2 s$ ut 360 ad x, itaque erit $x = \frac{360\, m^2 s}{m^2 l \pm 2 m e l + e^2 l - m^2 s}$. Hinc cùm Luna percurrat 360 gr. tempore p, absolvet 360 gr. $+ \frac{360\, m^2 s}{m^2 l \pm 2 m e l + e^2 l - m^2 s}$ tempore p $+ \frac{m^2 s p}{m^2 l \pm 2 m e l + e^2 l - m^2 s}$ sive reductione factâ, tempore $\frac{m^2 l p \pm 2 m e l p + e^2 l p - m^2 s p + m^2 s p}{n^2 l \pm 2 m e l + c^2 l - m^2 s}$ sive $\frac{\overline{m \pm e}|^2}{l - s \pm \frac{2el}{m} + \frac{e^2 l}{m^2}} \times \frac{l p}{m^2}$ quæ quantitas divisa per constantem $\frac{l p}{m^2}$, relinquit quantitatem $\frac{\overline{m \pm e}|^2}{l - s \pm \frac{2el}{m} + \frac{e^2 l}{m^2}}$ quæ erit ut duratio mensis synodici in distantiâ quavis $m \pm e$. Q. e. d.

In distantiâ mediocri, evanescente quantitate $\pm e$ mensis synodicus erit $\frac{m^2 l p}{m^2 l - m^2 s} = \frac{l p}{l - s}$ et erit ad menses synodicos in aliis quibusve distantiis ut $\frac{m^2}{l - s}$ ad $\frac{\overline{m \pm e}|^2}{l - s \pm \frac{2el}{m} + \frac{e^2 l}{m^2}}$.

3. Variatio maxima erit ubivis ut $\frac{m \pm e}{\overline{l - s \pm \frac{2el}{m} + \frac{e^2 l}{m^2}}|^2}$: nam ex hâc ipsâ Propositione variatio maxima est directè ut quadratum temporis synodici et inversè ut cubus distantiæ sive in ratione compositâ quantitatum $\frac{\overline{m \pm e}|^4}{\overline{l - s \pm \frac{2el}{m} + \frac{e^2 l}{m^2}}|^2}$ et $\frac{1}{\overline{m \pm e}|^3}$ ideóque ut $\frac{m \pm e}{\overline{l - s \pm \frac{2el}{m} + \frac{e^2 l}{m^2}}|^2}$.

Corol. In distantiâ mediocri variatio maxima exprimitur per quantitatem $\frac{m}{\overline{l - s}|^2}$ et eam superius determinavit Newtonus ferè 35″. 10‴. sive 2110‴; hinc itaque ut habeatur variatio maxima in quovis orbitæ solaris puncto fiat ut $\frac{m}{\overline{l - s}|^2}$ ad $\frac{m \pm e}{\overline{l - s \pm \frac{2el}{m} + \frac{e^2 l}{m^2}}|^2}$ ita 2110‴. ad variationem maximam quæsitam, quæ itaque erit $\frac{\overline{l - s}|^2}{\overline{l - s \pm \frac{2el}{m} + \frac{e^2 l}{m^2}}|^2} \times \frac{m \pm e}{m} \times 2110‴$, (sive accuratius $\times$ 2109.8‴.).

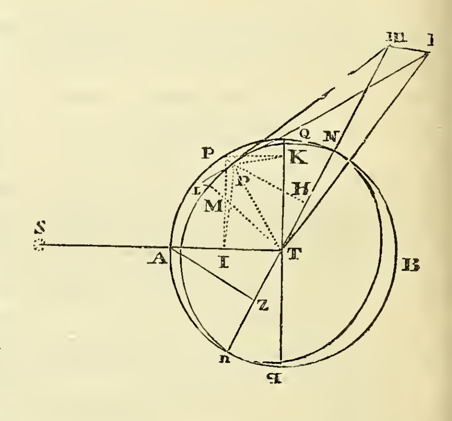
Ratio autem motûs horarii Lunæ l ad motum horarium Solis s obtinetur ex tempore periodico utriusque inter stellas fixas, itaque cùm tempus periodicum Lunæ sit $27^d. 7^h. 43'$. et annus sidereus Solis $365^d. 6^h. 9'$. et velocitates mediocres sive motus horarii mediocres sint inversè ut ista tempora periodica, erit l ad s ut 1.081 ad .081 ideóque erit $l - s = 1$, et variationis maximæ expressio fiet $\frac{1}{\overline{1 \pm \frac{2.162\, e}{m} + \frac{1.081\, e^2}{m^2}}|^2} \times \frac{m \pm e}{m} \times 2109.8‴$. Cùmque m sit 1000 et in apogæo $\frac{m + e}{m}$ sit $1.016\frac{51}{16}$ in perigæo verò sit $\frac{m - e}{m} = .983\frac{15}{16}$ hæc ducta in 2109.8‴. efficiunt in apogæo 2145.5‴. et in perigæo 2074‴, sed cùm sit $e = 16\frac{15}{16}$ quantitas $\frac{2.162\, e}{m}$ evadit .036618875 et $\frac{1.081\, e^2}{m^2}$ est .00031027. Unde quantitas $1 + \frac{2.162\, e^2}{m} + \frac{1.081\, e^2}{m^2}$ fit 1.03665 et $1 - \frac{2.162\, e}{m} + \frac{1.081\, e^2}{m^2}$ fit .9637.

Dividatur ergo bis 2145′.5‴. per 1.037 quotiens dabit variationem maximam in apogæo 1994‴. sive 33″. 14‴, et dividatur bis 2074‴. per .964 quotiens dabit variationem maximam in perigæo quàm proximè 2231‴. sive 37″. 11‴.

PROPOSITIO XXX. PROBLEMA XI.

Invenire motum horarium nodorum Lunæ in orbe circulari.

Designet S Solem, T Terram, P Lunam, N P n orbem Lunæ, N p n ([d]) vestigium orbis in plano eclipticæ; N, n nodos, n T N m lineam nodorum infinitè productam; P I, P K perpendicula demissa in lineas S T, Q q; P p perpendiculum demissum in planum eclipticæ; A, B syzygias Lunæ in plano eclipticæ; A Z perpendiculum in lineam nodorum N n; Q, q quadraturas Lunæ in plano eclipticæ, et p K perpendiculum in lineam Q q quadraturis interjacentem. Vis Solis ad perturbandum motum (per Prop. XXV.) duplex est, altera lineæ L M in schemate Propositionis illius, altera lineæ M T proportionalis. Et Luna vi priore in Terram, posteriore in Solem secundùm lineam rectæ S T a Terra ad Solem ductæ parallelam trahitur. Vis prior L M agit secundùm planum orbis lunaris, et propterea situm plani nil mutat. Hæc igitur negligenda est. Vis posterior M T quâ planum orbis lunaris perturbatur, ([e]) eadem est cum vi 3 P K vel 3 I T. ([f]) Et hæc vis (per Prop. XXV.) est ad vim quâ Luna in circulo circa Terram quiescentem tempore suo periodico uniformiter revolvi posset, ut 3 I T ad radium circuli multiplicatum per numerum 178.725, sive ut I T ad radium multiplicatum per 59.575. Cæterum in hoc calculo, et eo omni qui sequitur, considero lineas omnes a Lunâ ad Solem ductas tanquam parallelas lineæ quæ a Terrâ ad Solem ducitur, ([g]) propterea quod inclinatio tantùm ferè



([d]) * *Vestigium orbis in plano eclipticæ.* Hoc est orbis genitus demittendo ex singulis punctis orbitæ lunaris perpendicula ad planum eclipticæ.

([e]) * *Eadem est cum vi 3 P K* (Prop. XXV. not. [u]).

([f]) * *Et hæc vis est ad vim quâ Luna in circulo circa Terram quiescentem tempore suo periodico uniformiter revolvi posset.* Vis T M est ad vim M L ut est 3 P K sive 3 I T ad radium (Prop. XXVI. not. 1.); vis M L est ad vim quâ Luna circa Terram tempore suo periodico revolvi posset, ut 1 ad 178.725 (Prop. XXV. not. [r]). Ergo, ex æquo, et conjunctis rationibus, est vis M T ad vim quâ Luna circa Terram tempore suo periodico revolvi posset ut est 3 I T ad radium circuli multiplicatum per 178.725.

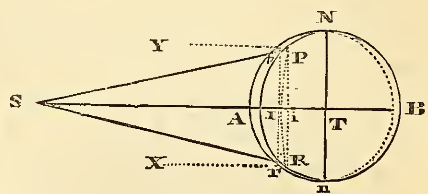
([g]) * *Propterea quod inclinatio tantùm ferè minuit effectus omnes in aliquibus casibus quantùm auget in aliis.* Exempli gratiâ, sint nodi in quadraturis, specteturque Luna in punctis P et R æqualiter a quadraturis N et n distantibus et

minuit effectus omnes in aliquibus casibus, quantùm auget in aliis; et nodorum motus mediocres quærimus, neglectis istiusmodi minutiis, quæ calculum nimis impeditum redderent.

Designet jam P M arcum, quem Luna dato tempore quàm minimo describit, et M L lineolam cujus dimidium Luna, impellente vi præfatâ 3 I T, eodem tempore describere posset. (h) Jungantur P L, M P, et producantur eæ ad m et l, ubi secent planum eclipticæ; inque T m demittatur perpendiculum P H. Et quoniam recta M L parallela est plano eclipticæ; ideóque cum rectâ m l quæ in plano illo jacet concurrere non potest, et tamen jacent hæ rectæ in plano communi L M P m l; parallelæ erunt hæ rectæ, et propterea similia erunt triangula L M P, l m P. Jam cùm M P m sit in plano orbis, in quo Luna in loco P movebatur, incidet punctum m in lineam N n per orbis illius nodos N, n ductam. Et quo-

vis obliqua Solis S P, S R in ipsam agere concipiatur, quæ in duas dividatur, unam parallelam lineæ S T, secundùm directiones P Y, R X agentem, alteram huic perpendicularem secundùm directiones P I, R I; de effectu vis secundùm directiones P Y, R X agentis in hoc problemate actum est; directiones verò P I, R I sese mutuo compensant; dividatur enim rursus vis P I, R I in duas vires, unam P i, R i secundùm planum orbitæ lunaris agentem ideóque nodorum positionem non turbantem, alteram P p, R r ipsi perpendicularem; hæc nodorum positionem, planique inclinationem afficiet; sed cùm de plani inclinatione hinc non agatur, manere plani inclinationem fingatur, itaque vis P p, R i dum admovet puncta P et R ad eclipticam, efficit ut nodis viciniores videantur seu ut nodi versus puncta illa moveri censeantur, ideóque actio in punctum P efficit ut nodus N in consequentia feratur, et actio in punctum R efficit ut nodus n in antecedentia fertur, ideóque, Solis actio obliqua in punctum P motum retrogressivum nodi natum ex vi P Y parallela lineæ S T tantùm minuit quantùm eadem actio obliqua in punctum R auget eum motum retrogressivum natum ex vi R X.

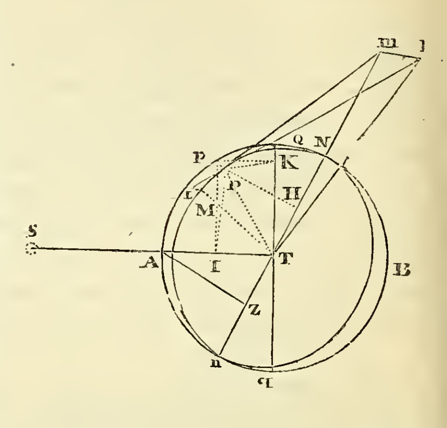
(h) * *Et M L lineolam cujus dimidium Luna, impellente vi 3 I T* describeret tempore quo Luna arcum P M percurreret; assumit utique Newtonus, ut rei conceptus facilior fiat, actiones omnes vis 3 I T quæ exercitæ fuerunt dum arcus P M percurritur *simul et semel in loco P impressas esse*, sicque motum Lunæ ex P motæ, esse compositum ex velocitate acquisitâ secundum tangentem, et ex velocitate ultimo genitâ per actionem vis 3 I T agentem tempore æquali illi quo describitur arcus P M, ita ut Luna sequatur diagonalem parallelogrammi cujus unum latus sit P M, alterum verò parallelum et æquale lineæ L M; cùm autem vis 3 I T exiguo temporis intervallo sensibiliter non mutetur, toto tempore quo describeretur lineola P M, ea vis pro uniformi adsumi potest, hinc via quæ describitur per velocitatem uniformiter crescentem ab eâ vi 3 I T genitam est dimidia ejus viæ quæ describeretur per ultimam velocitatem in fine temporis P M genitam, et uniformem manentem toto tempore P M, quod eâdem ratione



probari potest ac probatum fuit de gravitatis actione n. 30. Lib. I.

Quod si quis objiciat hinc fieri ut punctum L male repræsentet locum Lunæ, et locum ejus veriorem fore in medio inter M et L, respondemus solutionem hujus problematis ex eâ positione Lunæ neutiquam pendere, hæc enim solutio duabus constat partibus, priori statuitur ratio motus nodorum in quibusvis punctis P orbitæ lunaris, et hæc ratio eadem est sive ubique sumatur tota M L aut ubique ejus dimidium, dimidia enim sunt totis proportionalia; in secundâ solutionis parte determinatur quantitas motûs nodorum in syzygiis ipsis, respectu motûs Lunæ in suâ orbitâ, et in hâc determinatione nihil deducitur ex magnitudine lineæ L M, sed tota hæc solutionis pars pendet ex proportione ipsius vis 3 I T ad vim centripetam Lunæ, unde nullus error metuendus est in hoc calculo ex hâc falsâ suppositione Lunam in puncto L versari, cùm in medio inter L et M collocanda fuisset.

niam vis quâ dimidium lineolæ L M generatur, si tota simul et semel in loco P impressa esset, generaret lineam illam totam; et efficeret ut Luna moveretur in arcu, cujus chorda esset L P, atque ideo transferret Lunam de plano M P m T in planum L P l T; motus angularis nodorum a vi illâ genitus, æqualis erit angulo m T l. Est autem m l ad m P ut M L ad M P, ideóque cùm M P ob datum tempus data sit, est m l ut rectangulum M L × m P, id est, (i) ut rectangulum I T × m P. Et angulus m T l, (k) si modo angulus T m l rectus sit, est ut $\frac{m\,l}{T\,m}$, et propterea ut $\frac{I\,T \times P\,m}{T\,m}$, id est (ob proportionales T m et m P, T P et P H) ut $\frac{I\,T \times P\,H}{T\,P}$, ideóque ob datam T P, ut I T × P H. Quod si angulus T m l, seu S T N obliquus sit, (l) erit angulus m T l adhuc minor, in ratione sinus anguli S T N ad radium, seu A Z ad A T. Est igitur velocitas nodorum ut I T × P H × A Z, sive ut contentum sub sinubus trium angulorum T P I, P T N et S T N.



Si anguli illi, nodis in quadraturis et Lunâ in syzygiâ existentibus, recti sint, lineola m l abibit in infinitum, et angulus m T l evadet angulo

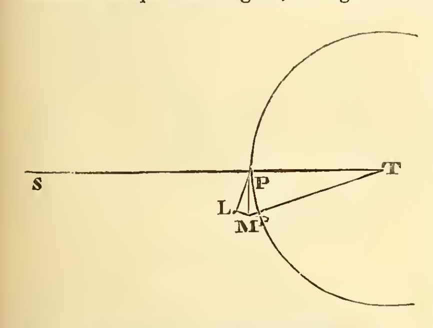
(i) * *Ut rectangulum I T × m P.* Linea M L est duplum viæ quæ dato tempore per actionem 3 I T percurritur, vis illa 3 I T dato illo tempore uniformis manere censetur, itaque in diversis punctis P, viæ eodem dato tempore per actiones 3 I T percursæ sunt ut illæ vires 3 I T, sive ut I T, ergo M L ejus viæ duplum est etiam ut I T, et M L × m P est ut I T × m P.

(k) * *Si modo angulus T m l sit rectus,* cùm angulus m T l sit admodum exiguus, si angulus T m l sit rectus, usurpari poterit recta m l pro arcu circuli cujus radius est T m ideóque (154. Lib. I.) angulus m T l, est ut $\frac{m\,l}{T\,m}$.

(l) * *Erit angulus m T l, in ratione sinus anguli S T N ad radium:* in triangulo T m l, est sinus anguli m T l ad sinum anguli T m l ut latus m l ad latus T l; sed propter exiguitatem lateris m l respectu lateris T l, ratio m l ad T l eadem semper manere censetur qualiscumque sit angulus T m l, manentibus lineis m l et T m; in angulo enim maximo linea T l evadit T m + m l, in minimo T m — m l, est verò m l quantitas evanescens respectu T m, hinc illius incrementi aut decrementi m l ratio nulla est habenda. Itaque manente quantitate m l qualiscumque sit angulus T m l, ratio m l ad T l eadem est, itaque etiam manet ratio sinus anguli m T l ad sinum anguli T m l, sive etiam, cùm anguli minimi sint ut eorum sinus, anguli m T l in variâ inclinatione lineæ datæ m l ad lineam datam T m sunt inter se ut sinus angulorum T m l, est ergo angulus m T l, in quâvis magnitudine anguli T m l ad eum angulum m T l quando angulus T m l est rectus ut sinus anguli T m (vel, ut sinus anguli I T n ipsi æqualis ob parallelas S T, m l) ad sinum anguli recti, hoc est ut sinus anguli S T N qui idem est cum sinu anguli S T n ad radium. Q. e. o.

m P l æqualis. Hoc autem in casu, angulus m P l est ad angulum P T M, quem Luna eodem tempore motu suo apparente circa Terram describit, ut 1 ad 59, 575. Nam angulus m P l æqualis est angulo L P M, id est, angulo deflexionis Lunæ a recto tramite, quem sola vis præfata solaris 3 I T, si tum cessaret Lunæ gravitas, dato illo tempore generare posset; (m) et angulus P T M æqualis est angulo deflexionis Lunæ a recto tramite, quem vis illa, quâ Luna in orbe suo retinetur, si tum cessaret vis solaris 3 I T, eodem tempore generaret. Et hæ vires, ut supra diximus, sunt ad invicem ut 1 ad 59, 575. (n) Ergo cùm motus medius horarius Lunæ respectu fixarum sit $32'. 56''. 27'''. 12\frac{1}{2}^{iv}$, motus horarius nodi in hoc casu erit $33''. 10'''. 33^{iv}. 12^{v}$. Aliis autem in casibus motus iste horarius erit ad $33''. 10'''. 33^{iv}. 12^{v}$. ut contentum sub sinubus angulorum trium T P I, P T N, et S T N (seu distantiarum Lunæ a quadraturâ, Lunæ a nodo, et nodi a Sole) ad cubum radii. (o) Et quo-

(m) * *Et angulus P T M æqualis est angulo deflexionis.* Angulus M P p est angulus deflexionis de quo nunc agitur, triangula verò



M P p, M P T sunt similia ob angulum communem P M T, et angulos rectos T P M et P p M, hinc anguli residui P T M, M P p sunt æquales.

(n) * *Ergo,* &c. Isti anguli deflexionis debent esse ut vires illas deflexiones producentes, in hoc enim casu, utraque vis agit perpendiculariter ad tangentem P M, hinc lineolæ M p, M L per eas vires genitæ tempore eodem, eo nempe quo percurretur tangentis portio P M, debent esse ut ipsæ illæ vires; eæ verò lineolæ sumpto P M pro radio sunt tangentes angulorum deflexionis p P M, M P L, et anguli quàm minimi sunt ut ipsorum tangentes, ergo anguli illi deflexionis sunt ut vires illas producentes, motus autem horarii Lunæ et nodorum sunt ipsi anguli P T M et m T l, qui sunt ex demonstratis æquales angulis deflexionum M P p, M P L, ergo motus horarii sunt ut vires illas deflexiones producentes. Q. e. o.

(o) * *Et quoties signum alicujus anguli de affirmativo,* &c. Angulos Q T P et N T P, positivos vocat Newtonus, quando punctum P est in consequentia respectu punctorum Q vel N ad quæ referuntur, hoc est angulus Q T P est positivus quoties arcus Q P, ab ultimâ quadraturâ Q numeratus in consequentia non excedit 180 gr. negativus verò cùm arcus Q P excedit 180 gr.; angulus N T P pariter est positivus cùm arcus N P a nodo ascendente in consequentia numeratus non excedit 180 gr. negativus verò est cùm is arcus N P excedit 180 gr. Quando enim arcus Q P, N P excedunt 180 gr. tunc anguli Q T P, N T P non amplius numerantur secundùm Lunæ directionem, seu secundùm viam quam Luna est emensa, sed secundùm viam quæ ipsi describenda superest ut ad puncta Q et N redeat, hinc illi anguli negativi dicuntur, eorum respectu qui secundùm viam a Lunâ descriptam mensurantur.

Angulus verò S T N positivus dicitur quando arcus A N a loco conjunctionis Lunæ cum Sole usque ad nodum contra ordinem signorum numeratus, est minor 180 gr., negativus verò dicitur cùm excedit 180 gr., quia, cùm nodi moveantur contra ordinem signorum sive in antecedentia, angulus S T N primo casu exprimit viam nodi a syzygia, secundo casu viam quam emetiri debet ut ad syzygiam redeat.

Probandum autem 1°. quod si tres illi anguli Q T P, N T P, S T N, sint positivi motus nodorum est regressivus: 2°. quod si unus eorum sit negativus, reliqui positivi, motus nodorum est progressivus. 3°. Quod si unus eorum sit positivus, duo negativi, motus nodorum est regressivus. 4°. Denique quod si omnes sint negativi, motus nodorum iterum sit progressivus, sic enim *quoties signum alicujus anguli de affirmativo in negativum, deque affirmativo in negativum mu-*

ties signum anguli alicujus de affirmativo in negativum, deque negativo in affirmativum mutatur, debebit motus regressivus in progressivum et progressivus in regressivum mutari. Unde fit ut nodi progrediantur quoties Luna inter quadraturam alterùtram et nodum quadraturæ proximum versatur. Aliis in casibus regrediuntur, et per excessum regressus supra progressum singulis mensibus feruntur in antecedentia.

tatur, debebit motus regressivus in progressivum et progressivus in regressivum mutari.

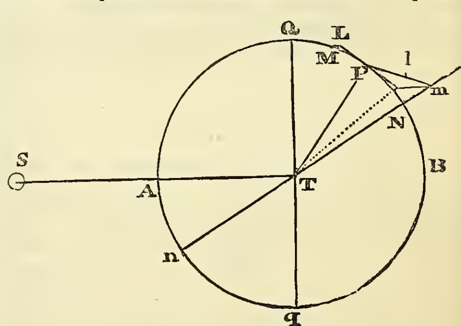
Art. 1. Si tres anguli sint positivi, nodorum motus erit regressivus.

In hoc casu, arcus A N contra ordinem signorum sumptus non excedit semi-circulum, ideóque punctum N erit in semi-circulo A Q B; præterea arcus Q P secundùm ordinem signorum sumptus, 180 gr. non excedit, erit itaque punctum P in semi-circulo Q A q; denique arcus N P semi-circulo major esse non debet, sed potest vel quadrante minor vel quadrante major, sit N P quadrante minor ut in figurâ textus, in quâ reliquæ hujus casus conditiones occurrunt, ex ipsâ hujusce proportionis constructione liquet quod ductâ M L quæ exprimit actionem Solis, productâ M P quæ lineæ nodorum occurrit in m, productâ L P quæ occurrit plano eclipticæ in l, ita ut m l sit parallela lineæ M L, cùm L sit versus Solem respectu puncti M et lineæ M P m, L P l sese decussent, punctum l erit remotius a Sole quàm punctum m, ideóque angulus A T l major erit quàm angulus A T m, ergo nodus promotus est contra ordinem signorum, hoc est, ejus motus est regressivus.

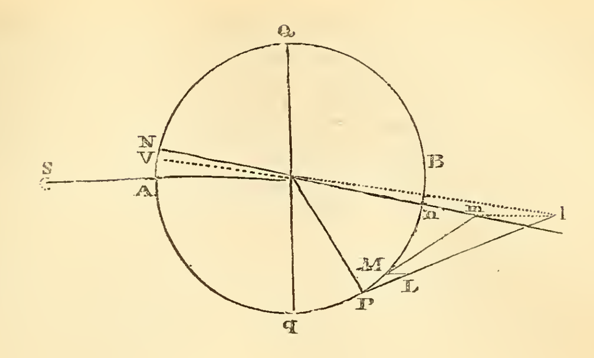
Sit N P quadrante major, tum lineæ P M, P L non amplius erunt retroproducendæ ut cum lineâ T N concurrant, sed antrorsum productæ concurrent cum ejus productione T n, et quoniam sese non decussant, manebit punctum l propius Soli quàm punctum m; et angulus A T l minor erit angulo A T m, ideóque productâ lineâ l T in V, angulus A T V complementum ad duos rectos anguli A T l, major erit angulo A T N complemento ad duos rectos anguli A T m, ergo nodus N promotus est contra ordinem signorum ut prius; ergo ubicumque sit punctum P si tres anguli Q T P, N T P, S T N sint positivi, motus nodi est regressivus.

Art. 2. Mutetur horum angulorum quivis ex positivo in negativum manentibus positivis angulis duobus reliquis, motus nodorum ex regressivo progressivus fiet.

Cas. 2. Fiat angulus Q T P negativus, hoc est, punctum P sit in semi-circulo Q B q, manente positivo angulo S T N ita ut N sit in semi-circulo A Q B, et pariter manente positivo angulo N T P; observandum quod lineola M L in semi-circulo Q B q positionem habet oppositam illi quam habebat in semi-circulo Q A q ut constat ex Prop. LXVI. Lib. I. ita ut punctum L sit a Sole remotius quàm punctum M; itaque si P N sit minor quadrante, lineæ L P retroproducendæ erunt, et punctum l erit propius Soli quàm punctum m; ideóque angulus A T l minor erit angulo A T m, ergo (cùm diminuatur angulus A T N qui sumitur contra ordinem signorum) nodus secundùm ordinem signorum est promotus, ejusque motus progressivus est.



Si verò N P sit major quadrante antrorsum productis lineis P M, P L punctum l manebit remotius a Sole quàm punctum m, ideóque

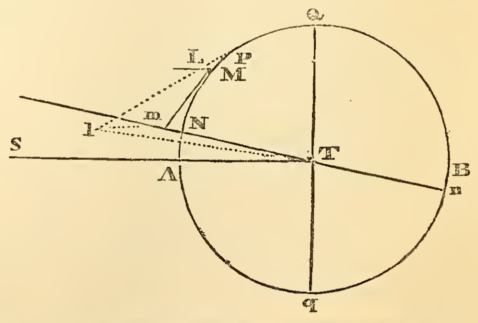


angulus A T l major erit angulo A T m, productâ itaque l T in V, angulus l T V anguli A T l complementum minor erit angulo A T N, nodus ergo ab N versus A in consequentia processerit, itaque motus nodi est ut prius progressivus.

Cas. 2. Sit angulus N T P negativus; hoc est sit punctum N in consequentia respectu puncti P, sit verò Q T P positivus, hoc est sit punctum P in semi-circulo Q A q et pariter sit S T N positivus, ita ut N sit in semicirculo A Q B, si N P (secundùm consequentia) sit minor tribus quadrantibus, P distabit a puncto n minus quadrante, ideóque retroproductis lineis M P, L P in m et l, cùm L sit Soli propius quàm M, erit l a Sole remotius quàm m, ideóque angulus A T l major erit angulo A T n, et angulus A T V prioris complementum minor erit angulo A T N qui est anguli A T m complementum; processit ergo nodus ab N versus A, motus ergo nodi est progressivus.

Si N P sit major tribus quadrantibus, P minus quadrante a puncto N distabit, cùmque N sit in consequentia respectu puncti P ut et puncta M et L antrorsum producendæ sunt lineæ P M, P L ut plano eclipticæ occurrant in m et l, et cùm L sit Soli vicinius quàm M, pariter l erit Soli vicinius quàm m, hinc angulus A T l minor erit angulo A T N, nodus ergo ab N versus A processit, et motus nodi est progressivus.

Cas. 3. Sit angulus S T N negativus positivo existentibus angulis Q T P, N T P. Sit N P minor quadrante, retroproducendæ sunt lineæ P M, P L ideóque l erit remotior a Sole quàm m, et angulus A T l major erit quàm A T m, vel A T N, cùm ergo N sit in consequentia respectu puncti A, quia angulus S T N est negativus, punctum l magis adhuc in consequentia processerit, motus ergo nodi erit progressivus. Sit N P major quadrante, antrorsum producendæ erunt lineæ P M, P L ut cum ecliptica concurrant, a parte nodi n, ideóque L erit propius Soli quàm m, et angulus A T l minor erit angulo A T n; ideóque angulus A T V major erit quàm A T N, ergo processit nodus ex N in V, secundùm consequentia.



Art. 3. Sint duo ex tribus angulis Q T P, N T P, S T N negativi, tertius positivus, motus nodorum ex progressivo regressivus fiet.

Casus 1. Sint Q T P et N T P negativi, solus S T N sit positivus, distet P a nodo N minus tribus quadrantibus, sive minus quadrante a puncto n, idque in consequentia, retroproducendæ erunt lineæ P M, P L, ut P M lineæ nodorum occurrat in m, et L P in l vicinius Soli, hinc A T l minor erit A T m et ideo A T V major quàm A T N, sed punctum N est in antecedentia respectu puncti A, ergo V est in antecedentia respectu puncti N, ergo nodus regreditur; distet P ab N plus tribus quadrantibus, antrorsum producendæ sunt lineæ P M, P L ut occurrant lineæ nodorum et l manebit a Sole remotius quàm m, et angulus A T l major erit angulo A T N, regreditur ergo nodus.

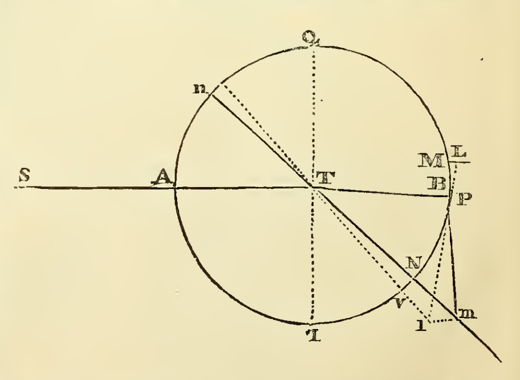
Cas. 2. Sint Q T P et S T N negativi, solus verò N T P positivus, sit N P minor quadrante, retroproductis lineis, cùm L sit remotius a Sole quàm M, erit l ob decussationem linearum propius Soli et angulus A T l sive A T V minor angulo A T N, sed quia hic angulus est negativus, complementa ad quatuor rectos erunt sumenda, et arcus A Q P V major erit arcu A Q P N, ergo nodus regreditur.

Sit N P major quadrante, lineis P M, P L productis occurrent eclipticæ a parte puncti n, et propter angulum Q T P negativum cùm P sit in semi-circulo q B Q erit l ut et L remotius a Sole quàm m et M, ideo angulus A T n minor est angulo A T l et complementum prioris anguli A T N major est angulo A T V, sed A est in antecedentia respectu puncti N, ergo etiam V est in antecedentia respectu puncti N, regreditur ergo nodus.

Cas. 3. Sint S T N et N T P negativi, Q T P verò positivus, punctum L est ubivis propius Soli quàm M, si P minus tribus quadrantibus distet ab N, retroproducendæ sunt lineæ P M, P L, a parte puncti n et erit A T l majus quàm A T n, sed quia S T N est negativus, n est in semi-circulo superiori A Q B, et n est in antecedentia respectu A, ideóque l est in antecedentia respectu n, ut etiam V respectu N, regreditur ergo nodus, sit N P tribus quadrantibus major, lineæ P M, P L antrorsum sunt producendæ, l erit propius Soli quàm m, et A T l sive A T V minor quâm A T N, sed quia A T N est negativus, ideóque A est in antecedentia respectu puncti N, erit etiam V in antecedentia respectu puncti N, regreditur ergo nodus.

Art. 4. Si tres anguli Q T P, N T P, S T N sint negativi, motus ex regressivo progressivus fiet; ut hypothesis hujus articuli obtineat, oportet ut nodus N et Luna P sit in quadrante q B; nam cùm angulus Q T P sit negativus, P debet esse in semi-circulo q B Q; cùm S T N sit negativus, N debet esse in semi-circulo A q B, et cùm N T P sit negativus, N debet esse in consequentia respectu P; ergo, N non potest versari in quadrante A q, nec P in quadrante B Q: antrorsum ergo erunt producendæ lineæ P M, P L ut eclipticæ occurrant, erit l remotius a Sole quàm m, et angulus A T V major angulo A T N, sed hic angulus est negativus, sive est N in consequentia respectu A, erit ergo etiam V in consequentia respectu puncti N, nodus itaque progreditur.

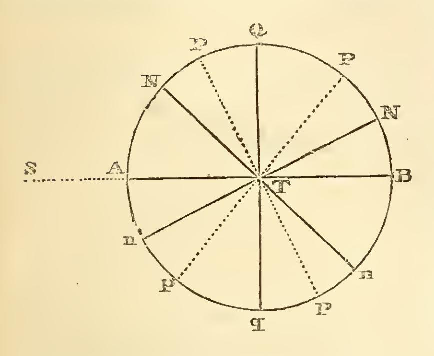
His positis dico, quod motus nodi progressivus evadit dum Luna versatur inter alterutrum nodum et quadraturam ipsi proximam; quadraturam nodo proximam vocat Newtonus, si



quadraturæ a nodo distantia quadrante major non sit.

Sit enim angulus A T N positivus, quoniam Luna sive punctum P est inter puncta Q et N vel q et n ex hypothesi, alteruter ex angulis Q T P, N T P erit positivus, alter negativus; nam sit N vel n in semi-circulo Q B q, tum quia P est inter Q vel q et N vel n, erit P in eodem semi-circulo Q B q, ideóque angulus Q T P erit negativus, sed angulus N T P erit positivus,

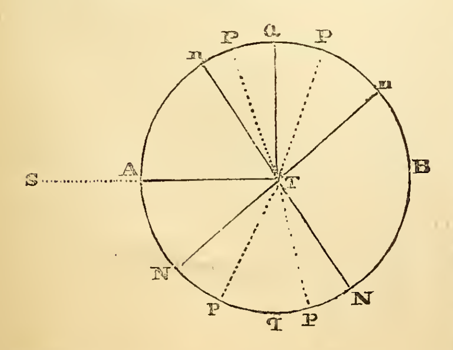
nam quia P est inter N et Q aut q et n, et Q est in consequentia respectu N, erit etiam P in consequentia respectu puncti N, et pariter dum n versatur in semi-circulo Q B q, n est in consequentia respectu puncti q et arcus N q in consequentia sumptus nec non arcus N P singuli minores erunt arcu N n sive minores semi-cir-



culo, ergo utroque casu angulus N T P erit positivus.

Manente A T N positivo sint N vel n in semi-circulo Q A q, tum quia P est inter Q et N aut n et q, erit etiam P in semi-circulo Q A q, ideóque angulus Q T P erit positivus, sed angulus N T P erit negativus, nam quia Q est in antecedentia respectu puncti N, P inter Q et N positum erit in antecedentia respectu N; et in casu quo P foret inter n et q quia q est in hac hypothesi in consequentia respectu n, P foret etiam in consequentia respectu n, ideóque plus semi-circulo a puncto N distaret, utroque ergo casu angulus N T P negativus foret.

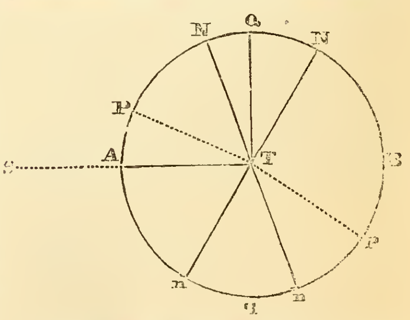
Sit angulus A T N negativus, sitque N in quadrante q A, vel n in quadrante A Q, et Lunâ P inter N et q vel n et Q, liquet angulum Q T P fore positivum, quia est P in semi-circulo Q A q; angulus autem N T P erit etiam positivus, nam sit N in quadrante q A, q est in con-



sequentia respectu N, ergo P quod est inter N et q est etiam in consequentia respectu N; sit n in quadrante A Q, cùm n sit in consequentia respectu Q, erit etiam in consequentia respectu P, hinc arcus N P in consequentia minor erit semi-circulo, utroque ergo casu angulus N T P est positivus.

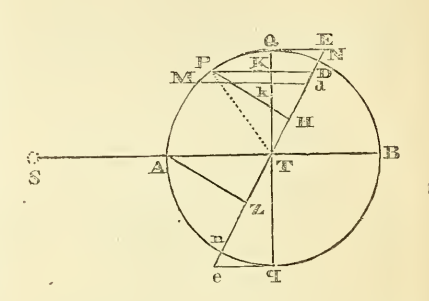
Itaque si angulus A T N sive S T N sit positivus, ubivis sit N in semi-circulo A Q B et si angulus S T N sit negativus, sed ita ut sit N in quadrante q A, quando Luna erit posita inter nodum utrumvis N vel n, et quadraturam proximam, unus e tribus angulis duntaxat erit negativus, duo reliqui erunt positivi, itaque per Articulum 2. motus nodi progressivus erit.

Existente verò angulo S T N negativo, et N in quadrante q B vel n in quadrante B Q, Luna verò posita inter utrumvis nodum et quadraturam proximam, reliqui duo anguli Q T P, N T P negativi erunt, liquet enim facilè punctum P in hâc hypothesi versari in semi-circulo q B Q ideóque angulum Q T P esse negativum; præterea quia q est in antecedentia respectu N ex hypothesi, P est etiam in antecedentia respectu N, et quia Q est in consequentia respectu n, erit etiam P in consequentia respectu n, ideóque punctum N plus semi-circulo a puncto P distabit, itaque sive sit P inter q et N, sive inter n et Q in semi-circulo q B Q, tres anguli erunt negativi, sed per Art. 4. eo casus motus nodi est progressivus; ergo in omni casu, si Luna sit inter nodum et quadraturam proximam, nodi progrediuntur.



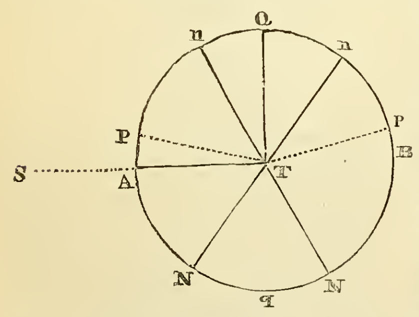
In omnibus aliis casibus motus nodi est regressivus; nam quando omnes anguli sunt positivi, vel quando duo anguli sunt negativi, et tertius positivus, motus nodi regressivus est per Art. 1. et 3., alterutrum autem evenire necesse est cùm P non est inter nodum et quadraturam proximam; hoc enim posito, sit, ut priùs, angulus S T N positivus, et N in quadrante Q T A, et P ubivis inter N et remotiorem quadraturam q, vel inter n et remotiorem quadraturam Q; si P sit inter N et q, angulus Q T P est positivus, siquidem P est in semi-circulo Q A q, et quia N est nunc inter P et Q, et N est in consequentia respectu Q, erit P in consequentia respectu N ergo angulus N T P est positivus; si P sit inter n et Q, angulus Q T P est negativus, sed et pariter angulus N T P, nam cùm P sit in consequentia respectu n, plus semi-circulo a puncto N distabit.

Corol. 1. Hinc si a dati arcûs quàm minimi P M terminis P et M ad lineam quadraturas jungentem Q q demittantur perpendicula P K, M k, eademque producantur donec secent lineam nodorum N n in D et d; erit motus horarius nodorum ut area M P D d et quadratum lineæ A Z conjunctim. Sunto enim P K, P H et A Z prædicti tres sinus. Nempe P K sinus distantiæ Lunæ a quadraturâ, P H sinus distantiæ Lunæ a nodo, et A Z sinus distantiæ nodi a Sole: et erit velocitas nodi ut contentum P K × P H × A Z. (p) Est autem P T ad P K ut P M ad K k, ideóque ob datas P T et P M est K k ipsi P K proportionalis. Est et A T ad P D ut A Z ad P H, et propterea P H rectangulo P D × A Z proportionalis, et conjunctis rationibus P K × P H est ut con-



Sit N ubivis in quadrante B T Q, et P inter Q et n vel inter q et N primo casu omnes angulos fore positivos, altero angulos Q T P et N T P fore negativos, ut in præcedenti, demonstrabitur.

Denique angulus S T N sit negativus, et P non sit inter quadraturam et nodum, sed alibi ubivis, alteruter ex angulis Q T P, N T P positivus erit, negativus alter; sit N in quadrante A T q et P in arcu Q A N (quadrante major) erit Q T P positivus et N T P negativus, siqui-



dem P est in antecedentia respectu N, sit P in arcu q B n erit Q T P negativus, sed N T P positivus, nam arcus N P in consequentia sumptus semi-circulo minor erit.

Sit N in quadrante q T B, si P sit in arcu n q, angulus Q T P positivus est, sed angulus N T P negativus, quia arcus N n + n P semi-circulo major est, si P sit in arcu N Q angulus Q T P est quidem negativus, sed quia P est in consequentia respectu N minusque semi-circulo distat, ergo angulus N T P est positivus; hinc ubivis sit P, si modo non sit inter nodum et quadraturam proximam, vel omnes anguli erunt positivi, vel duo simul negativi, alter verò positivus.

Cùm ergo arcus inter N vel n et quadraturam proximam, nunquam excedat quadrantem, eoque sit sæpe minor; e contra verò, arcus inter N vel n et quadraturam remotiorem nunquam sit minor quadrante et sæpe eo major, majori parte revolutionis Lunæ, nodi regrediuntur et per excessum regressus supra progressum, singulis mensibus nodi feruntur in antecedentia.

Potuissent Articuli 4. supra demonstrati, ex solâ vi signorum algebraicorum deduci, eamque demonstrationis speciem adhibere videtur Newtonus; at alicui negotium facessere potuissent horum signorum mutationes in angulis spectatæ, in quibus cùm angulus ad semi-circulum crevit et maximus sit, mox negativus evadit, quod sane non evenisset si viæ descriptæ, non verò anguli considerati fuissent; juvant algebraicæ illæ consequentiæ, in retegendis promptè Propositionibus iisque ad generalissimas expressiones revocandis, sed in nonnullis quæstionibus ad certitudinem plenam idearumque claritatem requiritur ut, per casuum enumerationem, illæ algebraicæ consequentiæ, velut ad Lapidem Lydium explorentur. Cæterum, quamvis figuras unicuique casui proprias non delineaverimus, facile erit ex iis quæ sculptæ sunt, figuras deficientes imaginari aut describere.

(p) * *Est autem P T ad P K ut P M ad K k* ex notissimâ circuli proprietate radium esse ad ordinatam, ut est fluxio arcûs ad fluxionem abscissæ.

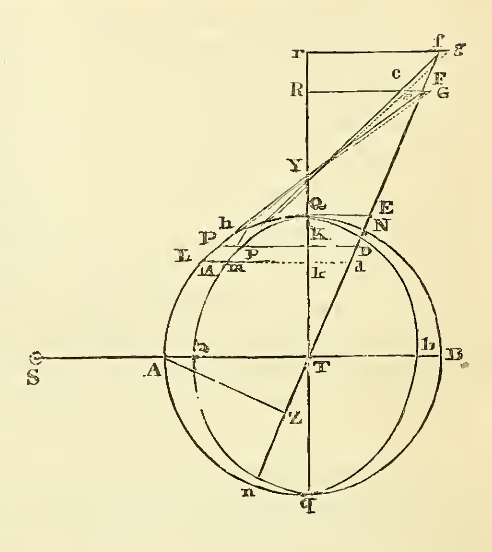
tentum K k × P D × A Z, et P K × P H × A Z ut K k × P D × A Z qu. id est, ut area P D d M et A Z qu. conjunctim. Q. e. d.

Corol. 2. In datâ quâvis nodorum positione, motus horarius mediocris est semissis motûs horarii in syzygiis Lunæ, ideóque est ad 16″. 35‴. 16^{iv}. 36^{v}. ut quadratum sinus distantiæ nodorum a syzygiis ad quadratum radii, sive ut A Z qu. ad A T qu. Nam si Luna uniformi cum motu perambulet semi-circulum Q A q, summa omnium arearum P D d M, quo tempore Luna pergit a Q ad M, erit area Q M d E quæ ad circuli tangentem Q E terminatur; et quo tempore Luna attingit punctum n summa illa erit area tota E Q A n quam linea P D describit, dein Lunâ pergente ab n ad q, linea P D cadet extra circulum, et aream n q e ad circuli tangentem q e terminatam describet; quæ, quoniam nodi prius regrediebantur, jam verò progrediuntur, subduci debet de areâ priore, et cùm æqualis sit areæ Q E N, relinquet semi-circulum N Q A n. Igitur summa omnium arearum P D d M, quo tempore Luna semi-circulum describit, est area semi-circuli; et summa omnium quo tempore Luna circulum describit, est area circuli totius. At area P D d M, ubi Luna versatur in syzygiis, est rectangulum sub arcu P M et radio P T; et summa omnium huic æqualium arearum, quo tempore Luna circulum describit, est rectangulum sub circumferentiâ totâ et radio circuli; et hoc rectangulum, cùm sit æquale duobus circulis, duplo majus est quàm rectangulum prius. Proinde nodi, eâ cum velocitate uniformiter continuatâ quam habent in syzygiis lunaribus, spatium duplo majus describerent quàm reverâ describunt; et propterea motus mediocris quocum, si uniformiter continuaretur, spatium a se inæquabili cum motu reverâ confectum describere possent, est semissis motûs quem habent in syzygiis Lunæ. Unde cùm motus horarius maximus, si nodi in quadraturis versantur, sit 33″. 10‴. 33^{iv}. 12^{v}, motus mediocris horarius in hoc casu erit 16″. 35‴. 16^{iv}. 36^{v}. (q) Et cùm motus horarius nodorum semper sit ut A Z qu. et area P D d M conjunctim, et propterea motus horarius nodorum in syzygiis Lunæ ut A Z qu. et area P D d M conjunctim, id est (ob datam aream P D d M in syzygiis descriptam) ut A Z qu. atque ideo hic motus, ubi nodi extra quadraturas versantur, erit ad 16″. 35‴. 16^{iv}. 36^{v}. ut A Z qu. ad A T qu. Q. e. d.

(q) * *Et cùm motus horarius nodorum sit,* &c. per Corollarium præcedentem.

PROPOSITIO XXXI. PROBLEMA XII.

Invenire motum horarium nodorum Lunæ in orbe elliptico. (r)



Designet Q p m a q ellipsin, axe majore Q q, minore a b descriptam, Q A q B circulum circumscriptum, T Terram in utriusque centro communi, S Solem, p Lunam in ellipsi motam, et p m arcum quem datâ temporis particulâ quam minimâ describit, N et n nodos lineâ N n junctos, p K et m k perpendicula in axem Q q demissa et hinc inde producta, donec occurrant circulo in P et M, et lineæ nodorum in D et d. (s) Et si Luna, radio ad Terram ducto, aream describat tempori proportionalem, erit motus horarius nodi in ellipsi ut area p D d m et A Z q conjunctim.

(r) * *In orbe elliptico*, illo nempe orbe in quem figura circularis orbitæ lunaris mutatur per actionem Solis, quique axem habet majorem ad axem minorem in ratione 70. ad 69. per Prop. XXVIII. hujusce.

(s) * *Et si Luna radio ad Terram ducto describat aream tempori proportionalem*, &c. Liquet ex Prop. XXVIII. Lunam hanc ellipsim de quâ agitur ita non describere ut areæ sint temporibus proportionales, sed hæc hypothesis ad solutionem hujus Problematis erit necessaria; ut scilicet Luna possit fingi versari in puncto p ordinatæ P K eodem tempore quo si circulum describeret in ejus extremitate P versata esset, quod tunc tantum obtineret si hæc ellipsis ita describatur ut areæ sint proportionales temporibus; notum enim est areas ellipticas T p Q proportionales fore areis T P Q, areas T P Q proportionales esse arcubus P Q, arcus verò P Q proportionales temporibus, si quidem Luna citra Solis actionem in circulo lata, uniformiter moveretur.

Verùm hæc falsa hypothesis corrigitur in eâ solutionis hujus Problematis parte quæ post Corollarium adjicitur.

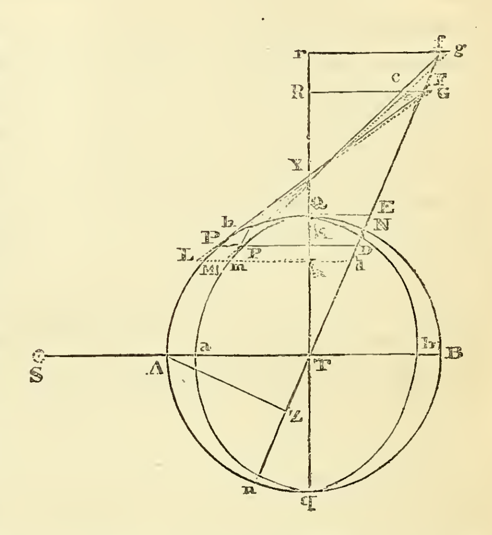
(t) * *Conveniant autem hæ tangentes in axe T Q ad Y.* Liquet ex not. 257. Lib. I. quod si duæ curvæ communem axem habentes, sint tales ut ipsarum ordinatæ datam inter se rationem servent, et in summo ordinatarum correspondentium ducantur tangentes, illæ tangentes in eodem axeos puncto concurrunt; nam cùm ordinatæ datam rationem servent (ex Hypoth.) oportet ut ipsarum fluxiones eamdem etiam servent rationem, ita ut ratio fluxionis ordinatæ ad ordinatam ipsam, eadem sit in utrâque curvâ. Est verò semper fluxio ordinatæ ad ordinatam ut fluxio abscissæ ad subtangentem; ergo in hâc hypothesi, ratio fluxionis abscissæ ad subtangentem est etiam eadem in utrâque curvâ, sed fluxio abscissæ ipsa est eadem pro utrâque curvâ, ergo etiam subtangens eadem est, hinc itaque tangentes in extremitatibus ordinatarum correspondentium ducta in eodem puncto axem attingunt quando utriusque curvæ ordinatæ ad eadem axeos puncta pertinentes, constantem rationem servant: notum autem est, ex not. 247. Lib. I. quod si circulus describatur super axem ellipseos, ordinatæ circuli et ellipseos erunt inter se in ratione datâ axeos communis circulo et ellipsi ad alterum axem, sive esse P K ad p K ut A T ad a T, hinc ergo tangentes in punctis P et p ductæ axi occurrent in eodem puncto Y.

Nam si P F tangat circulum in P, et producta occurrat T N in F et p f tangat ellipsin in p et producta occurrat eidem T N in f, (t) conveniant autem hæ tangentes in axe T Q ad Y; et si M L designet spatium quod Luna in circulo revolvens, interea dum describit arcum P M, urgente et impellente vi prædictâ 3 I T, seu 3 P K motu transverso describere posset, et m l designet spatium quod Luna in ellipsi revolvens eodem tempore, urgente etiam vi 3 I T seu 3 p K, describere posset, et producantur L P et l p donec occurrant plano eclipticæ in G et g; et jungantur F G et f g, quarum F G producta secet p f, p g et T Q in c, e et R respectivè, et f g producta secet T Q in r. Quoniam vis 3 I T seu 3 P K in circulo est ad vim 3 I T seu 3 p K in ellipsi, ut P K ad p K, seu A T ad a T; erit spatium M L vi priore genitum, ad spatium m l vi posteriore genitum, ut P K ad p K, id est, ob similes figuras P Y K p et F Y R c, ut F R ad c R. Est autem M L ad F G (ob similia triangula P L M, P G F) ut P L ad P G, hoc est (ob parallelas L k, P K, G L) ut p l ad p e, id est (ob similia triangula p l m, c p e) ut l m ad c e; et inversè ut L M est ad l m, seu F R ad c R, ita est F G ad c e. Et propterea si f g esset ad c e ut f Y ad c Y, id est, ut f r ad c R (hoc est, ut f r ad F R et F R ad c R conjunctim, id est, ut f T ad F T et F G ad c e conjunctim) quoniam ratio F G ad c e utrinque ablata relinquit rationes f g ad F G et f T ad F T, foret f g ad F G ut f T ad F T; (u) atque ideo anguli, quos F G et f g subtenderent ad Terram T, æquarentur inter se. Sed anguli illi (per ea quæ in præcedente Propositione exposuimus) sunt motus nodorum; quo tempore Luna in circulo arcum P M, in ellipsi arcum p m percurrit: et propterea motus nodorum in circulo et ellipsi æquarentur inter se. Hæc ita se haberent, si modò f g esset ad c e ut f Y ad c Y, id est, si f g æqualis esset $\frac{c\,e \times f\,Y}{c\,Y}$. Verùm ob similia triangula f g p, c e p, est f g ad c e ut f p ad c p; ideóque f g æqualis est $\frac{c\,e \times f\,p}{c\,p}$; (x) et propterea angulus, quem f g reverâ subtendit, est ad angulum priorem quem F G subtendit, hoc est, motus nodorum

(u) * *Atque ideo anguli quos F G et f g subtenderent ad Terram T æquarentur inter se*, nam cùm lineæ F G et f g sint inter se parallelæ et proportionales lineis T F, T f, recta T G producta transibit etiam per g, ideóque per eundem angulum videbuntur lineæ F G et f g ex Terrâ T.

(x) * *Et propterea angulus quem f g reverâ subtendit est ad angulum priorem ut hæc f g ad priorem f g.* Cùm enim linea f g sit minima, respectu lineæ T g linea T g eadem manere censenda est in utrâque magnitudine lineæ f g hic assumptâ; sed in triangulo utroque T f g. Sinus anguli f est ad lineam T g, ut sinus anguli f T g ad lineam f g; ergo cùm maneat angulus f, et linea T g, ratio sinus anguli f T g ad lineam f g erit data, sive quia anguli minimi sunt ut sui sinus, erit angulus quem f g reverâ subtendit ad angulum quem ficta f g subtendebat, ut vera f g ad fictam f g.

in ellipsi ad motum nodorum in circulo, ut hæc f g seu $\frac{c\,e \times f\,p}{c\,p}$ ad priorem f g seu $\frac{c\,e \times f\,Y}{c\,Y}$, id est, ut f p × c Y ad f Y × c p, seu f p ad f Y et c Y ad c p, hoc est, si p h ipsi T N parallela occurrat F P in h, ut F h ad F Y et F Y ad F P; hoc est, ut F h ad F P seu D p ad D P, (y) ideóque ut area D p m d ad aream D P M d. Et propterea, cùm (per Corol. 1. Prop. XXX.) area posterior et A Z q conjunctim proportionalia sint motui horario nodorum in circulo, erunt area prior et A Z q conjunctim proportionalia motui horario nodorum in ellipsi. Q. e. d.



Corol. Quare cùm, in datâ nodorum positione, summa omnium arearum p D d m, quo tempore Luna pergit a quadratura ad locum quemvis m, sit area m p Q E d, quæ ad ellipseos tangentem Q E terminatur; et summa omnium arearum illarum, in revolutione integrâ, sit area ellipseos totius: motus mediocris nodorum in ellipsi erit ad motum mediocrem nodorum in circulo, ut ellipsis ad circulum; id est, ut T a ad T A, seu 69 ad 70. Et propterea, cùm (per Corol. 2. Prop. XXX.) motus mediocris horarius nodorum in circulo sit ad 16″. 53‴. 16^{iv}. 36^{v}. ut A Z qu. ad A T qu. si capiatur angulus 16″. 21‴. 3^{iv}. 30^{v}. ad angulum 16″. 35‴. 16^{iv}. 36^{v}. ut 69 ad 70, erit motus mediocris horarius nodorum in ellipsi ad 16″. 21‴. 3^{iv}. 30^{v}. ut A Z q ad A T q; hoc est, ut quadratum sinus distantiæ nodi a Sole ad quadratum radii.

(z) Cæterum Luna, radio ad Terram ducto, aream velocius describit in syzygiis quàm in quadraturis, et eo nomine tempus in syzygiis contrahitur, in quadraturis producitur; et unà cum tempore motus nodorum

(y) * *Ideóque ut area D p m d ad aream D P M d* nempe propter communem altitudinem K k, nam trapezia p D d l, P D d L, pro parallelogrammis assumi possunt, quæ sunt ut bases D p, D P, et altitudines K k conjunctim.

(z) * *Cæterum Luna*, &c. Hæc omnia ex Prop. XXVI. hujusce deducuntur.

augetur ac diminuitur. Erat autem momentum areæ in quadraturis Lunæ ad ejus momentum in syzygiis ut 10973 ad 11073, et propterea momentum mediocre in octantibus est ad excessum in syzygiis, defectumque in quadraturis, ut numerorum semi-summa 11023 ad eorundem semi-differentiam 50. Unde cùm tempus Lunæ in singulis orbis particulis æqualibus sit reciprocè ut ipsius velocitas, erit tempus mediocre in octantibus ad excessum temporis in quadraturis, ac defectum in syzygiis, ab hâc causâ oriundum, ut 11023 ad 50 quam proximè. ([a]) Pergendo autem a quadraturis ad syzygias, invenio quod excessus momentorum areæ in locis singulis, supra momentum minimum in quadraturis, sit ut quadratum sinûs distantiæ Lunæ a quadraturis quam proximè; et propterea differentia inter momentum in loco quocunque et momentum mediocre in octantibus, est ut differentia inter quadratum sinûs distantiæ Lunæ a quadraturis et quadratum sinus graduum 45, seu semissem quadrati radii, et incrementum temporis in locis singulis inter octantes et quadraturas, et decrementum ejus inter octantes et syzygias, est in eâdem ratione. Motus autem nodorum, quo tempore Luna percurrit singulas orbis particulas æquales, acceleratur vel retardatur in duplicatâ ratione temporis. ([b]) Est enim motus iste, dum Luna percurrit P M (cæteris paribus) ut M L, et M L est in duplicatâ ratione temporis. ([c]) Quare motus nodorum in syzygiis, eo tempore confectus quo Luna datas orbis particulas percurrit, diminuitur in duplicatâ ratione numeri 11073 ad numerum 11023; ([d]) estque decrementum ad motum reliquum ut 100 ad 10973, ad motum verò totum ut

([a]) * *Pergendo autem a quadraturis.* Vide not. ([r]) Prop. XXVI. et locum ad quem refertur.

([b]) * *Est enim motus iste (cæteris paribus) ut M L, et M L est in duplicatâ ratione temporis.* motus nodorum generatur per actionem vis solaris 3 I T quæ uniformis manere censetur dum describitur arcus P M, hinc crescit L M in duplicatâ ratione temporis Lem. X. Lib. I., expressit autem Newtonus motum nodorum fingendo in puncto ipso P, a Sole simul et semel eam actionem imprimi quæ toto tempore quo arcus P M describitur ab ipso exercita fuisset, et lineam L M esse spatium quod velocitate ita productâ ipso eo tempore quo arcus P M percurritur, describeretur, hinc itaque constat eam lineam fore in duplicatâ ratione temporis, (vid. not. 28. et 30. Lib. I.) hæc autem linea L M est proportionalis vero effectui actionis Solis (vid. not. ([h]) Prop. XXX. hujusce).

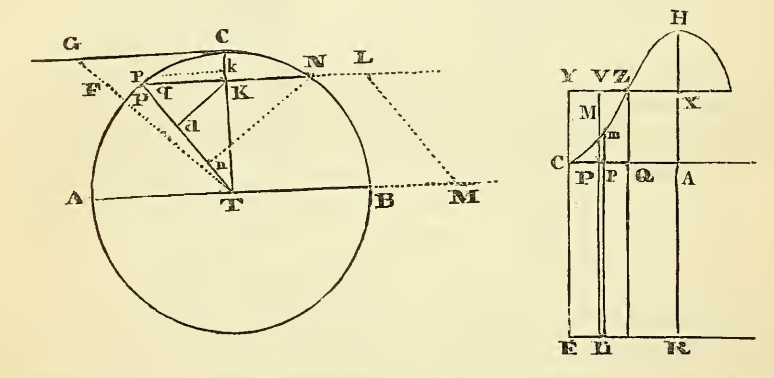
([c]) * *Quare motus nodorum.* Momentum areæ in syzygiis sive velocitas Lunæ in syzygiis est ad velocitatem mediocrem in octantibus ut 11073 ad 11023 ergo tempus quo Luna æquales arcus P M describet in syzygiis, est ad tempus quo eos arcus P M describere censebatur velocitate mediocri ut 11023 ad 11073, motus ergo nodorum in syzygiis fit minor quàm adsumptus fuerat in ratione duplicatâ numerorum 11023 et 11073.

([d]) * *Estque decrementum ad motum reliquum ut* 100 *ad* 10973, *ad modum totum ut* 100 *ad* 11073. Motus reliquus est ad motum totum ut $\overline{11023}^2$ ad $\overline{11073}^2$ sive ut $\overline{11073-50}^2$ ad $\overline{11073}^2$; sive priorem quantitatem ad quadratum evehendo secundum formulam vulgarem dignitatum ut $\overline{11073}^2 - 2 \times 50 \times 11073 + \overline{50}^2$ ad $\overline{11073}^2$ negligatur terminus $\overline{50}^2$, cæterorum enim respectu evanescit, fiet motus reliquus ad totum ut $\overline{11073}^2 - 2 \times 50 \times 11073$ ad $\overline{11073}^2$, et dividendo per 11073, ut $11073 - 2 \times 50$ ad 11073.

Est ergo differentia motûs reliqui et motus totius h. e. motûs decrementum ad motum totum, ut 2×50 sive 100 ad 11073, ideóque etiam est motûs decrementum ad motum reliquum ut 100 ad 10973.

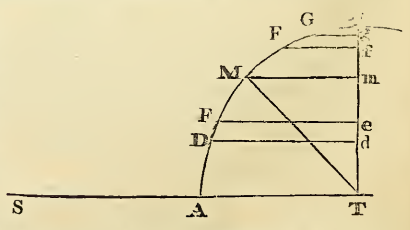
100 ad 11073 quam proximè. (e) Decrementum autem in locis inter octantes et syzygias, et incrementum in locis inter octantes et quadraturas, est quam proximè ad hoc decrementum, ut motus totus in locis illis ad motum totum in syzygiis, et differentia inter quadratum sinûs distantiæ Lunæ a quadraturâ et semissem quadrati radii ad semissem quadrati radii conjunctim. (f) Unde si nodi in quadraturis versentur, et capiantur loca

(e) * *Decrementum inter octantes et syzygias et incrementum inter octantes et quadraturas est quam proximè*, &c. Resumptis iis quæ in Prop. XXVI. not. 112. sunt dicta, designet C P distantiam Lunæ a quadraturâ, linea I M exprimet



ejus velocitatem et I V exprimet velocitatem mediocrem, idcircò tempus quo describitur arcus P M hâc velocitate I M, est ad tempus quo velocitate mediocri I V describeretur, ut I V ad I M, ideóque motus nodorum verus foret ad eorum motum si Luna mediocri suâ velocitate ferretur ut $\overline{IV}^2$ ad $\overline{IM}^2$ sive ut IV^2 ad $\overline{IV \pm VM}|^2$ aut ut IV^2 ad $IV^2 \pm 2IV \times VM + VM^2$ et neglectâ quantitate $\overline{VM}^2$ divisisque terminis per I V ut I V ad $IV \pm 2VM$; et convertendo, differentia motûs veri nodorum et motûs inventi, est ad motum inventum ut $\pm 2VM$ ad $IV \pm 2VM$, hinc illa differentia, sive incrementum aut decrementum motûs nodorum est semper æquale motui nodorum qualis inventus fuerat, ducto in 2 V M et diviso per $IV \pm 2VM$, ideóque cùm $IV \pm 2VM$ pro constanti assumi possit quia 2 V M ferè evanescit respectu quantitatis I V, est illud incrementum aut decrementum ut motus nodorum qualis inventus fuerat et V M conjunctim; est verò V M differentia inter Z Q et P M, et sunt Z Q et M P ut quadrata sinuum arcuum C Q et C P, arcus verò C Q est 45 gr. ex demonstratis ad Prop. XXVI. et quadratum ejus sinus est semissis quadrati radii; C P verò est distantia Lunæ a quadraturâ; ergo, incrementum aut decrementum motus nodorum est ut motus nodorum qualis inventus fuerat, et differentia inter quadratum sinûs distantiæ Lunæ a quadraturâ et semissem quadrati radii conjunctim: in syzygiis quadratum sinus distantiæ Lunæ a quadratura est ipsum quadratum radii, unde differentia quadrati sinus distantiæ Lunæ a quadraturâ et semissis quadrati radii, est in hoc casu ipse semissis quadrati radii, hinc erit decrementum aut incrementum motus nodorum in loco quovis ad decrementum ejus motus in syzygiis ut sunt motus nodorum iis in locis ad motum nodorum in syzygiis (quales citra hanc correctionem inventi fuerant,) et ut differentiæ quadratorum sinuum distantiæ Lunæ a quadraturâ et semissis quadrati radii ad eum semissem quadrati radii conjunctim. Q. e. o.

(f) * *Unde si nodi*, &c. Versentur nodi in quadraturis, capiantur loca F et E ab octante



M hinc inde æqualiter distantia, et alia duo D et G a syzygiâ A et quadraturâ N distantia

duo æqualiter ab octante hinc inde distantia, et alia duo a syzygiâ et quadraturâ iisdem intervallis distantia, deque decrementis motuum in locis duobus inter syzygiam et octantem, subducantur incrementa motuum in locis reliquis duobus, quæ sunt inter octantem et quadraturam; decrementum reliquum æquale erit decremento in syzygiâ: uti rationem ineunti facilè constabit. (g) Proindeque decrementum mediocre, quod de nodorum motu mediocri subduci debet, est pars quarta decrementi in syzygia.

intervallis D A, G N quæ æqualia sint inter se, et eadem ac intervalla M E, M F, sumantur decrementa motûs nodorum in punctis E et D et ex summâ eorum decrementorum subducatur summa incrementorum in punctis G et F, et residuum erit ipsum decrementum in syzygia A.

Etenim, per præcedentia, decrementa sive incrementa sunt ut motus totus nodorum et differentia quadrati sinus distantiæ Lunæ a quadraturâ et semissis radii conjunctim; est verò motus totus nodorum ut contentum sub sinubus distantiarum Lunæ a quadraturâ, Lunæ a nodo, et nodi a Sole (per Prop. XXX.) sinus autem distantiæ nodi a Sole in hoc casu est ipse radius, estque constans pro omnibus incrementis decrementisque assumendis, distantia verò Lunæ a nodo eadem est ac distantia Lunæ a quadraturâ, cùm nodi sint in quadraturis; ergo motus totus nodorum est ut quadratum sinus distantiæ Lunæ a quadraturâ, et decrementa sive incrementa sunt ut contentum sub quadrato sinus distantiæ Lunæ a quadraturâ et sub differentiâ ejusdem quadrati et semissis radii.

Dicatur itaque radius r, sinus arcus N G dicatur s. erit incrementum motus nodorum in G ut $ss \times \overline{\frac{1}{2}rr - ss}$ sive $\frac{1}{2}r^2s^2 - s^4$.

Ut obtineatur incrementum motus nodorum in F, observandum, quod siquidem arcus F M est æqualis arcui N G cujus sinus est s, et N F + F M est æqualis octanti cujus sinus est $r\sqrt{\frac{1}{2}}$ et per principia trigonometrica, sinus arcus qui est differentia duorum arcuum quorum sinus sunt dati, est æqualis differentiæ factorum sinûs majoris arcus per cosinum minoris et sinus minoris arcus per cosinum majoris, divisæ per radium, hinc sinus arcus F N est æqualis $\frac{r\sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{rr - ss} - sr\sqrt{\frac{1}{2}}}{r} = \sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{rr - ss} - s\sqrt{\frac{1}{2}}$, itaque incrementum nodorum in F erit $\frac{1}{2} \times \overline{rr - ss} - s\sqrt{rr - ss} + \frac{ss}{2} \times \frac{1}{2}rr - \frac{1}{2}\overline{rr - ss} + s\sqrt{rr - ss} - \frac{ss}{2}$ sive deletis terminis æqualibus et oppositis $\frac{1}{2}rr - s\sqrt{rr - ss} \times s\sqrt{rr - ss}$, et multiplicatione factâ $\frac{1}{2}r^2s\sqrt{rr - ss} - r^2s^2 + s^4$. Ideóque summa incrementorum in G et F est $\frac{1}{2}r^2s\sqrt{rr - ss} - \frac{1}{2}r^2s^2$.

Sinus autem in E et D sunt cosinus arcuum F et G, ergo quadratum sinus arcus N E est $rr - \frac{1}{2} \times \overline{rr - ss + s\sqrt{rr - ss}} - \frac{1}{2}ss = \frac{1}{2}rr + s\sqrt{rr - ss}$; ideóque decrementum motus nodorum in E est $\frac{1}{2}rr + s \times \sqrt{rr - ss} \times (\frac{1}{2}rr + s\sqrt{rr - ss}) - \frac{1}{2}rr = \frac{1}{2}r^2s\sqrt{rr - ss} + r^2ss - s^4$.

Quadratum sinus arcus N D est $rr - ss$, ideóque decrementum motus nodorum in D est $\overline{rr - ss} \times \overline{rr - ss - \frac{1}{2}rr} = \frac{1}{2}r^4 - \frac{3}{2}r^2s^2 + s^4$; sicque summa decrementorum est $\frac{1}{2}r^4 + \frac{1}{2}r^2s\sqrt{rr - ss} - \frac{1}{2}r^2s^2$.

Denique in ipsâ syzygiâ quadratum sinus arcus N D est rr ideóque decrementum motus nodorum in syzygia est $r^2 \times \overline{r^2 - \frac{1}{2}r^2} = \frac{1}{2}r^4$.

Si ergo ex summâ decrementorum quæ inventa est $\frac{1}{2}r^4 + \frac{1}{2}r^2s\sqrt{rr - ss} - \frac{1}{2}r^2s^2$ detrahatur summa incrementorum quæ inventa est $\frac{1}{2}r^2s\sqrt{rr - ss} - \frac{1}{2}r^2s^2$ decrementorum residuum est ipsum $\frac{1}{2}r^4$ quod decrementum motus nodorum in syzygia exprimet. Q. e. d.

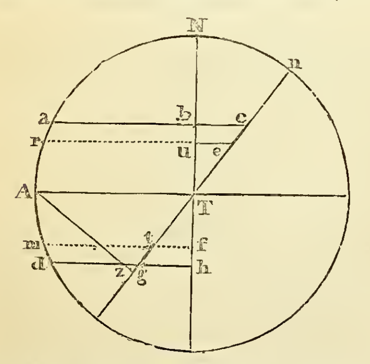
(g) * *Proindeque decrementum mediocre,* &c. In toto arcu N A, puncta assumantur quàm proxima quotquot lubebit, quæ quaternatim sumantur, ita ut quatuor quæ simul assumuntur ita disponantur ut duo ab octante æqualiter distent hinc inde, et alia duo tantumdem a syzygiâ et quadraturâ distent; decrementum motus nodorum in duobus punctis quæ sunt inter syzygiam et octantem superat incrementum ejus motus in aliis duobus punctis quantitate æquali decremento in ipsâ syzygiâ; si itaque motus mediocris assumendus sit, id decrementum quadrifariam dividi debet, et de motu mediocri singula quarta pars detrahi debet, sic enim motus mediocris ille æquipollebit motui vero peracto in illis quatuor punctis simul sumptis; ille decrementi excessûs idem est pro quibusvis punctis ita quaternatim sumptis, itaque motus mediocris nodorum in omnibus punctis, adjectâ consideratione inæqualitatis motus Lunæ ex actione Solis ortæ, erit motus mediocris nodorum prius inventus, multatus quartâ parte illius decrementi.

Cùm ergo ille excessus decrementorum super incrementa sit ipsum decrementum motus in syzygiâ seorsim consideratâ, et id decrementum in syzygiâ seorsim inventum sit, *decrementum mediocre, quod de nodorum motu mediocri subduci debet, est pars quarta decrementi in syzygiâ.*

Motus totus horarius nodorum in syzygiis, ubi Luna radio ad Terram ducto aream tempori proportionalem describere supponebatur, erat 32″. 42‴. 7^{iv}. Et decrementum motûs nodorum, quo tempore Luna jam velocior describit idem spatium, diximus esse ad hunc motum ut 100 ad 11073; ideóque decrementum illud est 17‴. 43^{iv}. 11^{v}. cujus pars quarta 4‴. 25^{iv}. 48^{v}. motui horario mediocri superius invento 16″. 21‴. 3^{iv}. 30^{v}. subducta, relinquit 16″. 16‴. 37^{iv}. 42^{v}. motum mediocrem horarium correctum.

(h) Si nodi versantur extra quadraturas, et spectentur loca bina a syzygiis hinc inde æqualiter distantia, summa motuum nodorum, ubi Luna versatur in his locis, erit ad summam motuum, ubi Luna in iisdem locis et nodi in quadraturis versantur, ut A Z qu. ad A T qu. (i) Et decrementa motuum, a causis jam expositis oriunda, erunt ad invicem ut ipsi motus, ideóque motus reliqui erunt ad invicem ut A Z qu. ad A T qu. et motus mediocres ut motus reliqui. Est itaque motus mediocris horarius

(h) * *Si nodi versantur extra quadraturas* putà in locis n *et spectentur loca bina a et d a syzygiâ A hinc inde distantia,* erit motus nodorum in loco a ut elementum a c e r et quadratum lineæ A Z conjunctim (Cor. 1. Prop. XXX.); similiter motus nodorum in loco d erit ut elementum m t g d et quadratum lineæ A Z conjunctim; si verò nodi versentur in quadraturis, erit (ibid.)



summa motuum in binis locis a et d ut a b u r + m f h d vel 2 a b r u et quadratum radii A T conjunctim; sed ob æqualia intervalla T b, T h summa arearum a c e r + m t g d = 2 a b r u. Quare summa motuum nodorum ubi Luna versatur in locis a, d nodis existentibus extra quadraturas, erit ad summam motuum ubi Luna in iisdem locis et nodi in quadraturis versantur ut 2 a b r u × A Z ² ad 2 a b r u × A T ² hoc est ut A Z ² ad A T ².

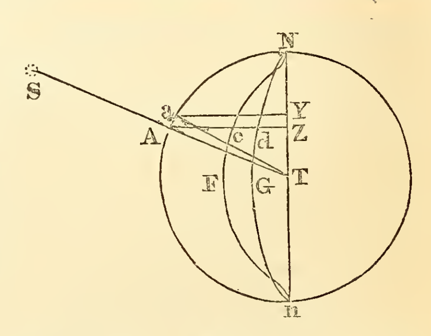
(i) * *Et decrementa motuum* in loco a quando nodi sunt extra quadraturas, et quando nodi sunt in quadraturis, sunt ut ipsi motus; nam cùm arcus a r in utroque casu æquali tempore percurratur, differentia ejus temporis a tempore mediocri utrinque eadem erit; ac per consequens error nodi, a loco in quo eo tempore mediocri procedere debuisset, est ut ejus motus horarius in eo loco; ergo decrementum motûs nodi in a ubi nodi sunt in quadraturis est ad decrementum motûs in a cùm nodi extra quadraturas versantur, ut a b u r × A T ² ad a c e r × A Z ², et pariter decrementum motûs nodi in d ubi nodi sunt in quadraturis, est ad decrementum motûs in d cùm nodi sunt extra quadraturas, ut m f h d × A T ² ad m t g d × A Z ², decrementa autem motûs in a et d æqualia sunt quando nodi sunt in quadraturis, ob æquales distantias a syzygiâ, et m f h d = a b u r; hinc decrementum motûs in a cùm nodi extra quadraturas versantur, est ad a c e r × A Z ² ut decrementum motûs in d cùm nodi extra quadraturas versantur, est ad m t g d × A Z ², et etiam ut decrementum in a, aut d cùm nodi sunt in quadraturis ad a b u r × A T ²; ergo summa decrementorum in a et d cùm nodi sunt extra quadraturas, est ad (a c e r + m t g d) × A Z ² ut summa decrementorum in a et d cùm nodi sunt in quadraturis ad 2 a b u r × A T ², sed a c e r + m t g d = 2 a b u r per notam præcedentem, ergo, summa decrementorum in binis locis a syzygiis hinc inde æqualiter distantibus, cùm nodi sunt extra quadraturas, est ad summam decrementorum in iisdem locis cùm nodi sunt in syzygiis, ut A Z ² ad A T ², cùm ergo summæ motuum ipsorum in eâ sint ratione, reliqui motus erunt in eâ ipsâ ratione, ideóque et motus mediocres; *est itaque,* &c.

correctus, in dato quocunque nodorum situ, ad 16″. 16‴. 37^{iv}. 42^{v}. ut A Z qu. ad A T qu.; id est, ut quadratum sinûs distantiæ nodorum a syzygiis ad quadratum radii.

PROPOSITIO XXXII. PROBLEMA XIII.

Invenire motum medium nodorum Lunæ.

Motus medius annuus est summa motuum omnium horariorum mediocrium in anno. Concipe nodum versari in N, et singulis horis completis retrahi in locum suum priorem, ut non obstante motu suo proprio, datum semper servet situm ad stellas fixas. Interea verò Solem S, per motum Terræ, progredi a nodo, et cursum annuum apparentem uniformiter complere. Sit autem A a arcus datus quàm minimus, quem recta T S ad Solem semper ducta, intersectione sui et circuli N A n, dato tempore quàm minimo describit: et motus horarius mediocris (per jam ostensa) erit ut A Z q, id est (ob (l) proportionales A Z, Z Y) ut rectangulum sub A Z et Z Y, hoc est, ut area A Z Y a. Et summa omnium horariorum motuum mediocrium ab initio, ut summa omnium arearum a Y Z A, id est, ut area N A Z. (m) Est autem maxima A Z Y a æqualis rectangulo sub arcu A a et radio circuli; et propterea summa omnium rectangulorum in circulo toto ad summam totidem maximorum, ut area circuli totius ad rectangulum sub circumferentiâ totâ et radio, id est, ut 1 ad 2. Motus autem horarius, rectangulo maximo respondens, (n) erat 16″. 16‴. 37^{iv}. 42^{v}. Et hic motus, anno toto sidereo dierum 365. hor. 6. min. 9. fit 39^{gr}. 38′. 7″. 50‴. Ideóque hujus dimidium 19^{gr}. 49′. 3″. 55‴. est motus medius nodorum, circulo toti respondens. Et motus



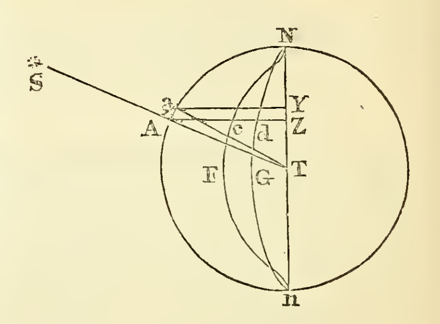
(l) * *Ob proportionales A Z, Z Y*, est enim T A : A a : : A Z : Z Y, ideóque ob constantes T A et A a, quantitates A Z, Z Y ubique eamdem habent inter se rationem; ducatur utraque in A Z facta A Z × A Z, et Z Y × A Z datam rationem ubique habebunt, erit itaque *A Z q ut rectangulum sub A Z et Z Y.*

(m) * *Est autem maxima A Z Y a*, &c. Nam quando T A est perpendicularis in N n, A Z evadit T A, et Z Y evadit æqualis A a, sicque A Z Y = A T × A a, in omnibus autem aliis punctis T A est major quàm A Z; et A a major quàm Z Y, maxima itaque A Z Y a est *æqualis rectangulo sub arcu A a et radio circuli.*

(n) * *Erat* 16″. 16‴. 37^{iv}. 42^{v}.; is enim erat motus horarius mediocris cùm nodi erant in quadraturis, per Prop. præced. ideóque in hâc Prop. cùm S A T est perpendicularis in N n.

nodorum, quo tempore Sol pergit ab N ad A est ad 19^{gr}. 49′. 3″. 55‴. ut area N A Z ad circulum totum.

Hæc ita se habent ex hypothesi, quod nodus horis singulis in locum priorem retrahitur, sic ut Sol anno toto completo ad nodum eundem redeat a quo sub initio digressus fuerat. Verùm per motum nodi fit ut Sol citius ad nodum revertatur, et computanda jam est abbreviatio temporis. (°) Cùm Sol anno toto conficiat 360 gradus, et nodus motu maximo eodem tempore conficeret 39^{gr}. 38′. 7″. 50‴, seu 39,6355 gradus; et motus mediocris nodi in loco quovis N sit ad ipsius motum mediocrem in quadraturis suis, ut A Z q ad A T q: erit motus Solis ad motum nodi in N, ut 360 A T q ad 39,6355 A Z q; id est, ut 9,0827646 A T q ad A Z q. Unde si circuli totius circumferentia N A n dividatur in particulas æquales A a, tempus quo Sol percurrat particulam A a, si circulus quiesceret, erit ad tempus quo percurrit eandem particulam, si circulus unâ cum nodis circa centrum T revolvatur, reciprocè ut 9,0827646 × A T q ad 9,0827646 A T q + A Z q. Nam tempus est reciprocè ut velocitas quâ particula percurritur, et hæc velocitas est summa velocitatum Solis et nodi. Igitur si tempus, quo Sol sine motu nodi percurreret arcum N A, exponatur per sectorem N T A, et particula temporis quo percurreret arcum quàm minimum A a, exponantur per sectoris particulam A T a; et (perpendiculo a Y in N n demisso) si in A Z capiatur d Z, ejus longitudinis (ᵖ) ut sit rectangulum d Z in Z Y ad sectoris particulam A T a ut A Z q ad 9,0827646 A T q + A Z q, id est, ut sit d Z ad



(°) * *Cùm Sol*, &c. Velocitas Solis est ad velocitatem nodi cùm nodi sunt in quadraturis, ut 360^{d}. quæ est via Solis toto anno ad 39. 38′. 7″. 50‴. seu 39.6355. gradus quos nodus toto anno conficeret, si toto anno maximâ suâ celeritate moveretur; velocitas nodi, cùm nodi sunt in quadraturis, est ad nodi velocitatem cùm nodi distant a Sole arcu A N ut A T q ad A Z q per Prop. præced. ergo ex æquo et compositis rationibus, velocitas Solis est ad velocitatem nodi cùm nodi distant a Sole arcu A N ut 360 A T q ad 39.6355 A Z q; id est, dividendo 360 per 39.6355 ut 9.0827667 A T q ad A Z q. Sed dividendo 360 per 39^{gr}. 38′. 7″. 50‴. prodit numerus 9.0827646 loco hujusce 9.0827667 collocandus.

(ᵖ) * *Ut sit rectangulum d Z in Z Y ad sectoris particulam A T a.* Sectoris particula A T a est semper æqualis dimidio rectanguli A T in A a, est verò Z Y ad A a ut A Z ad A T, ducantur antecedentes in d Z et consequentes in $\frac{1}{2}$ A T erit rectangulum d Z in Z Y ad $\frac{1}{2}$ A T × A a sive ad sectoris particulam A T a ut d Z in A Z ad $\frac{1}{2}$ A T q sive ut d Z in 2 A Z ad A T q, sed sumitur esse d Z in Z Y ad A T a ut A Z q ad 9.0827646 A T q + A Z q ergo etiam d Z in 2 A Z est ad A T q ut A Z q ad 9.0827646 A T q + A Z q et vicissim d Z in 2 A Z est ad A Z q ut A T q ad 9.0827646 × A T q + A Z q et dividendo duos priores terminos per 2 A Z est d Z ad $\frac{1}{2}$ A Z ut A T q ad 9.0827646 A T q + A Z q.

$\frac{1}{2}$ A Z ut A T q ad 9,0827646 A T q + A Z q; (q) rectangulum d Z in Z Y designabit decrementum temporis ex motu nodi oriundum, tempore toto quo arcus A a percurritur. (r) Et si punctum d tangit curvam

(q) * *Rectangulum d Z in Z Y designabit decrementum temporis ex motu nodi oriundum;* nam, ex superioribus, tempus quo Sol percurrit arcum A a sine motu nodi, est ad tempus quo Sol a nodo discedet eo arcu A a si (ipse nodus moveatur) ut 9.0827646 A T q + A Z q ad 9.0827646 A T q; hinc convertendo, differentia eorum temporum est ad prius tempus ut A Z q ad 9.0827646 A T q + A Z q, sed, ex hypothesi, sectoris particula A T a designat prius tempus, ea ergo quantitas d Z × Z Y quæ est ad A T a ut A Z q ad 9.0827646 A T q + A Z q *exprimet decrementum temporis ex motu nodi oriundum.*

(r) * *Et si punctum d tangit curvam N d G n.* Numerus 360 designetur per a, numerus 59,6355 dicatur b, ideóque 9.0827646 sit $\frac{a}{b}$, A T dicatur r, et A Z, y, eritque $dZ = \frac{\frac{1}{2}r^2 y}{\frac{a}{b}r^2 + y^2} = \frac{\frac{1}{2}b r^2 y}{a r^2 + b y^2}$ et in puncto T ubi A Z evadit A T sive ubi fit $y = r$ est $dZ = \frac{\frac{1}{2}br}{a+b} = \frac{r}{20.1655292}$; ita ut d Z ad vicesimam radii partem nusquam assurgat.

Est autem ex naturâ circuli $TZ = \sqrt{rr - yy}$, et T Z ad A Z ut fluxio ordinatæ A Z ad Z Y, ideóque $ZY = \frac{y\,dy}{\sqrt{rr-yy}}$, hinc elementum $dZ \times ZY = \frac{\frac{1}{2}b r^2 y^2 dy}{(ar^2 + by^2)\sqrt{rr-yy}}$ et elementum segmenti N A Z est $\frac{y^2 dy}{\sqrt{rr-yy}}$.

Est verò $\sqrt{rr-yy}$ æqualis seriei $r - \frac{y^2}{2r} - \frac{y^4}{8r^3} - \frac{y^6}{16r^5} - \frac{5y^8}{128r^7} - \frac{7y^{10}}{256r^9}$, &c. et $\frac{y^2}{\sqrt{rr-yy}}$ æqualis seriei $\frac{y^2}{r} + \frac{y^4}{2r^3} + \frac{3y^6}{8r^5} + \frac{5y^8}{16r^7} + \frac{35y^{10}}{128r^9} + \frac{63y^{12}}{256r^{11}}$, &c. quæ series parùm convergit quando y accedit ad valorem r, unde prudenter est adhibenda.

Multiplicetur verò hæc series per d y et fiat integratio, obtinetur sequens series quæ exprimit segmentum N A Z, $\frac{y^3}{3r} + \frac{y^5}{10r^3} + \frac{3y^7}{56r^5} + \frac{5y^9}{144r^7} + \frac{35y^{11}}{1408r^9}$, &c. quæ series parùm convergit quando $y = r$ sed tunc segmentum N A Z est quadrans circuli qui per alias commodiores approximationes obtinetur.

Dividatur $\frac{1}{2}br^2$ per $ar^2 + by^2$, fit series $\frac{b}{2a} \times (1 - \frac{by^2}{ar^2} + \frac{b^2y^4}{a^2r^4} - \frac{b^3y^6}{a^3r^6} + \frac{b^4y^8}{a^4r^8}$, &c.) quæ plurimum convergit propter dignitates crescentes fractionis $\frac{b}{a}$ quæ est circiter $\frac{1}{9}$.

Multiplicetur itaque per hanc seriem, series $\frac{y^2}{\sqrt{rr-yy}}$ superius inventa et obtinebitur hæc series

$$\frac{b}{2a} \times \frac{y^2}{r} + \frac{y^4}{2r^3} + \frac{3y^6}{8r^5} + \frac{5y^8}{16r^7} + \frac{35y^{10}}{128r^9} + \frac{63y^{12}}{256r^{11}}, \text{ \&c.}$$

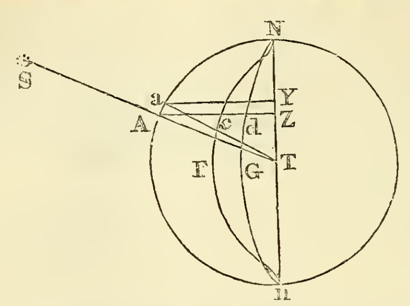
$$-\frac{b^2}{2a^2} \times \frac{y^4}{r^3} + \frac{y^6}{2r^5} + \frac{3y^8}{8r^7} + \frac{5y^{10}}{16r^9} + \frac{35y^{12}}{128r^{11}}, \text{ \&c.}$$

$$+\frac{b^3}{2a^3} \times \frac{y^6}{r^5} + \frac{y^8}{2r^7} + \frac{3y^{10}}{8r^9} + \frac{5y^{12}}{16r^{11}}, \text{ \&c.}$$

$$-\frac{b^4}{2a^4} \times \frac{y^8}{r^7} + \frac{y^{10}}{2r^9} + \frac{3y^{12}}{8r^{11}}, \text{ \&c.}$$

et multiplicetur hæc series per d y et integretur, fiet series quæ exhibebit valorem areæ N d Z

N d G n, area curvilinea N d Z erit decrementum totum, quo tempore arcus totus N A percurritur; et propterea excessus sectoris N A T supra aream N d Z erit tempus illud totum. Et quoniam motus nodi tempore



$$\begin{array}{llllllll}
\frac{b}{2a} \times & \frac{y^3}{3r} + \frac{y^5}{10r^3} & + \frac{3y^7}{56r^5} & + \frac{5y^9}{144r^7} & + \frac{35y^{11}}{1408r^9} & + \frac{63y^{13}}{3308r^{11}}, \&c. \\
-\frac{b^2}{2a^2} & \frac{y^5}{5r^3} & + \frac{y^7}{14r^5} & + \frac{3y^9}{72r^7} & + \frac{5y^{11}}{176r^9} & + \frac{35y^{13}}{1664r^{11}} \\
+\frac{b^3}{2a^3} \times & & \frac{y^7}{7r^5} & + \frac{y^9}{18r^7} & + \frac{3y^{11}}{88r^7} & + \frac{5y^{13}}{208r^{13}} \\
-\frac{b^4}{2a^4} \times & & & \frac{y^9}{9r^7} & + \frac{y^{11}}{22r^9} & + \frac{3y^{13}}{104r^{11}}
\end{array}$$

Termini variabiles primæ lineæ hujusce seriei, seriem ipsam illam constituunt quæ est valor segmenti N A Z, ejus itaque primæ lineæ valor est $\frac{b}{2a}$ N A Z.

Si dividantur omnes termini secundæ lineæ per $\frac{y^2}{r^2}$, observabitur quotientes hanc habere relationem ad terminos correspondentes primæ lineæ, ut, si exponens litteræ y in termino quovis primæ lineæ dicatur ϵ, quantitas eadem quæ in primâ lineâ dividitur per ϵ, in secunda linea dividatur per $\epsilon + 2$; sic termino primo secundæ lineæ diviso per $\frac{y^2}{r^2}$ ut evadat $\frac{y^3}{5r}$, quantitas communis $\frac{y^3}{r}$ in primâ lineâ dividitur per 3, in secundâ per 5, sicque in omnibus terminis utriusque lineæ, ut facile constabit ex ipsâ origine istius seriei, et integrationis lege; hinc si ad communem denominatorem reducantur termini utriusque lineæ, ducendus erit numerator primæ lineæ in $\epsilon + 2$, numerator secundæ in ϵ, et denominator communis erit $\epsilon \times \overline{\epsilon + 2}$; quare subductis terminis secundæ lineæ a terminis primæ differentia exprimetur per terminos primæ seriei ductos in $\frac{2}{\epsilon + 2}$ quod seriei convergentiam plurimum augebit; ideóque termini variabiles secundæ lineæ erunt $\frac{y^2}{r^2} \times$ N A Z $- \frac{y^2}{r^2} \times \left(\frac{2y^3}{15r} + \frac{2y^5}{70r^3} + \frac{6y^7}{504r^5} + \frac{10y^9}{1504r^7}, \&c.\right)$ dicatur ad brevitatem series horum terminorum D et valor verus istius secundæ lineæ est $- \frac{b^2y^2}{2a^2r^2}$ N A Z $+ \frac{b^2y^2}{2a^2r^2} \times$ D.

Simili ratiocinio, ut referantur termini variabiles tertiæ lineæ ad secundam, dividantur omnes termini tertiæ lineæ per $\frac{y^2}{r^2}$, et si dicantur y exponentes terminorum, differentia terminorum secundæ et tertiæ lineæ exprimetur per terminos secundæ seriei ductos in $\frac{2}{y + 2}$, ideóque termini variabiles tertiæ lineæ erunt $\frac{y^4}{r^4} \times$ N A Z $- \frac{y^4}{r^4} \times$ D $- \frac{y^2}{r^2} \times \left(\frac{2y^5}{35r^3} + \frac{2y^7}{126r^5} + \frac{6y^9}{792r^7}, \&c.\right)$ dicatur E series horum terminorum et valor verus tertiæ lineæ erit $+ \frac{b^3y^4}{2a^3r^4} \times$ N A Z $- \frac{b^3y^4}{2a^3r^4} \times$ D $- \frac{b^3y^2}{2a^2r^2}$ E ex quibus facile intelligitur valorem areæ N d Z exprimi posse hac ratione

minore minor est in ratione temporis, debebit etiam area A a Y Z diminui in eadem ratione. Id quod fiet si capiatur in A Z longitudo e Z, quæ sit ad longitudinem A Z ut A Z q ad 9,08276 A T q + A Z q. (s) Sic enim rectangulum e Z in Z Y erit ad aream A Z Y a ut decrementum temporis, quo arcus A a percurritur, ad tempus totum quo percurreretur, si nodus quiesceret: et propterea rectangulum illud respondebit decremento motus nodi. Et si punctum e tangat curvam N e F n, area tota N e Z, quæ summa est omnium decrementorum, respondebit decremento toti, quo tempore arcus A N percurritur; et area reliqua N A e respondebit motui reliquo, qui verus est nodi motus, quo tempore arcus totus N A per Solis et nodi conjunctos motus percurritur. (t) Jam verò area

$$\frac{b}{2a} \times NAZ.$$
$$- \frac{b^2y^2}{2a^2r^2} \times NAZ + \frac{b^2y^2}{2a^2r^2} D$$
$$+ \frac{b^3y^4}{2a^3r^4} \times NAZ - \frac{b^3y^2}{2a^3r^4} D - \frac{b^3y^2}{2a^3r^2} E$$
$$- \frac{b^4y^6}{2a^4r^6} \times NAZ + \frac{b^4y^6}{2a^4r^6} D + \frac{b^4y^4}{2a^4r^4} E + \frac{b^4y^2}{2a^4y^2} F, \&c.$$

Unde summæ coëfficientium quantitatum N A Z, D, E, F, &c. qui progressiones geometricas formant juxta regulas vulgares obtineri possunt, ideóque tandem area N d Z est $\frac{\frac{1}{2}br^2}{ar^2+by^2} \times NAZ + \frac{\frac{1}{2}b^2y^2}{a^2r^2+aby^2} D - \frac{\frac{1}{2}b^3y^2}{a^3r^2+a^2by^2} E + \frac{\frac{1}{2}b^4y^2}{a^4r^4+a^3by^2} F$, &c.

Cor. 1. Primus terminus seriei quæ exprimitur per D est $\frac{2}{5}$ primi termini seriei quæ exprimit segmentum N A Z, et reliqui termini seriei D sunt minores respectu reliquorum terminorum seriei quæ exprimit id segmentum, ergo D minor est quàm $\frac{2}{5}$ N A Z, et pariter E minor est quàm $\frac{3y^2}{7r^2}$ D, et F minor quàm $\frac{5y^2}{9r^2}$, &c. hinc valor N d Z major esse nequit quantitate $\frac{\frac{1}{2}br^2}{ar^2+by^2} \times NAZ + \frac{\frac{1}{5}b^2y^2}{a^2r^2+aby^2} NAZ, = \frac{bNAZ}{ar^2+by^2} \times \frac{1}{2}r^2 + \frac{b}{5a}y^2$ nec minor esse potest quantitate $\frac{bNAZ}{ar^2+by^2} \times \frac{1}{2}r^2$.

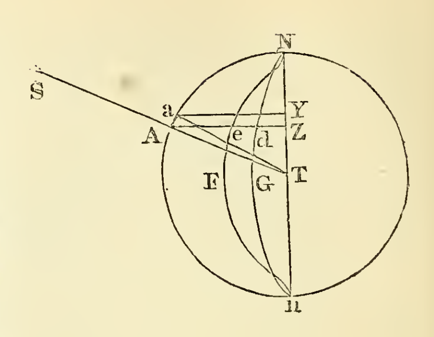
Cor. 2. Hinc ubi $r = y$ et N A Z est quadrans circuli valor areæ N d Z major non est quantitate $NAZ \times \frac{b}{a+b} \times \frac{1}{2} + \frac{b}{5a}$, nec minor quàm $NAZ \times \frac{b}{a+b} \times \frac{1}{2}$; sive major non est quadrantis portione $\frac{1}{20.1655292} + \frac{1}{457.8068865}$ sive quadrantis $\frac{1}{19.3147492}$ nec minor quadrantis portione $\frac{1}{20.1655292}$.

Cor. 3. In casibus in quibus y est quàm minima, ita ut $ar^2 + by^2$ pro ar^2 sumi possit, valor $\frac{bNAZ}{ar^2} \times \frac{1}{2}r^2$ ad verum valorem satis accedet, fietque valor areæ N d Z = $\frac{1}{18.1655292}$ segmenti N A Z, unde habentur velut limites valoris areæ N d Z in variis punctis curvæ.

(s) * *Sic enim rectangulum e Z in Z Y erit ad aream A Z Y a*, &c. Ex præcedentibus, area A Z Y a motum nodorum mediocrem exprimit posito Solem sine motu nodi percurrere arcum A a, si itaque cæteris manentibus celerius percurratur is arcus, motus nodorum sive spatium a nodis percursum minus erit, prout tempus erit brevius; cùm ergo tempus quo Sol percurrit A a sine motu nodi, sit ad tempus quo percurreretur A a posito motu nodi ut 9.0827646 A T q + A Z q ad 9.0827646 A T q si fiat A Z ad A e in eâ ratione, et utrumque ducatur in Z Y, erunt areæ A Z × Z Y, ad A e × Z Y ut motus nodorum in hypothesi priori ad eorum verum motum; et convertendo erit e Z × Z Y ad A Z × Z Y ut differentia motuum ad motum priorem, sive ut A Z q ad 9.0827646 A T q + A Z q.

(t) 116. * *Jam verò area semi-circuli est ad aream N e F n.* Commodius calculi ducentur si prius quæramus aream N A n e N inter semi-peripheriam N A n et curvam N e n contentam, quàm detrahemus ex semi-circuli area; tumque

semi-circuli est ad aream figuræ N e F n, per methodum serierum infinitarum quæsitum, ut 793 ad 60 quamproximè. Motus autem qui respondet circulo toti, erat $19^{gr}. 49'. 3''. 55'''$. et propterea motus, qui figuræ N e F n duplicatæ respondet, est $1^{gr}. 29'. 58''. 2'''$. Qui de motu priore subductus relinquit $18^{gr}. 19'. 5''. 53'''$. motum totum



residuum erit area N e F n, quàm cum semi-circuli areâ conferre licebit.

Sit ergo ut prius $360^{\circ}. = a$, $39^{\circ}.6355 = b$, $AT = r$ et $AT = r$ et $AZ = y$; erit ex notâ præcedenti 9.0827646 A T q + A Z q (sive $\frac{ar^2}{b} + y^2$ ad 9.0827646 A T q sive $\frac{ar^2}{b}$) ut AZ (sive y) ad A e quod erit itaque $\frac{ar^2y}{ar^2+by^2}$; est verò $ZY = \frac{ydy}{\sqrt{rr-yy}}$; hinc elementum areæ a A e est $\frac{ar^2y^2dy}{ar^2+by^2\sqrt{rr-yy}}$ sed elementum areæ curvæ N d G n notâ superiore 115. inventum erat $\frac{\frac{1}{2}br^2y^2dy}{(ar^2+by^2)\sqrt{rr-yy}}$ ergo elementum areæ curvilineæ N A n F N est ad elementum areæ N d G n in ratione datâ a ad $\frac{1}{2}$ b; unde si valor hujus areæ N d G n in notâ (r) inventus per $\frac{1}{2}$ dividatur, et multiplicetur per a, habebitur valor areæ N A n F N qui itaque prodibit $\frac{ar^2}{ar^2+by^2}$ NAZ $+ \frac{by^2}{ar^2+by^2} \times$ D $- \frac{b^2y^2}{a^2r^2+bay^2}$ E $+ \frac{b^3y^2}{a^3r^2+a^2by^2}$ F,

Tollatur verò hæc area ex segmento N A Z, sive ex $\frac{ar^2+by^2}{ar^2+by^2}$ NAZ residuum erit $\frac{by^2}{ar^2+by^2} \times$ N A Z $- \frac{by^2}{ar^2+by^2}$ D $+ \frac{b^2y^2}{a^2r^2+bay^2} \times$ E $- \frac{b^3y^2}{a^3r^2+a^2by^2}$ F, &c. idque residuum est area quæsita N e Z, quod brevius expressum fit $\frac{by^2}{ar^2+by^2} \times (NAZ - D + \frac{b}{a}E - \frac{b^2}{a^2}F$, &c.)

Jam autem ut habeatur ratio semi-circuli ad aream N e F N, sive, quod idem est, quadrantis circuli ad N F T ejus areæ N e F n dimidium; dicatur c quadrans peripheriæ cujus radius est r; sitque m ad n ut c est ad r; valor quadrantis est $\frac{rc}{2}$, et cùm N A Z est quadrans, tum $y = r$ ergo valor dimidii areæ N e F n est $\frac{b}{a+b} \times \frac{rc}{2} - D + \frac{b}{a}E - \frac{b^2}{a^2}F + \frac{b^3}{a^3}G$, &c. ex iis autem quæ in notâ (r) dicta sunt, valor D (ponendo r loco y) est $r^2 \times (\frac{2}{15} + \frac{2}{70} + \frac{6}{504} + \frac{10}{1584} + \frac{70}{18304})$; qui termini ad decimales reducti faciunt $.184\,r^2$. Omittantur reliqui termini quantitatis D ut et quantitates E, F de quâ omissione postea dicemus, et quoniam est $r = \frac{nc}{m}$ ideóque $r^2 = \frac{nrc}{m} = \frac{2n}{m} \times \frac{rc}{2}$. Valor areæ evadit $\frac{b}{a+b} \times (\frac{rc}{2} - \frac{rc}{2} \times \frac{2n}{m} \times .184)$ qui valor est ad valorem quadrantis $\frac{rc}{2}$, ut $\frac{b}{a+b} \times (1 - \frac{2n}{m} \times .184)$ ad 1, substituendo autem loco b et a eorem valores, est $\frac{b}{a+b} = .099$; et ex naturâ circuli est 2 n ad m, sive diameter ad quartam peripheriæ partem ut 1.274 ad 1 ideóque $\frac{2n}{m} \times .184 = 1.27 \times .184 = .23$, quod detractum ex unitate relinquit .766; quod tandem ductum in $\frac{b}{a+b}$ sive .099 efficit .0758 qui valor est ad 1; ut area quæsita ad quadrantem; manebit eadem ratio si uterque terminus per 793 ducatur, sed .0758 in 793 efficit 60. 10. Ergo est area quæsita N e F n ad semi-circulum ut 60. proxime ad 793. Q. e. i.

Omisimus terminos seriei D præter quinque priores, et terminos serierum E, F, &c. facilè enim deprehenditur ex Corollariis notæ (r) ultimos illos terminos seriei D, prope æquales fieri terminis seriei E ductæ in $\frac{a}{b}$ qui termini negativi sunt, sicque mutuò destrui, reliquæ verò series cùm per dignitates fractionis $\frac{b}{a}$ ducantur, brevi evanescunt, ut quidem exploravimus calculo ad plures terminos producto.

nodi respectu fixarum inter sui ipsius conjunctiones cum Sole; et hic motus de Solis motu annuo graduum 360 subductus, relinquit 341^{gr}. 40'. 54''. 7'''. motum Solis inter easdem conjunctiones. Iste autem motus est ad motum annuum 360^{gr}. ut nodi motus jam inventus 18^{gr}. 19'. 5''. 53'''. ad ipsius motum annuum, qui propterea erit 19^{gr}. 18'. 1''. 23'''. Hic est motus medius nodorum in anno sidereo. (u) Idem per tabulas astronomicas est 19^{gr}. 21'. 21''. 50'''. Differentia minor est parte trecentesimâ motûs totius, et ab orbis lunaris eccentricitate et inclinatione ad planum eclipticæ oriri videtur. Per eccentricitatem orbis motus nodorum nimis acceleratur, et per ejus inclinationem vicissim retardatur aliquantulum, et ad justam velocitatem reducitur.

PROPOSITIO XXXIII. PROBLEMA XIV.

Invenire motum verum nodorum Lunæ.

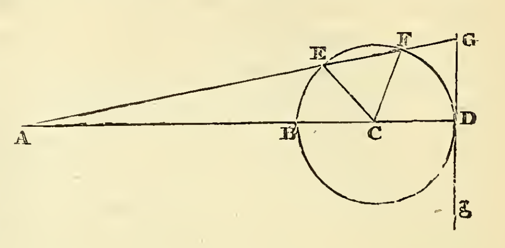
In tempore quod est ut area N T A — N d Z, motus iste est ut area N A e, et inde datur. (x) Verùm ob nimiam calculi difficultatem, præstat

(u) * *Idem per tabulas astronomicas.* Cassinus ex antiquis observationibus nodorum motum determinat in anno communi 19°. 19'. 45''. quibus additis 49''. pro motu nodi per 6^h. 10'. 54''. quibus annus sidereus excedit annum communem, motus ergo nodorum in anno sidereo est 19°. 20'. 34''., ita ut exiguâ duntaxat quantitate differat motus nodorum per calculum inventus, ab eo qui ex observationibus deducitur, et is dissensus est adeo parvus, ut neutiquam turbet argumentum quo confirmetur Newtoniana theoria ex calculo motûs nodorum cum observationibus collato; imo dissensus istius causas ex orbis Lunæ excentricitate et inclinatione fluere indicat Newtonus, sed hæc hujus non sunt loci.

(x) 117. * *Verùm ob nimiam calculi difficultatem.* Satis liquet maximam futuram calculi difficultatem ex ipsis seriebus in notis 115. et 116. adhibitis, quæ cùm parum convergant, regressum non tantùm difficilem, sed etiam parùm tutum habent; hinc alia artificia commodiora adhibet Newtonus, quæ ut intelligantur, duas hypotheses assumere liceat quibus pedetentim ad ipsam constructionem Newtonianam deveniemus.

Prior ergo hypothesis ea sit quam in Prop. XXXII. fingit Newtonus, singulis horis retrahi nodum in locum suum priorem, ut non obstante motu suo proprio datum servet situm ad fixas; interea verò Solem progredi a nodo: eâ quippe in hypothesi, ex Prop. XXXII. tota area circuli repræsentat totum nodorum motum integro anno sidereo, ideóque sectores N A T repræsentabunt motum medium eo tempore quo Sol discedit a nodo arcu N A et segmenta N A Z repræsentabunt motum verum eo ipso tempore, ideóque triangulum A T Z repræsentabit differentiam motûs medii a motu vero, quæ debebit subtrahi a motu medio ut verus motus habeatur in primo quadrante, et tertio ut ex ipsâ figurâ liquet; addi autem in secundo et quarto: cùm itaque tota area circuli sive factum totius peripheriæ in $\frac{1}{2}$ r, designet totum motum nodorum durante anno sidereo, repræsentabit A T Z eam æquationem, quæ æquatio cùm A Z sit y et T Z $= \sqrt{rr - yy}$ est $\frac{1}{2} y \sqrt{rr - yy}$: dividatur ergo tam circuli valor quàm areæ A T Z valor per $\frac{1}{2}$ r, erit peripheria tota ad $\frac{y\sqrt{rr-yy}}{r}$ ut totus motus nodi anno sidereo ad æquationem quæsitam, sive primum consequentem duplicando et secundi antecedentis dimidium sumendo, quod proportionem non turbat, erit peripheria tota ad $\frac{2y\sqrt{rr-yy}}{r}$, ut motus semestris nodi ad æquationem quæsitam: sed ex principiis trigonometricis, sinus ejus arcûs qui foret duplus arcûs N A cujus sinus est y foret $\frac{2y\sqrt{rr-yy}}{r}$; ergo si describatur circulus radio quocumque C B, et sumatur arcus B F duplus, arcus N A, hoc est duplus distantiæ Solis a nodo (quæ distantia per motus medios Solis et nodi haberi potest) erit peripheria tota ad F H sinum ejus arcûs B F ut motus semestris nodi ad æquationem quæsitam; ideo producatur D C B in A, ita ut radius A D sit ad radium C D ut periphe-

sequentem Problematis constructionem adhibere. Centro C, intervallo quovis C D, describatur circulus B E F D. Producatur D C ad A, ut sit A B ad A C ut motus medius ad semissem motus veri mediocris, ubi nodi sunt in quadraturis, id est, ut $19^{gr}. 18'. 1''. 23'''.$ ad $19^{gr}. 49'. 3''. 55'''.$; atque ideo B C ad A C ut motuum differentia $0^{gr}. 31'. 2''. 32'''.$, ad motum posteriorem $19^{gr}. 49'. 3''. 55''.$ hoc est, ut 1 ad $38\frac{3}{10}$; dein per punctum D ducatur infinita G g, quæ tangat circulum in D; et si capiatur angulus



ria tota ad motum semestrem nodi, sive ut a ad $\frac{1}{4}$ b, et centro A radio A D describatur arcus D G et sumatur ejus arcûs longitudo quæ sit æqualis sinui F H, numerus graduum ejus arcûs D G erit ipsa æquatio quæsita; nam si sumeretur in circulo cujus radius est C D arcus D L cujus longitudo esset æqualis F H, foret tota peripheria seu 360^{gr}. ad numerum graduum in eo arcu D L contentorum ut numerus graduum motûs semestris nodi ad numerum graduum æquationis quæsitæ, sive alternando, tota peripheria ad numerum graduum motûs semestris ut numerus graduum arcûs D L ad numerum graduum æquationis quæsitæ; sed ex constructione cùm longitudo arcûs D G sumatur æqualis sinui F H, sive arcui D L, numerus graduum in eo arcu D L contentorum est ad numerum graduum in arcu D G contentorum inversè ut eorum circulorum radii, hoc est ex constructione, ut 360°. ad numerum graduum motûs semestris nodi, ergo numerus graduum arcûs D G est ipse numerus graduum æquationis quæsitæ; satis liquet autem arcum D G paucorum graduum esse debere, et a lineâ rectâ parum differre; hinc si in puncto D erigatur tangens ad circulum cujus radius est C D, sumaturque D G in tangente æqualis ipsi sinui F H; perinde prope erit ac si sumeretur ea longitudo secundum arcum circuli radio A D descripti, et punctum G sive in tangente sive in arcu sumatur, eodem in loco occurret quam proximè; ita ut ex hâc constructione, angulus G A D cujus arcus D G est mensura, sit ipsa æquatio quæsita, substractiva in 1°. et 3°. quadrante, additiva in 2°. et 4°. et obtinebitur juxta trigonometriæ principia, dicendo ut A C, sive $360^{gr}. — 9^{gr}. 54'. 31''. 57'''.$, ad C F sive C B, nempe $9^{gr}. 54'. 31''. 57'''.$, hoc est, ut a — $\frac{1}{4}$ b ad $\frac{1}{4}$ b, sive ut $35\frac{1}{3}$ ad 1. Ita sinus duplæ distantiæ Solis a nodo ad æquationem quæsitam: maxima autem erit æquatio in octantibus, quia area A T Z quæ æquationem repræsentat, est major in octantibus quàm in alio loco.

His probè intellectis facilè inde ad veriorem computum procedere licebit.

2. *Hyp.* In constructione Newtonianâ Prop. XXXII. circulus integer N A n N designat annum sidereum, simulque motum nodorum in hypothesi quòd Sol ipse describit id spatium quo nodi reverâ ab ipso discedunt; in hâc autem hypothesi motus nodorum est $19^{gr}. 49'. 3''. 55'''.$ et calculis nostris per quantitatem $\frac{1}{2}$ b fuit expressum.

Si autem reverâ arcus A N repræsentet recessum Solis a nodo, tàm per motum proprium Solis quàm per medium motum nodi, tempus quo tota circumferentia N A n N describetur, non erit annus sidereus, sed tempus elapsum inter syzygiam Solis nodique et syzygiam sequentem Solis cum eodem nodo, cùmque uniformiter describatur ea circumferentia, siquidem ad motus medios Solis et nodorum refertur, sectores circuli N A n N erunt proportionales motui medio nodorum; itaque si totus circulus repræsentet

B C E vel B C F æqualis duplæ distantiæ Solis a loco nodi, per motum medium invento; et agatur A E vel A F secans perpendiculum D G in G; et capiatur angulus qui sit ad motum totum nodi inter ipsius syzygias (id est, ad $9^{gr}. 11'. 3''.$) ut tangens D G ad circuli B F D circumferentiam totam; atque angulus iste (pro quo angulus D A G usurpari potest) ad

motum nodorum a tempore quo Sol et nodus fuêre conjuncti usque ad sequentem Solis syzygiam cum eodem nodo, sector A T N repræsentabit motum medium nodorum eo tempore quo motu medio Solis et nodi, nodus et Sol arcu N A a se mutuo recessêre.

Tempus autem, inter duas syzygias Solis cum eodem nodo, hac ratione a Newtono determinatur per observationes; anno sidereo dum nempe Sol $360^{gr}.$ emetitur, motus nodi per observationes astronomicas $19^{gr}. 21'. 21''. 50'''.$ deprehenditur, in eâdem autem erunt proportione viæ Solis et nodi quæ simul describuntur quocumque tempore, ideóque via Solis et via nodi inter duas syzygias Solis cum eodem nodo, erunt inter se ut 360 ad $19^{gr}. 21'. 22''. 50'''.$, sed illæ duæ viæ simul sumptæ $360^{gr}.$ efficiunt, itaque 360 gradus dividantur in duas partes quarum una sit ad alteram ut $360^{gr}.$ ad $19^{gr}. 21'. 22''. 50'''.$ Hæc ultima pars quæ est $18^{gr}. 22'. 6''.$ circiter, erit motus nodi inter duas syzygias Solis cum eodem nodo.

Idem motus ex calculo Prop. XXXII., hoc modo determinabitur: si ex toto circulo NAnN duplum areæ N F n tollatur, residuum est verus motus nodi inter syzygias; sed valor areæ N F T erat ad quadrantem ut $\frac{b \times .766}{a + b}$ ad 1. sive proximè ut $\frac{\frac{3}{4} b}{a + b}$ ad 1. In eâdem verò erit ratione duplum areæ N F n (quod est quadruplum areæ N F T) ad totum circulum, ut itaque 1. ad $\frac{\frac{3}{4} b}{a + b}$ ita $\frac{1}{2}$ b qui est numerus graduum quem area circuli designat, ad numerum graduum designatum per duplum areæ N F n, qui erit itaque $\frac{\frac{3}{8} b^2}{a + b}$; cùm ergo totus circulus numerum graduum $\frac{1}{2}$ b designet in Prop. XXXII., et duplum areæ N F n designet $\frac{\frac{3}{8} b^2}{a + b}$, hoc ex $\frac{1}{2}$ b tollatur, residuum $\frac{\frac{1}{2} a b + \frac{1}{8} b^2}{a + b}$ est verus motus nodi inter syzygias.

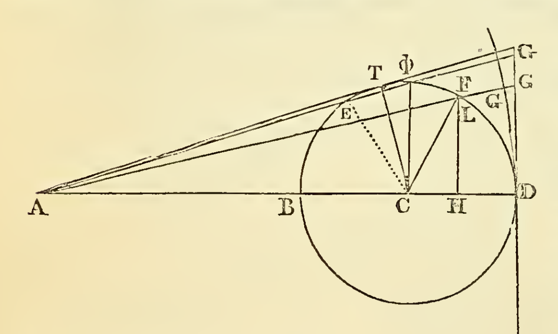
Itaque cùm motus medius nodorum sit ut sector A T N, et motus verus nodi exprimatur per aream N A e; æquatio est ut A T N — N A e, hoc est, cùm totus circulus repræsentet motum nodorum inter syzygias, est 2 r c ad A T N — N A e ut $\frac{\frac{1}{2} a b + \frac{1}{8} b^2}{a + b}$ ad æquat. $\frac{\frac{1}{2} a b + \frac{1}{8} b^2}{2 r c (a + b)}$ (A T N — N A e), sed in not. 116. valor areæ N A e fuit inventus $\frac{a r^2}{a r^2 + b y^2} \times$ N A Z (omissis cæteris terminis qui per D, E, &c. multiplicantur ut pote minimis). Itaque fiet æquatio $\frac{\frac{1}{2} a b + \frac{1}{8} b^2}{2 r c (a + b)}$ (NTA — $\frac{a r^2}{a r^2 + b y^2} \times$ N A Z); eum autem casum sumamus in quo A N est peripheriæ octans, quia in primâ hypothesi liquet eo in casu æquationem fieri maximam, fiet $y^2 = \frac{1}{2} r^2$, et eâ substitutione factâ et loco N T A posito ejus valore T A Z + N A Z factâque reductione, evadet æquatio $\frac{\frac{1}{2} a b + \frac{1}{8} b^2}{2 r c (a + b)}$ (T A Z + $\frac{\frac{1}{2} b \text{ N A Z}}{a + \frac{1}{2} b}$) et cùm area circuli sit .785 dum quadratum diametri est 1, et octans circuli N T A sit ad ejus quadrati octantem cujus dimidium est T A Z in eadem ratione, est N T A ad T A Z ut .785 ad .5, ideóque dividendo est N A Z ad T A Z ut .285 ad .5, et est N A Z = .57 T A Z unde tandem æq. evadit $\frac{\frac{1}{2} a b + \frac{1}{8} b^2}{2 r c (a + b)} \left(\frac{a + .78 b}{a + \frac{1}{2} b} \right)$ T A Z: sed in hâc hypothesi est T A Z = $\frac{1}{4} r^2$; hinc æquatio fit $\frac{\frac{1}{2} a b + \frac{1}{8} b^2}{4 c \times 2 (a + b)} \left(\frac{a + .78 b}{a + \frac{1}{2} b} \right)$ r et ad hanc proportionem revocatur, 4 c sive tota circumferentia est ad $\frac{\frac{1}{2} a b + \frac{1}{8} b^2}{2 (a + b)}$ quod est dimidium motûs nodi inter syzygias ut $\frac{a + .78 b^2}{a + \frac{1}{2} b}$ r ad æquationem; hoc modo autem construitur quantitas $\frac{a + .78 b}{a + \frac{1}{2} b}$ r, sive simplicius $\frac{a + \frac{3}{4} b}{a + \frac{1}{2} b}$ r, describatur circulus B C D cujus radius B C = r = $\frac{1}{4}$ b; producatur C B in A ut sit A B = a + $\frac{1}{4}$ b, ideóque A C = a + $\frac{1}{2}$ b, et A D =

motum medium nodorum addatur ubi nodi transeunt a quadraturis ad syzygias, et ab eodem motu medio subducatur ubi transeunt a syzygiis ad quadraturas; habebitur eorum motus verus. Nam motus verus sic inventus congruet quam proximè cum motu vero qui prodit exponendo

$a + \frac{3}{4} b$, centro C erigatur perpendicularis C Φ ad circulum usque, et pariter in extremo diametri D ducatur tangens, ductaque linea A Φ donec secet tangentem in G, liquet quod A C sive $a + \frac{1}{2} b$ est ad A D sive $a + \frac{3}{4} b$ ut est C Φ sive r ad D G quæ erit $\frac{a + \frac{3}{4} b}{a + \frac{1}{2} b}$ r, ideóque erit tota circumferentia ad dimidium motûs inter syzygias ut D G ad æquationem quæsitam: sive invertendo terminos omnes et alternando ut Newtoni expressio habeatur, est æquatio ad motum nodi inter syzygias proximas ut D G ad circuli B E D circumferentiam.

Illa autem æquatio quæsita, erit prope æqualis angulo D A G; nam in triangulo D A G est D G ad sinum anguli D A G sive ad ipsum angulum D A G (nam in parvis angulis, angulus pro sinubus sumere licet) ut est A G vel A D, quod est $a + \frac{3}{4} b$, ad sinum totum sive ad radium C D quod est $\frac{1}{4} b$; sed si $a + \frac{3}{4} b$, et $\frac{1}{4} b$ dividantur per $a + b$, quod rationem non mutat, fiatque $\frac{a + \frac{3}{4} b}{a + b}$ ad $\frac{\frac{1}{4} b}{a + b}$ ita a sive gradus 360 ad quartum, invenitur is quartus terminus $\frac{\frac{1}{4} a^2 b + \frac{1}{4} a b^2}{(a + \frac{3}{4} b)(a + b)}$; divisione factâ per $a + \frac{3}{4} b$ quotiens est $\frac{\frac{1}{4} a b + \frac{1}{16} b^2}{a + b}$ omissis, ut licet, dignitatibus altioribus $\frac{1}{4}$ b, is verò quotiens est ipsa quantitas $\frac{\frac{1}{2} a b + \frac{1}{8} b^2}{2 (a + b)}$ quæ exprimit dimidium motûs nodi inter syzygias; ergo resumendo cùm sit D G ad angulum D A G ut $a + \frac{3}{4} b$ ad $\frac{1}{4} b$ sive ut circumferentia tota ad dimidium motûs nodi inter syzygias, in eâque ratione sit D G ad æquationem, ipse angulus D A G est æqualis æquationi.

Idem alio modo constabit; in ipsâ peripheriâ D Φ B D, sumatur arcus D L æqualis D G, erit ut $360^{gr.}$ ad dimidium motûs nodi, ita numerus graduum in arcu D L contentorum ad numerum graduum æquationis; centro A radio A D describatur arcus et in eo sumatur longitudo D G æqualis D L, erit ut radius A D sive $a + \frac{3}{4} b$ ad radium C D sive $\frac{1}{4} b$; ita numerus graduum arcûs D L ad numerum graduum arcûs D G, numeri enim graduum in arcubus æqualibus sunt inversè ut eorum radii, sed $a + \frac{3}{4} b$ est ad $\frac{1}{4} b$ ut $360^{gr.}$ sive a ad dimidium motûs nodi sive ad $\frac{\frac{1}{2} a b + \frac{1}{8} b^2}{2 (a + b)}$; est ergo 360 ad dimidium motûs nodi inter syzygias ut numerus graduum arcûs D L ad numerum graduum arcûs D G, sed ita etiam erat numerus graduum arcûs D L ad numerum graduum æquationis quæsitæ, ergo numerus graduum arcûs D G est ipsa æquatio quæsita, sed A G secabit arcum D G in puncto tali ut arcus inter eam lineam et punctum D interceptus sit proximè æqualis tangenti D G, nam in parvis arcubus, tangentes prope æquantur suis arcubus, ergo linea A G secabit arcum D G in G quamproximè, sed arcus D G cujus gradus sunt ipsa æquatio, est mensura anguli D A G, ergo angulus D A G pro æquatione usurpari potest.



Dicit autem Newtonus lineam A B debere esse ad lineam A C ut motus medius ad semissem motûs veri mediocris quando nodi sunt in quadraturis, id est, ut $19^{gr.}\ 18'.\ 1''.\ 23'''$. ad $10^{gr.}\ 49'.\ 5''.\ 55'''$. In hâc autem constructione fecimus $A\ B = a + \frac{1}{4} b$ et $A\ C = a + \frac{1}{2} b$, res autem eodem redit, cùm enim motus nodi inter syzygias sit $\frac{\frac{1}{2} a b + \frac{1}{8} b^2}{a + b}$ dematur ex a habebitur motus Solis inter syzygias $\frac{a a + \frac{1}{2} a b - \frac{1}{8} b^2}{a + b}$, iste motus Solis erit ad ejus motum annuum $360^{gr.}$ sive a ut motus nodi inter syzygias $\frac{\frac{1}{2} a b + \frac{1}{8} b^2}{a + b}$ ad motum annuum nodi qui itaque erit $\frac{\frac{1}{2} a^2 b + \frac{1}{8} a b^2}{a a + \frac{1}{2} a b - \frac{1}{8} b^2}$ is itaque motus erit ad $\frac{1}{2}$ b quod exprimit semissem motûs veri mediocris ubi nodi sunt in quadraturis ut $\frac{1}{2} a^2 b + \frac{1}{8} a b^2$ ad $\frac{1}{2} a a b + \frac{1}{4} a b b - \frac{1}{16} b^3$ sive omisso termino $\frac{1}{16} b^3$, divisis reliquis terminis per a b et duplicatis ut $a + \frac{1}{4} b$

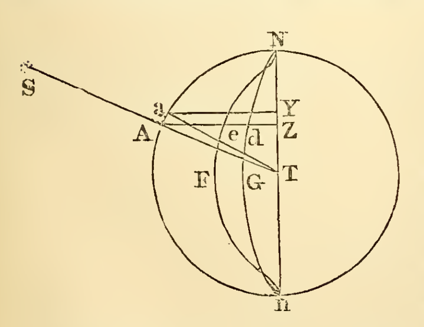
tempus per aream N T A — N A Z, et motum nodi per arcum N A e; ut rem perpendenti et computationes instituenti constabit. Hæc est

ad $a + \frac{1}{2} b$; ergo in constructione nostrâ est A B sive $a + \frac{1}{4} b$ ad A C sive $a + \frac{1}{2} b$ ut motus annuus nodi, ad semissem ejus quod toto anno describeretur eo motu quem habent nodi in quadraturis; itaque erit etiam $a + \frac{1}{4} b$ ad $a + \frac{1}{2} b$ sive A B ad A C ut motus medius nodi ad semissem motûs veri in quadraturis, ut statuit Newtonus; observandum quidem ex hâc constructione æquationem futuram maximam quando linea A G tangit circulum, quod quidem incidit paulò ante punctum Φ, et si a puncto A ducatur tangens A T erit ut A C ad C T ita sinus totus ad cosinum anguli B C T, qui angulus B C T deprehendetur esse $88\frac{1}{2}°$. cujus dimidium $44\frac{1}{4}°$. est verus locus medius in quo maxima fit æquatio, ab octante adeo parum dissitus ut in sequentibus æquationem maximam fieri in octantibus supponere liceat, tanto magis quod hæc æquatio, quæ verè maxima foret, ab eâ quæ fit in octantibus insensibiliter differret.

3. *Hypoth.* Fingimus arcum A N esse octantem peripheriæ, et eo in casu ostendimus constructionem Newtonianam exhibere æquationem illi loco debitam, in aliis distantiis Solis a nodo paulo minus accurata est constructio, sed errore exiguo; ubivis enim, æquatio erit $\frac{\frac{1}{2} ab + \frac{1}{8} b^2}{2rc(a+b)}$

$$(TAZ + NAZ - \frac{ar^2}{ar^2 + by^2} NAZ) = \frac{\frac{1}{2} ab + \frac{1}{8} b^2}{2rc(a+b)} (TAZ + \frac{by^2}{ar^2 + by^2} NAZ)$$

sumatur N A Z esse ad T A Z ut $r - \sqrt{rr - yy}$ ad $\sqrt{rr - yy}$, quod quidem verum est de spatio rectilineo N A Z non verò de curvilineo N A Z, sed propter exiguitatem fractionis $\frac{by^2}{ar^2 + by^2}$ errorem non magnum pariet; fit æquatio $\frac{\frac{1}{2} ab + \frac{1}{8} b^2}{2rc(a+b)} \left(\frac{ar^2 + \frac{bry^2}{\sqrt{rr - yy}}}{ar^2 + by^2} \right)$ $\times TAZ$ sive numeratore et denominatore quadruplicato quod valorem non mutat, fit



$$\frac{\frac{1}{2} ab + \frac{1}{8} b^2}{ac \times 2(a+b)} \left(\frac{ar^2 + \frac{bry^2}{\sqrt{rr - yy}}}{ar^2 + by^2} \right) \frac{4TAZ}{r},$$

quæ quantitas ad hanc proportionem revocatur, 4 c sive tota circumferentia est ad $\frac{\frac{1}{2} ab + \frac{1}{8} b^2}{2(a+b)}$ quod est dimidium motûs nodi inter syzygias ut $\frac{ar^2 + \frac{bry^2}{\sqrt{rr - yy}}}{ar^2 + 2by^2} \times \frac{4TAZ}{r}$ ad æquationem quæsitam.

Ut construatur hæc quant. $\frac{ar^2 + \frac{bry^2}{\sqrt{r^2 - y^2}}}{ar^2 + by^2} \times \frac{4TAZ}{r}$, fiat ut prius circulus B F D cujus radius B C = r = $\frac{1}{4}$ b, ideóque b = 4 r. producaturque C B in A ita ut sit A B = $a + \frac{1}{4} b$, sumatur arcus B F duplus arcûs A N, ductoque perpendiculo F H, et tangente erectâ in D ductâque A F G erit D G prope æqualis quantitati $\frac{ar^2 + \frac{bry^2}{\sqrt{r^2 - y^2}}}{ar^2 + by^2} \times \frac{4TAZ}{r}$; est enim ex constructione A H ad A D ut F H ad D G ideóque D G = $\frac{AD}{AH} \times$ F H est autem $\frac{ar^2 + \frac{bry^2}{\sqrt{r^2 - y^2}}}{ar^2 + by^2} \times \frac{4TAZ}{r} = \frac{AD}{AH} \times$ F H, nam posito 4 r loco b et utroque termino diviso per r^2, fit $\frac{a + \frac{4y^2}{\sqrt{rr - yy}}}{a + \frac{4y^2}{r}}$; valor mediocris quadrati y^2 est $\frac{1}{2} r^2$, unde $\frac{4y^2}{\sqrt{rr - yy}} = \frac{4y^2}{r\sqrt{\frac{1}{2}}}$ et $\sqrt{\frac{1}{2}}$ est paulo major quàm $\frac{2}{3}$ hinc $\frac{4y^2}{r\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{6y^2}{r} = 3r$; præterea $\frac{2y^2}{r}$ valore suo mediocri est r, est etiam $\frac{2y^2}{r}$ sinus versus arcûs dupli ejus cujus sinus est y, ideóque $\frac{2y^2}{r}$ est accuratè æquale B H unde $a + \frac{4y^2}{r}$ est a + r + B H, sed a + r per constructionem est A B, ergo $a + \frac{4y^2}{r}$ est A H, ideóque $\frac{a + \frac{4y^2}{\sqrt{rr - yy}}}{a + \frac{4y^2}{r}} = \frac{a + 3r}{AH}$ absque errore

æquatio semestris motus nodorum. (y) Est et æquatio menstrua, sed quæ ad inventionem latitudinis Lunæ minime necessaria est. Nam cùm variatio inclinationis orbis lunaris ad planum eclipticæ duplici inæqualitati obnoxia sit, alteri semestri, alteri autem menstruæ; inæqualitas et æquatio menstrua nodorum ita se mutuo contemperant et corrigunt, ut ambæ in determinanda latitudine Lunæ negligi possunt.

Corol. Ex hac et præcedente Propositione (z) liquet quod nodi in syzygiis suis quiescunt, in quadraturis autem regrediuntur motu horario

sensibili, quia si $\frac{2\,y^2}{r}$ minus sit aut majus quàm r, quoniam idem valor in numeratore ac denominatore occurrit, et ea quantitas non est magna respectu totius A H, manebit idem fractionis valor; sed $a + 3\,r = A\,D$ ideóque fractio $\frac{a\,r^2 + \frac{b\,r\,y^2}{\sqrt{r\,r - y^2}}}{a\,r^2 + b\,y^2}$ est proximè æqualis fractioni $\frac{A\,D}{A\,H}$.

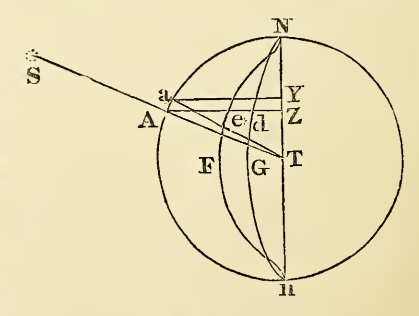
Est verò accuratè $\frac{4\,T.A\,Z}{r} = F\,H$, nam triangulum $T\,A\,Z = \frac{A\,Z \times T\,Z}{2}$, est $A\,Z = y$, $TZ = \sqrt{r\,r - y\,y}$, ergo $\frac{4\,TAZ}{r} = \frac{2\,y\sqrt{r\,r - y\,y}}{r}$; sed, ex principiis trigonometricis, sinus arcûs dupli ejus cujus sinus est y, est $\frac{2\,y\sqrt{r\,r - y\,y}}{r}$, ergo sinus arcûs B F qui duplus est arcûs A N cujus sinus est y, est $\frac{2\,y\sqrt{r\,r - y\,y}}{r}$, sed sinus arcûs B F est F H ex constructione, ideóque F H $= \frac{2\,y\sqrt{r\,r - y\,y}}{r} = \frac{4\,T\,A\,Z}{r}$, et quantitas

$$\frac{A\,D}{A\,H} \times FH = \frac{a\,r^2 + \frac{b\,r\,y^2}{\sqrt{r\,r - y\,y}}}{a\,r^2 + b\,y^2} \times \frac{4\,T\,A\,Z}{r}.$$

Quibus expositis, cætera, nempe angulum D A G pro æquatione sumi posse, lineas A B ad A C sumendas esse ut motus medius nodi ad semissem ejus motûs in quadraturis, cætera, inquam, patent ut in hypothesi secundâ.

(y) * *Est et æquatio menstrua*, ex iis quæ in Prop. XXX. et XXXI. dicta sunt, liquet quod dum Luna motu menstruo circa Terram fertur, nodi satis inæqualiter feruntur; hinc si locus nodorum ex eorum motu medio æstimatur, locus ille medius a vero nonnihil differret, idque quod esset corrigendum secundum diversam Lunæ ipsius distantiam a nodo, æquatio menstrua meritò diceretur, sed cùm totus motus menstruus Lunæ non sit 2^{gr}. et compensetur latitudinis error qui ex falsâ nodi positione oriretur per inclinationis Lunæ inæqualitates, operæ pretium non duxit Newtonus hanc æquationem tradere, suo loco autem de eâ compensatione agetur.

(z) * *Liquet quod nodi in syzygiis quiescunt.* Etenim motus nodorum est ut area A Z Y a dempta area e Z Y, ubi verò nodi sunt in syzygiis ideóque ubi punctum A incidit in N, evanescit linea A Z ac per consequens area A Z Y a — e Z Y nullus itaque est nodorum motus. *In quadraturis autem regrediuntur motu horario* $16''. 19'''. 26^{iv}$. Si nodi distent 90^{gr}. a Sole, A Z fit æqualis A T, et Z Y = A a, ideóque area A Z Y a quæ est parallelogrammum ejusdem altitudinis ac baseos ad triangulum A T a est ejus duplum, cùmque e Z sit ad A Z ut A Z q ad 9.0827646 A T q + A Z q sitque A Z = A T in hoc casu, sit $e\,Z = \frac{A\,T}{10.0827646}$ et area e Z Y est $\frac{A\,T \times A\,a}{10.0827646}$ sive duplum trianguli A T a divisum per 10.0827646 hinc motus nodi qui exprimitur per aream A Z Y a —



e Z Y, est in hoc casu ad aream A T a ut $2 - \frac{2}{10.0827646}$ ad 1, sed quia tota area N A n N motum annuum designat $19^{gr}. 49'. 3''. 55'''$. Triangulus A T a motum horarium repræsentans numerum graduum designabit qui obtineretur dividendo $19^{gr}. 49'. 3''. 55'''$. per numerum horarum in anno sidereo comprehensarum, et eâ divisione factâ numerus graduum quem repræsentat triangulus A T a, invenietur $8''. 8'''. 18^{iv}. 51^{v}$. si itaque fiat 1. ad $\frac{18.0827646}{10.0827646}$ ita iste numerus ad quartum $8''. 18'''. 8^{iv}. 51^{v}$. invenietur $16''. 19'''. 26^{iv}$. qui erit motus horarius quo nodi regrediuntur in quadraturis

$16''. 19'''. 26^{iv}$. [a] Et quod æquatio motus nodorum in octantibus sit $1^{gr}. 30'$. Quæ omnia cum phænomenis cœlestibus probè quadrant.

Scholium.

Aliâ ratione motum nodorum J. Machin, Astron. Prof. Gresham, et Henr. Pemberton, M. D. seorsum invenerunt. Hujus methodi mentio quædam alibi facta est. Et utriusque chartæ, quas vidi, duas Propositiones continebant, et inter se in utrisque congruebant. Chartam verò D. Machin, cùm prior in manus meas venerit, hic adjungam.

DE MOTU NODORUM LUNÆ.

PROPOSITIO I.

" *Motus Solis medius a nodo, definitur per medium proportionale geometricum, inter motum ipsius Solis medium, et motum illum mediocrem quo Sol celerrimè recedit a nodo in quadraturis.*

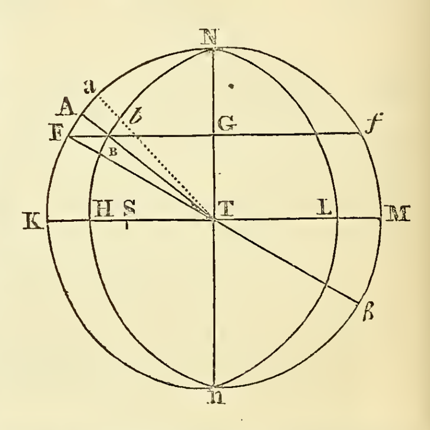
" Sit T locus ubi Terra, N n linea nodorum Lunæ ad tempus quodvis datum, K T M huic ad rectos angulos ducta, T A recta circum centrum revolvens eâ cum velocitate angulari quâ Sol et nodus a se invicem rece-

[a] * *Et quod æquatio motus nodorum in octantibus sit* $1^{gr}. 30'$. Ex secundâ hypothesi notæ 117. Æquatio in octantibus per hanc proportionem invenitur, ut tota circumferentia circuli B F D B ad dimidium motûs nodi inter syzygias quod est $9^{gr}. 11'. 3''$. ita $\frac{a + .78\,b}{a + \frac{1}{2}b} \times r$ ad æquationem quæsitam; est autem b ad a ut 1 ad 9.0827646, itaque a + .78 b est ut 9.8627646 et $a + \frac{1}{2}b$ ut 9.5827646 itaque fractio $\frac{a + .78\,b}{a + \frac{1}{4}b} = \frac{9.8627646}{9.5827646} = 1.0292191$, quæ ducta in $r = \frac{1}{4}b = 9^{gr}. 54'. 31''. 57'''$. dat $10^{gr}. 11'. 54''. 15'''. 8^{iv}. 11^{v}$., ducta iterum in $9^{gr}. 11'. 3''$., dat $93^{gr}. 39'. 49''. 48'''$., sed si radius r circuli B F D B exprimatur per numerum $9^{gr}. 54'. 31''. 57'''$., longitudo circumferentiæ continebit tales gradus $62^{gr}. 13'. 39''. 50'''$. Diviso itaque numero $93^{gr}. 39'. 49''. 48'''$. per $62^{gr}. 13'. 39''. 50'''$. Quotiens sive æquatio quæsita est $1^{gr}. 30'. 18''$., &c.

Calculum hunc integrum exhibuimus ut ostenderemus quomodo adhibendæ forent quantitates 4 c et r quæ circumferentiam totam ejusque radium exhibent, cùm enim is radius æquipolleat $\frac{1}{4}$ b, et $\frac{1}{4}$ b sit $9^{gr}. 54'. 31''. 57'''$., cavendum ne 4 c sive circumferentia tota, 360^{gr}. assumatur, sed debet assumi ejus numeri graduum qui sit ad $9^{gr}.54'.31''.57'''$. ut est circumferentia ad radium.

De hac autem æquatione semestri non agunt de la Hirius et Cassinus in Tabulis Astronomicis, nullius enim usûs est ad calculum eclipsium ad quem potissimum accommodantur pleræque lunares tabulæ, hanc autem æquationem habent Tabulæ Rudolphinæ (pag. 87. Tabul.) et in octantibus distantiæ Solis a nodo hanc faciunt $1^{gr}. 39'. 46''$., utrum accurratioribus tabulis hæc æquatio ad $1^{gr}. 30'. 18''$. magis accederet, ignoramus; at, qui probè norunt quam difficile sit observationes loci nodi accuratissimas habere extrà eclipses, et quantùm parvus error in latitudine Lunæ et in verâ inclinatione orbitæ assignandâ locum nodi mutet, non invenient hoc discrimen 9'. obesse, quominus dici possit æquationem ita inventam cum phænomenis cœlestibus probè quadrare, et facile suspicabuntur errorem hunc observationi potius quàm calculo esse tribuendum.

dunt; ita ut angulus inter rectam quiescentem N n et revolventem T A, semper fiat æqualis distantiæ locorum Solis et nodi. Jam si recta quævis T K dividatur in partes T S et S K quæ sint ut motus Solis horarius medius ad motum horarium mediocrem nodi in quadraturis, et ponatur recta T H media proportionalis inter partem T S et totam T K, hæc recta inter reliquas proportionalis erit motui medio Solis a nodo.



" Describatur enim circulus N K n M centro T et radio T K, eodemque centro et semi-axibus T H et T N describatur ellipsis N H n L, et in tempore quo Sol a nodo recedit per arcum N a, si ducatur recta T b a, area sectoris N T a exponet summam motuum nodi et Solis in eodem tempore. Sit igitur arcus a A quàm minimus quem recta T b a præfatâ lege revolvens in datâ temporis particulâ uniformiter describit, et sector quàm minimus T A a erit ut summa velocitatum quâ Sol et nodus tum temporis seorsim feruntur. Solis autem velocitas ferè uniformis est, utpote cujus parva inæqualitas vix ullam inducit in medio nodorum motu varietatem. Altera pars hujus summæ, nempe velocitas nodi in mediocri suâ quantitate augetur in recessu a syzygiis in duplicatâ ratione sinûs distantiæ ejus a Sole; per Corol. Prop. XXXI. Lib. III. Princip. et cùm maxima est in quadraturis ad Solem in K, (b) eamdem rationem obtinet ad Solis velocitatem ac ea quam habet S K ad T S hoc est (c) ut (differentia quadratorum ex T K et T H vel) (d) rectangulum K H M ad T H quadratum. Sed ellipsis N B H dividit sectorem A T a summæ harum duarum velocitatem exponentem, in duas partes A B b a et B T b ipsis velocitatibus proportionales. Producatur enim B T ad circulum in β, et a puncto B demittatur ad axem majorem perpendicularis B G, quæ utrinque producta occurrat circulo in punctis F et f, (e) et

(b) * *Eamdem rationem obtinet* per constructionem.

(c) * *Ut differentia quadratorum ex T K et T H — ad T H quadratum.* Est ex constructione T K ad T H ut T H ad T S, est ergo T K ^{2} ad T H ^{2} ut T K ad T S et dividendo T K ^{2} — T H ^{2} ad T H ^{2} ut T K — T S sive S K ad T S.

(d) * *Ut differentia quadratorum ex T K et T H vel rectangulum K H M.* Est enim T K ^{2} — T H ^{2} = K H × H M, per Prop. V. Lib. II. Elem. Euclidis.

(e) * *Et quoniam spatium A B b a*, &c. Sector T A a est ad sectorem T B b ut A T ^{2} ad B T ^{2}, (quia propter parvitatem anguli A T a, non differt sensibiliter sector B T b ab eo qui

quoniam spatium A B b a est ad sectorem T B b ut rectangulum A B β ad B T quadratum (rectangulum enim illud æquatur differentiæ quadratorum ex T A et T B ob rectam A β æqualiter et inæqualiter sectam in T et B.) Hæc igitur ratio ubi spatium A B b a maximum est in K, eadem erit ac ratio rectanguli K H M ad H T quadratum, sed maxima nodi mediocris velocitas erat ad Solis velocitatem in hâc ratione. Igitur in quadraturis sector A T a dividitur in partes velocitatibus proportionales. (f) Et quoniam rectang. K H M est ad H T quadr. ut F B f ad B G quad. (g) et rectangulum A B β æquatur rectangulo F B f. Erit igitur areola A B b a ubi maxima est ad reliquum sectorem T B b, ut rectang. A B β ad B G quadr. Sed ratio harum areolarum semper erat ut A B β rectang. ad B T quadratum; et propterea areola A B b a in loco A minor est simili areola in quadraturis, in duplicatâ ratione B G ad B T hoc est in duplicatâ ratione sinus distantiæ Solis a nodo. Et proinde summa omnium areolarum A B b a nempe spatium A B N erit ut motus nodi in tempore quo Sol digreditur a nodo per arcum N A. Et spatium reliquum nempe sector ellipticus N T B erit ut motus Solis medius in eodem tempore. Et propterea quoniam annuus motus nodi medius, is est qui fit in tempore quo Sol periodum suam absolverit, motus nodi medius a Sole erit ad motum ipsius Solis medium, ut area circuli ad aream ellipseos, hoc est ut recta T K ad rectam T H mediam scilicet proportionalem inter T K et T S; vel quod eodem redit ut media proportionalis T H ad rectam T S.

inter lineas A T, a T interciperetur et terminaretur arcu circuli centro T, radio T B descripti). Dividendo autem est T A a — T B b sive A B b a ad T B b ut $AT^2 - BT^2$ ad BT^2; est verò $AT^2 - BT^2 = AB \times B\beta$ (per 5. II. Lib. El.) ergo *A B b a ad T B b ut A B β ad B T quadratum.*

(f) * *Et quoniam rectangulum K H M est ad H T quad. ut F B f ad B G quad.* Ex natura ellipseos et circuli circumscripti, est KT ad HT ut F G ad B G, et quadrando KT^2 ad HT^2 ut FG^2 ad BG^2, et dividendo $KT^2 - HT^2$ ad HT^2 ut EG^2 ad BG^2, sed (per 5. Lib. II. Elem.) $KT^2 - HT^2 = KH \times HM$ et $FG^2 - BG^2 = FB \times Bf$ ergo K H M ad HT^2 ut F B f ad BG^2.

(g) * *Et rectangulum A B β = F B f* (per 35. III. Elem.) hoc ratiocinium ita exprimi potest; area A B b a ubi maxima est, est ad T B b ut A B β ad BG^2 ergo ubi maxima est A B b a est $\frac{TBb \times AB\beta}{BG^2}$, in aliis verò locis area A B b a est ad T B b ut A B β ad BT^2, ergo illis in locis est $\frac{TBb \times AB\beta}{BT^2}$, est ergo area A B b a ubi maxima est ad aream A B b a in alio quovis loco ut $\frac{TBb \times AB\beta}{BG^2}$ ad $\frac{TBb \times AB\beta}{BT^2}$ sive quia motus Solis qui per aream T B b exprimitur est ubique idem, est area A B b a ubi maxima est ad aream A B b a in alio quovis loco ut $\frac{1}{BG^2}$ ad $\frac{1}{BT^2}$ sive ut BT^2 ad BG^2, sed in triangulo B T G est B T ad B G ut sinus anguli recti G ad sinum anguli B T G per principia trigonom. et distantia Solis a nodo ubi area A B b a est maxima, nempe in K, mensuratur per angulum rectum, et ubi est in loco quovis A per angulum B T G, ergo area A B b a ubi maxima est, est ad aream A B b a in alio quovis loco ut quadrata sinuum distantiæ Solis a nodo in utrovis loco, sed in eâ sunt ratione motus nodorum in iis distantiis; ergo ut est area A B b a ubi maxima est ad motum nodi in eo loco, ita est area A B b a in alio quovis loco ad motum nodi in eo loco, sed ubi area A B b a maxima est, est ad motum nodi ut B T b ad motum Solis, ergo cùm areæ B T b et motus Solis ubique eadem maneant, est etiam in quovis loco area A B b a ad motum nodi ut area B T b ad motum Solis sive alternando est ubique A B b a ad B T b ut motus nodi ad motum Solis. *Et proinde summa omnium A B b a, &c.*

PROPOSITIO II.

" *Dato motu medio nodorum Lunæ invenire motum verum.*

" Sit angulus A distantia Solis a loco nodi medio, sive motus medius Solis a nodo. Tum si capiatur angulus B cujus tangens sit ad tangentem anguli A ut T H ad T K, hoc est in subduplicatâ ratione motûs mediocris horarii Solis ad motum mediocrem horarium Solis a nodo in quadraturis versante; erit idem angulus B distantia Solis a loco nodi vero. Nam jungatur F T et ex demonstratione Propositionis superioris (h) erit angulus F T N distantia Solis a loco nodi medio, angulus autem A T N distantia a loco vero, et tangentes horum angulorum sunt inter se ut T K ad T H.

" *Corol.* Hinc angulus F T A est æquatio nodorum Lunæ, (i) sinusque hujus anguli ubi maximus est in octantibus, est ad radium ut K H ad T K + T H. (k) Sinus autem hujus æquationis in loco quovis alio

(h) * *Erit angulus F T N distantia Solis a loco nodi medio.* Cùm circulus N K n M repræsentet totum motum Solis a nodo inter syzygias proximas cum eodem nodo, sectores ejus circuli ut F T N repræsentabunt motum medium Solis a nodo, tempore quod erit ad totum tempus motus Solis inter syzygias cum eodem nodo, ut erit is sector assumptus ad totum circulum.

Ducatur verò F G quæ occurrat ellipsi in B, cumque sectores elliptici B T N repræsentent Solis motum qui uniformis supponitur, ii sectores B T N sunt proportionales tempori; sed sector ellipticus B T N erit, ex natura ellipseos et circuli circumscripti, ad totam ellipsim ut sector circularis F T N ad totum circulum, ideóque tempus quo Solis motus repræsentabitur per B T N erit idem ac tempus quo Sol a nodis recesserit motu medio repræsentato per F T N, sed dum Sol describit sectorem B T N, vero motu recedit a nodo sectore N T A, per dem. Prop. super. ergo sector F T N repræsentat medium motum Solis a nodo, eo tempore quo verus ejus a nodo motus repræsentari debet per N T A, ergo medius motus est ad verum ut angulus T N ad angulum A T N, tangentes autem horum angulorum, sumendo T G pro radio, sunt F G et B G, et F G est ad B G ut K T ad K H ex naturâ circuli et ellipseos.

(i) * *Sinusque hujus anguli in octantibus est ad radium ut K H ad T K + T H.* Ex principiis trigonometricis, est sinus hujus anguli F T A qui est æquatio nodorum Lunæ ad sinum anguli T F G, qui in hoc casu est 45^{gr}. (cujus ergo sinus est T A $\sqrt{\frac{1}{2}}$) ut est F B ad B T, sive omnes terminos quadrando; est quad. sinus æquationis ad $\frac{TA^2}{2}$ ut FB^2 ad BT^2 sive tollendo fractionem, est quadr. sinûs æquationis quæsitæ ad TA^2 ut FB^2 ad $2BT^2$, sed $BT^2 = BG^2 + TG^2$ et in octantibus est $TG = FG$ sive $BG + BF$ cujus quad. est $BG^2 + 2BG \times BF + BF^2$ hinc $BT^2 = 2BG^2 + 2BG \times DF + BF^2$ et $2BT^2 = 4BG^2 + 4BG \times BF + 2BF^2$, cujus radix quadrata (negligendo BF^2) est $2BG + BF = FG + BG$: ergo tandem cùm sit quad. sinûs æquationis quæsitæ ad TA^2 ut est FB^2 ad $2BT^2$; radices quadratas omnium terminorum sumendo est sinus æquationis ad T A sive ad radium ut est F B ad F G + B G, sed est B F ad F G + B G ut K H ad T K + T H, hinc tandem, sinus æquationis maximæ est ad radium ut K H ad T K + T H.

(k) * *Sinus autem æquationis in loco quovis alio*, &c. Ut hoc commodè demonstretur, hoc Lemma adhibendum est.

A est ad sinum maximum, ut sinus summæ angulorum F T N + A T N ad radium: hoc est ferè ut sinus duplæ distantiæ Solis a loco nodi medio (nempe 2 F T N) ad radium.

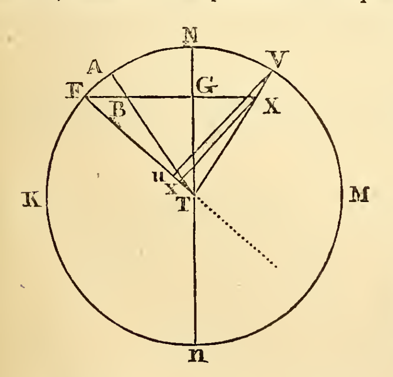
Scholium.

" Si motus nodorum mediocris horarius in quadraturis sit 16″. 16‴. 37^{iv}. 42^{v}. hoc est in anno toto sidereo 39°. 38′. 7″. 50‴. (1) erit T H ad T K in subduplicatâ ratione numeri 9,082764 ad numerum 10,0827646, hoc est ut 18,6524761 ad 19,6524761. Et propterea T H ad H K ut 18,6524761 ad 1. hoc est ut motus Solis in anno sidereo ad motum nodi medium 19°. 18′. 1″. 23⅔‴.

" At si motus medius nodorum Lunæ in 20 annis Julianis sit 360°. 50′. 15″. sicut ex observationibus in theoriâ Lunæ adhibitis deducitur, motus medius nodorum in anno sidereo erit 19°. 20′. 31″. 58‴. Et T H erit ad H K ut 360^{gr}. ad 19°. 20′. 31″. 58‴. hoc est ut 18,61214 ad 1. unde

In circulo quovis N K n M sumatur arcus N F ejusque sinus F G, ex centro ducatur recta T B A quæ secet hunc sinum in B, dico quod sinus summæ angulorum F T N, A T N erit ad T G cosinum anguli assumpti F T N, ut summa linearum F G, B G, ad lineam B T.

Ex alterâ parte puncti N sumatur arcus N V = N A, ducatur T V et producatur F G quæ



occurrat radio T V in X, ductoque radio F T eoque producto si opus est, ducantur, in ipsum perpendiculares X x, V u.

Liquet ex constructione, lineam B T esse æqualem lineæ X T, lineam G X esse æqualem lineæ B G, ideóque totam F X esse æqualem summæ linearum F G, B G; liquet pariter lineam V u esse sinum arcus F V qui est summa arcuum N F et N V sive N A, et propter triangula F X x, F T G similia, ob angulum F communem et rectos x et G est T F ad T G ut F X ad X x, et propter triangula similia u V T, x X T esse V u ad T V sive T F ut X x ad T X sive B T; unde ex perturbato ordine sit V u ad T G ut F X sive F G + B G ad B T; est itaque $BT = \frac{(FG + BG)\,TG}{Vu}$.

Ex hoc Lemmate facile probatur sinum æquationis in quovis loco esse ad sinum æquationis maximæ ut sinus summæ angulorum F T N + A T N ad radium; nam ex principiis trigonometricis, est sinus æquationis quæsitæ sive sinus anguli F T B ad sinum anguli F (qui est T G cosinus nempe anguli F T N) ut est B F ad B T hoc est, ut est B F ad $\frac{(FG + BG)\,TG}{Vu}$ per Lemma; ducatur uterque consequens in $\frac{Vu}{TG}$ fiet sinus æquationis quæsitæ ad V u qui est sinus summæ angulorum F T N + A T N ut B F ad F G + B G, sed ex notâ præcedenti est B F ad B F + B G ut K H ad T K + T H, et est K H ad T K + T H ut sinus æquationis maximæ ad radium; hinc tandem, sinus æquationis cujusvis ad sinum summæ angulorum F T N + A T N, ut sinus æquationis maximæ ad radium.

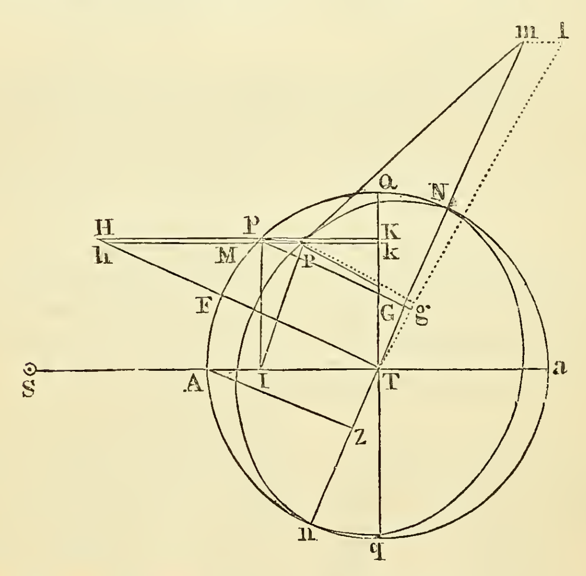
(1) * *Erit T H ad T K in subduplicatâ ratione*, &c. Est T S ad S K ut motus Solis ad motum horarium nodi in quadraturis, hoc est, ut 360. ad 39^{gr}. 38′. 7″. 50‴. sive ut 9.0827646 ad 1, ergo componendo est T S ad T K ut 9.0827646 ad 10.0827646. ergo T H media proportionalis inter T S et T K, *est ad T K in subduplicatâ ratione*, &c. Reliqua hujus scholii similibus calculis deducuntur, qui faciliores sunt quàm ut plenius explicentur.

motus mediocris horarius nodorum in quadraturis evadet 16″. 18‴. 48^iv. Et æquatio nodorum maxima in octantibus 1°. 29′. 57″."

PROPOSITIO XXXIV. PROBLEMA XV.

Invenire variationem horariam inclinationis orbis Lunaris ad planum eclipticæ.

Designent A et a syzygias; Q et q quadraturas; N et n nodos; P locum Lunæ in orbe suo; p vestigium loci illius in plano eclipticæ, et m T l motum momentaneum nodorum ut supra. Et si ad lineam T m



demittatur perpendiculum P G, p G et producatur ea donec occurrat T l in g, et jungatur etiam P g: erit angulus P G p inclinatio orbis lunaris ad planum eclipticæ, ubi Luna versatur in P; et angulus P g p inclinatio ejusdem post momentum temporis completum; ideóque angulus P P g variatio momentanea inclinationis. (m) Est autem hic angulus

(m) *Est autem angulus G P g ad angulum.* In triangulo P G g, sinus anguli G P g est ad lineam G g, ut sinus anguli P G g ad P G (sive P G, nam P g et P G quam minimum differunt) si verò P G assumatur pro radio, sinus anguli P G g est P p, ergo sinus anguli G P g est ad G g ut P p ad P G.

In triangulo G T g, est G g ad sinum anguli G T g ut T g sive T G ipsi proximè æqualis ad sinum anguli recti in G qui est radius pro quo P G hic assumitur; ergo ex æquo, sinus anguli G P g est ad sinum anguli G T g ut T G ad P G et P p ad P G conjunctim, et quia sinus parvorum angulorum sunt ut ipsi anguli, est *angulus G P g ad angulum,* &c.

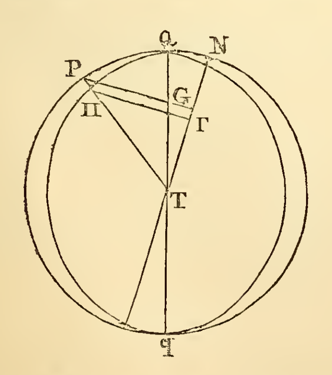
G P g ad angulum G T g ut T G ad P G et P p ad P G conjunctim. Et propterea si pro momento temporis substituatur hora; cùm angulus G T g (per Prop. XXX.) sit ad angulum 33″. 10‴. 33^{iv}. ut I T × P G × A Z ad A T cub. erit angulus G P g (seu inclinationis horariæ variatio) ad angulum 33″. 10‴. 3^{iv}. ut I T × A Z × T G × $\frac{\text{P p}}{\text{P G}}$ ad A T cub. Q. e. i.

Hæc ita se habent ex hypothesi quod Luna in orbe circulari uniformiter gyratur. Quod si orbis ille ellipticus sit, motus mediocris nodorum minuetur in ratione axis minoris ad axem majorem; uti supra expositum est. (n) Et in eâdem ratione minuetur etiam inclinationis variatio.

Corol. 1. Si ad N n erigatur perpendiculum T F, sitque p M motus horarius Lunæ in plano eclipticæ; et perpendicula p K, M k in Q T demissa et utrinque producta occurrant T F in H et h: (o) erit I T ad A T ut K k ad M p, et T G ad H p ut T Z ad A T, ideóque I T × T G æquale $\frac{\text{K k} \times \text{H p} \times \text{T Z}}{\text{M p}}$, hoc est, æquale areæ H p M h ductæ in rationem $\frac{\text{T Z}}{\text{M p}}$: et propterea inclinationis variatio horaria ad 33″. 10‴. 33^{iv}. ut H p M h ducta in A Z × $\frac{\text{T Z}}{\text{M p}}$ × $\frac{\text{P p}}{\text{P G}}$ ad A T cub.

Corol. 2. Ideóque si Terra et nodi singulis horis completis retraherentur a locis suis novis, et in loca priora in instanti semper reducerentur, ut situs eorum, per mensem integrum periodicum, datus maneret; tota

(n) * *Et in eâdem ratione minuetur etiam inclinationis variatio.* Ex Propositionis demonstratione liquet quod variatio inclinationis est ad

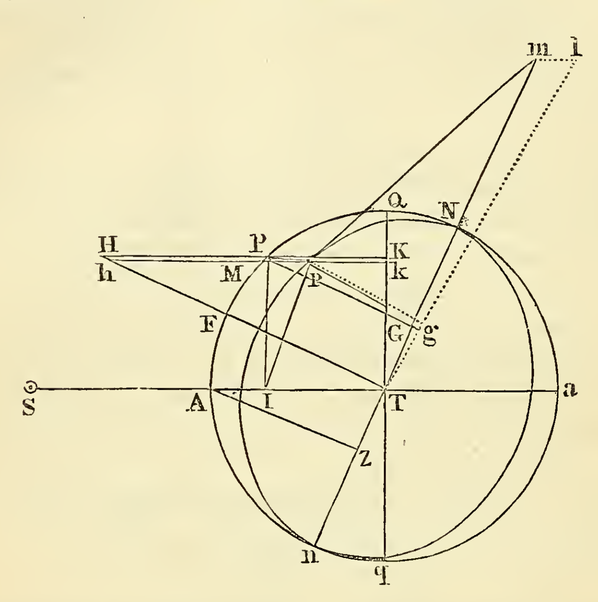


motum nodorum ut P p ad P G (sive ut sinus inclinationis plani ad radium) et ut P G ad T G; sumatur Π in ellipsi ad eamdem distantiam a nodo ac P in circulo, ratio P G ad T G eadem erit ac radio Π Γ ad T Γ, per constructionem cùm autem hic agatur de quantitate mediocri, sumatur eamdem esse plani inclinationem sive agatur de plano elliptico sive de plano circulari; ergo variatio inclinationis erit semper ut motus nodorum sive agatur de plano elliptico sive de plano circulari; sed motus nodorum mediocris in orbe circulari est ad ejus motum in orbe elliptico ut axis major ad minorem per Cor. Prop. XXXI.

In eâdem etiam ratione minuetur inclinationis variatio.

(o) * *Erit I T ad A T ut K k ad M p.* Est, ex naturâ circuli, ordinata p K cui æqualis est I T ad radium A T, ut fluxio abscissæ K k ad fluxionem arcûs M p, *et T G ad H p ut T Z ad A T*, producatur H p K ita ut occurrat lineæ N n in D, propter parallelas, HD, AT et HT, A Z per constructionem, est D T ad H D ut T Z ad A T, est pariter eamdem ob rationem D G ad p D ut T Z ad A T, quare sumendo differentiam terminorum duarum priorum rationum utriusque rationis *est T G ad H p ut T Z ad A T.*

inclinationis variatio tempore mensis illius foret ad $33''. 10'''. 33^{iv}$., (p) ut aggregatum omnium arearum H p M h, in revolutione puncti p genitarum, et sub signis propriis + et — conjunctarum, ductum in $AZ \times TZ \times$



$\frac{Pp}{PG}$ ad $Mp \times AT$ cub. (q) id est, ut circulus totus Q A q a ductus in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $Mp \times AT$ cub. (r) hoc est, ut circumferentia Q A q a ducta in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2\,Mp \times AT$ quad.

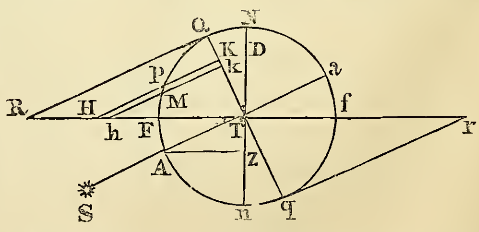
(p) * *Ut aggregatum omnium arearum H p M h sub signis propriis conjunctarum* scilicet prout linea M H sumitur in eamdem partem ac linea M K aut in partem oppositam; priore casu area H p M h signo affirmativo est afficienda, posteriore negativo.

(q) * *Id est, ut circulus totus Q A q a*, &c. Liquet ex ipsâ constructione, quod dum punctum p movetur ab F usque ad q, areæ H p M H constituunt aream positivam F A n q r f T F, dum ex q ad f procedit, areæ H p M h constituunt aream negativam q r f, quæ ex priori detracta relinquit semi-circulum F n f.

Quod dum punctum p procedit ex f ad Q, areæ H p M h efficiunt aream positivam f a N Q R F T f et dum ex Q ad F procedit, efficiunt aream negativam Q R F quæ ex priori detracta relinquit semi-circulum f N F.

Itaque omnes areæ H p M h sub signis propriis conjunctæ efficiunt circulum totum Q A q a.

Cæterum observandum variationem inclinationis esse positivam aut negativam, hoc est



crescere aut decrescere secundum signa quantitatis $AZ \times TZ$ de quibus in Corol. proximo dicemus.

(r) * *Ut circulus totus Q A q a ductus in A Z*

Corol. 3. Proinde in dato nodorum situ, variatio mediocris horaria, ex quâ per mensem uniformiter continuata variatio illa menstrua generari posset, est ad 33″. 10‴. 33^{iv}. ut $A Z \times T Z \times \frac{P p}{P G}$ ad $2 A T q$ sive ut $P p \times \frac{A Z \times T Z}{\frac{1}{2} A T}$ ad $P G \times 4 A T$, id est (cùm P p sit ad P G ut sinus inclinationis prædictæ ad radium, et $\frac{A Z \times T Z}{\frac{1}{2} A T}$ sit ad 4 A T (s) ut

$\times T Z \times \frac{P p}{P G}$ ad $M p \times A T$ cub. Si in hac ratione loco circuli Q A q a, ponatur ejus valor qui est circumferentia Q A q a ductâ in dimidium radii seu in $\frac{A T}{2}$, hæc ratio licet, circumferentia $Q A q a \times \frac{A T}{2} \times A Z \times T Z \times \frac{P p}{P G}$ ad $M p \times A T$ cub. Multiplicetur uterque terminus per 2. et dividatur per A T, non mutabitur ratio et fiet *ut circumferentia Q A q a ducta in* $A Z \times T Z \times \frac{P p}{P G}$ *ad* $M p \times A T$ *qu.*

(s) *Ut sinus duplicati anguli.* Ex trigonometriæ elementis sinus duplicati anguli A T n sive A T N, cujus sinus est A Z et cosinus T Z, est $\frac{2 A Z \times T Z}{A T}$ sive $\frac{A Z \times T Z}{\frac{1}{2} A T}$.

Quando autem duplum anguli A T N excedit semi-circulum, sive quando angulus A T N est rectus, signum sinus dupli anguli A T N, fit negativum ex positivo; quando angulus A T N excedit 180^{gr}. signum sinûs ejus dupli iterum fit positivus, sicque deinceps.

Positivum autem signum designat angulum planum per variationem minui, negativum verò signum eum angulum augeri significat, ita ut angulus minuatur dum nodus N recedit ex conjunctione A ad quadraturam ultimam Q, crescit verò dum nodus a quadraturâ Q ab oppositionem a movetur, iterum minuitur dum ab oppositione ad primam quadraturam q tendit, et denique augetur dum a quadraturâ q ad conjunctionem A redit; ita ut inclinationis angulus sit minimus cùm nodi in quadraturis Q et q versantur, maximus verò cùm nodi sunt in syzygiis A et a; quæ lex ab astronomis est observata, sed paulò accuratius ostendendum id sequi reverâ ex hâc Propositione.

Sit nodus N ubivis inter conjunctionem A et ultimam quadraturam Q, ductâque F T f perpendiculari in lineam nodorum, dum Luna movebitur ex N ad F inclinationis variatio designabitur per aream N A F T h, cùmque Luna tum versetur inter nodum et remotiorem quadraturam, motus nodi erit regressivus, ideóque cùm linea Y T fiat semper remotior a Lunâ quàm linea N T (punctum Y quod hic exaratum non est designat novum locum in quem nodus adscendens Lunæ movetur) inclinationis Lunæ angulus ad lineam T Y relatus minor erit quàm si ad T N referretur, area ergo N A F T h designabit imminutionem anguli inclinat. dum pergit Luna ab N ad F.

Dum Luna movetur ab F ad q pergit quidem ut prius nodus in antecedentia, sed productâ lineâ Y T, ejus productio erit vicinior Lunæ in area F q existenti quàm productio lineæ N T, ideóque inclinationis Lunæ angulus ad productionem lineæ T Y relatus major erit quàm si ad lineam T n referretur, sed hoc in casu area F R q designat inclinationis variationem, ergo area F A q designat incrementum anguli inclinationis.

Dum Luna ab n ad f movetur, motus nodi fit regressivus et ex N in Y migrat, et lineæ Y T productio remotior est a Lunâ in areâ n f versante quàm productio lineæ N T, ideo angulus inclinationis minor erit quàm si ad lineam T n referretur; ea verò variationis mutatio designatur per aream H n a f quæ ideo imminutionem anguli inclinationis designat.

Ab f ad Q crescit quidem inclinationis angulus, quia refertur ad lineam T Y; totum itaque illud variationis incrementum designatur per aream Q f r, sed a Q ad n, cùm motus nodi fiat progressivus, referaturque inclinationis angulus ad T l, minuitur is angulus, totaque imminutio designatur per aream N h r Q.

Resumantur hæc omnia, deprehenditur imminutionem anguli inclinationis exprimi per areas N A F h, q n H R, H n a f et N h r Q, quarum prima et ultima efficiunt Q A F T r, duæ mediæ aream q a f F R.

Totum verò incrementum anguli inclinationis exprimitur per areas F R q et Q f r, quarum hæc detracta ex area Q A F T r relinquit semi-circulum Q A F f, prior detracta ex areæ q a f T R relinquit semi-circulum q a f F ideóque circulus totus Q A q a designat imminutionem anguli inclinationis cùm nodus versatur in quovis puncto N quadrantis A Q.

Si hæc ratiocinia applicentur ad figuram Newtonianam ubi nodus N est in quadrante Q a, ex iis deprehendetur circulum Q A q a designare incrementum anguli inclinationis.

Si nodus in quadrante a q versetur; omnia eodem modo procedent ac in primo casu, mutatis solummodo litteris majusculis in minores, ideóque etiam ostendetur circulum Q A q a imminutionem anguli inclinationis designare; et pariter ubi nodus erit in quadrante q A casus hic ad secundum referri poterit, minuitur ergo inclinatio dum nodus procedit ab A ad Q, tumque est

sinus duplicati anguli A T n ad radium quadruplicatum) ut inclinationis ejusdem sinus ductus in sinum duplicatæ distantiæ nodorum a Sole, ad quadruplum quadratum radii.

Corol. 4. Quoniam inclinationis horaria variatio, ubi nodi in quadraturis versantur, est (per hanc Propositionem) ad angulum 33″. 10‴. 33^{iv}. ut $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ ad AT cub. (t) id est, ut $\frac{IT \times TG}{\frac{1}{2} AT} \times \frac{Pp}{PG}$ ad 2 A T; hoc est, ut sinus duplicatæ distantiæ Lunæ a quadraturis ductis in $\frac{Pp}{PG}$ ad radium duplicatum: summa omnium variationum horariarum, quo tempore Luna in hoc situ nodorum transit a quadraturâ ad syzygiam (id est, spatio horarum $177\frac{1}{6}$,) erit ad summam totidem angulorum 33″. 10‴. 33^{iv}., seu 5878″., ut summa omnium sinuum duplicatæ distantiæ Lunæ a quadraturis ducta in $\frac{Pp}{PG}$ ad summam totidem diametrorum; (u) hoc est, ut diameter ducta in $\frac{Pp}{PG}$ ad circumferentiam; id est, si inclinatio sit 5^{gr}. 1′., ut $7 \times \frac{874}{100000}$ ad 22, seu 278 ad 10000. Proindeque variatio tota, ex summâ omnium horariarum variationum tempore prædicto conflata, est 163″, seu 2′. 43″.

minima, siquidem inde crescere incipit usque ad a, ubi est maxima, siquidem inde decrescit usque ad q, ubi iterum est minima, indeque crescit usque ad A ubi iterum maxima est.

(t) * *Id est.* Ubi nodi versantur in quadraturis, recta N n coincidit cum Q.q, ideóque perpendicularis A E, abit in radium A T. Quarè $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ est ad A T cub. ut $IT \times AT \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ ad A T cub. sivè ut $IT \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ ad AT^2 ac dividendo per $\frac{1}{2}$ A T, ut $IT \times \frac{TG}{\frac{1}{2}AT} \times \frac{Pp}{PG}$ ad 2 A T.

(u) 121. * *Hoc est ut diameter.* Sit T I vel p K = y, radius Q T = 1, erit T K = $\sqrt{1 - yy}$, ex naturâ circuli, et T K = T G quia in hoc casu recta n N coincidit cum Q q, cùm nempe nodi versentur in quadraturis; ac proindè sinus duplicatæ distantiæ Lunæ a quadraturis, id est $\frac{IT \times TG}{\frac{1}{2}AT} = 2y \times \sqrt{1 - y^2}$. Jam ut obtineatur elementum areæ quæ componitur ex omnibus sinubus distantiæ duplicatæ, multiplicari debet sinus variabilis $2y \times \sqrt{1 - y^2}$, per elementum arcûs circuli, hoc est, per $\frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}}$, undè habetur elementum areæ quæsitæ = 2 y d y, sumptisque fluentibus, prodit area tota = y^2, factâ autem y = 1, erit area illa ubi Luna pergit a quadraturâ ad syzygiam, æqualis quadrato radii. Nunc verò ut habeatur summa totidem diametrorum multiplicandus est quadrans circuli per totam diametrum. Hinc si radius dicatur r, peripheria p, erit summa omnium sinuum duplicatæ distantiæ Lunæ a quadraturis, quo tempore Luna transit a quadraturâ ad syzygiam ad summam totidem diametrorum ut r^2 ad $\frac{p \times 2r}{4}$, sivè ut 2 r ad p, hoc est, ut diameter ad circumferentiam.

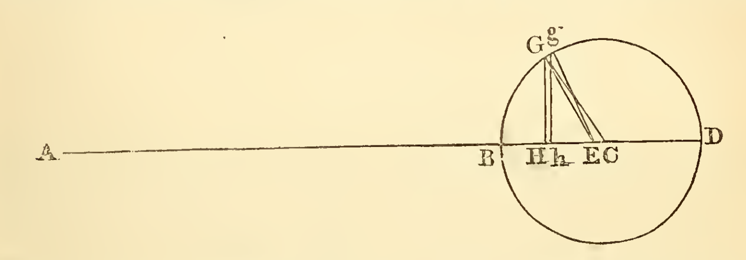
Si autem inclinatio sit 5^{gr}. 1′. Erit sinus P p, huic inclinationi respondens, ad radium P G, ut 874 ad 10000, (ex vulgaribus sinuum tabulis). Est autem diameter ad peripheriam ut 7. ad 22, quarè summa omnium sinuum duplicatæ distantiæ Lunæ a quadraturis ducta in $\frac{Pp}{PG}$ est ad summam totidem diametrorum ut $7 \times \frac{874}{10000}$ ad 22. Facile autem percipitur quod nodo existente in quadraturâ dum Luna a quadraturâ ad conjunctionem vadit, angulus inclinationis minuitur, quod tantumdem augetur, dum a conjunctione ad primam quadraturam movetur, minuitur rursum dum ad oppositionem vadit, augeturque iterum dum ad ultimam quadraturam redit, ita compensatis incrementis et decrementis ut nulla sensibilis supersit inclinationis mutatio, quâtenus scilicet nodus reverâ immotus in puncto Q supponitur.

PROPOSITIO XXXV. PROBLEMA XVI.

Dato tempore invenire inclinationem orbis lunaris ad planum eclipticæ.

Sit A D sinus inclinationis maximæ, et A B sinus inclinationis minimæ. Bisecetur B D in C, et centro C, intervallo B C describatur circulus B G D. In A C capiatur C E in eâ ratione ad E B quam E B habet ad 2 B A: et si dato tempore constituatur angulus A E G æqualis duplicatæ distantiæ nodorum a quadraturis, et ad A D demittatur perpendiculum G H: erit A H sinus inclinationis quæsitæ.

Nam G E q æquale est G H q + H E q = (x) B H D + H E q = H B D + H E q — B H q = H B D + B E q — 2 B H × B E =



B E q + 2 E C × B H = 2 E C × A B + 2 E C × B H = 2 E C × A H. Ideóque cùm 2 E C detur, est G E q ut A H. Designet jam A E g duplicatam distantiam nodorum a quadraturis post datum aliquod momentum temporis completum, et arcus G g ob datum angulum G E g erit ut distantia G E. (y) Est autem H h ad G g ut G H ad G C, et propterea H h est ut contentum G H × G g, seu G H × G E; id est ut $\frac{GH}{GE} \times GEq$ seu $\frac{GH}{GE} \times AH$, id est, ut A H et sinus anguli A E G conjunctim. Igitur si A H in casu aliquo sit sinus inclinationis, augebitur ea iisdem incrementis cum sinu inclinationis, per Corol. 3. Propositionis superioris, et propterea sinui illi æqualis semper manebit. (z) Sed A H, ubi punctum G incidit in punctum alterutrum B vel D, huic sinui æqualis est, et propterea eidem semper æqualis manet. Q. e. d.

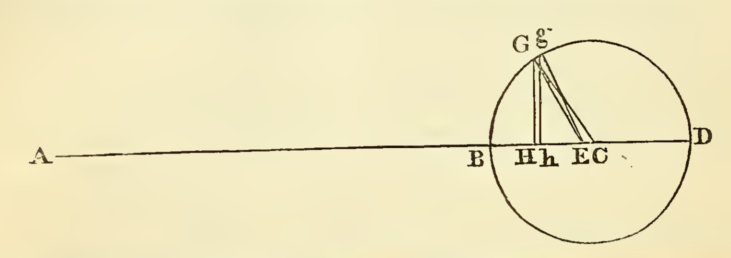
In hâc demonstratione supposui angulum B E G, qui est duplicata

(x) * = *B H D + H E q.* (Prop. V. Lib. II. Elem.) = H B D + H E q — B H q (per Prop. III. Lib. II. Elem.) = H B D + B E q — 2 B H × B E (Prop. VII. ejusdem Lib.) = B E q + 2 E C × B H (ob B D = 2 E C + 2 B E). Est autem (per constr.) E B² = 2 E C × B A; quare B E q + 2 E C × B H = 2 E C × A B + 2 E C × B H.

(y) * *Est autem H h ad G g.* (Per naturam circuli).

(z) *Sed A H.* (Per constr.)

distantia nodorum a quadraturis, uniformiter augeri. Nam omnes inæqualitatum minutias expendere non vacat. Concipe jam angulum B E G rectum esse, et in hoc casu G g esse augmentum horarium duplæ distantiæ nodorum et Solis ab invicem, et inclinationis variatio horaria in eodem casu (per Corol. 3. Prop. novissimæ) erit ad 33″. 10‴. 33^{iv}. (a) ut contentum sub inclinationis sinu A H et sinu anguli recti B E G, qui est duplicata distantia nodorum a Sole, ad quadruplum quadratum radii; id est, ut mediocris inclinationis sinus A H ad radium quadruplicatum; hoc



est (cùm inclinatio illa mediocris sit quasi $5^{gr}.8'\frac{1}{2}$) ut ejus sinus 896 ad radium quadruplicatum 40000, sive ut 224 ad 10000. Est autem variatio tota, sinuum differentiæ B D respondens, ad variationem illam horariam (b) ut diameter B D ad arcum G g; id est, ut diameter B D ad semicircumferentiam B G D et tempus horarum $2079\frac{7}{10}$ quo nodus pergit a quadraturis ad syzygias, ad horam unam conjunctim; hoc est, ut 7 ad 11 et $2079\frac{7}{10}$ ad 1. Quare si rationes omnes conjungantur, fiet variatio tota B D ad 33″. 10‴. 33^{iv}. ut $224 \times 7 \times 2079\frac{7}{10}$ ad 110000, id est, ut 29645 ad 1000, et inde variatio illa B D prodibit 16′, $23\frac{1}{2}$″.

Hæc est inclinationis variatio maxima quatenus locus Lunæ in orbe suo non consideratur. Nam inclinatio, si nodi in syzygiis versantur, (c) nil mutatur ex vario situ Lunæ. At si nodi in quadraturis consistunt,

(a) * *Ut contentum sub inclinationis sinu A H, et sinu anguli recti B E G*, hoc est, ut contentum sub mediocris inclinationis sinu A H (quia in hoc casu A H = A C) et radio *ad quadruplum quadratum radii; id est, ut mediocris inclinationis sinus A H, ad radium quadruplicatum.*

(b) * *Ut diameter B D ad arcum G g.* Nam, in hâc constructione, variatio tota sinuum differentiæ B D respondens per diametrum B D exprimitur, et H h est incrementum sinus inclinationis tempore quod per G g designatur, sive horæ tempore; sed ubi punctum H cadit in centro C, et punctum G in medio semi-circuli, tunc est G g = H h; ergo, est diameter B D ad arcum G g ut variatio tota ad variationem horariam in octantibus; sed ut sunt $2079\frac{7}{10}$ horæ quæ effluunt dum nodus pergit a quadraturâ ad syzygiam ad unam horam, ita semi-circumferentia B G D ad G g, est ergo G g = $\frac{BGD \times 1^h}{2079\frac{7}{10}{}^h}$, ideóque variatio tota est ad variationem horariam in octantibus ut B D ad $\frac{BGD \times 1^h}{2079\frac{7}{10}{}^h}$ sive ut B D ad B G D et $2079\frac{7}{10}{}^h$ ad 1^h conjunctim.

(c) * *Nil mutatur ex vario situ Lunæ.* Nam ex demonstratione Prop. XXXIV. inclinationis variatio horaria est ad angulum 33″. 10‴. 33^{iv}. ut $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ ad A T cub. sed nodis versantibus in syzygiis fit A Z = o quare quantitas $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$

inclinatio minor est ubi Luna versatur in syzygiis, quam ubi ea versatur in quadraturis, excessu 2′. 43″.; uti in Propositionis superioris Corollario quarto indicavimus. Et hujus excessûs dimidio 1′. 21½″. variatio tota mediocris B D in quadraturis lunaribus diminuta fit 15′. 2″., in ipsius autem syzygiis aucta fit 17′. 43″. Si Luna igitur in syzygiis constituatur, variatio tota in transitu nodorum a quadraturis ad syzygias erit 17′. 45″.: ideóque si inclinatio, ubi nodi in syzygiis versantur, sit 5gr. 17′. 20″.; eadem, ubi nodi sunt in quadraturis, et Luna in syzygiis, erit 4gr. 59′. 35″. Atque hæc ita se habere confirmatur ex observationibus.

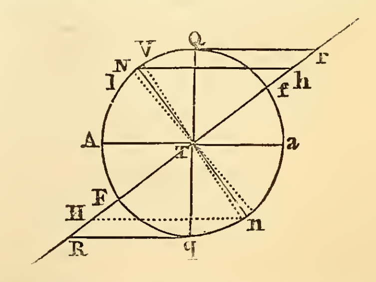
Si jam desideretur orbis inclinatio illa, (d) ubi Luna in syzygiis et nodi ubivis versantur; fiat A B ad A D ut sinus graduum 4. 59′. 35″. ad sinum graduum 5. 17′. 20″., et capiatur angulus A E G æqualis duplicatæ distantiæ nodorum a quadraturis; et erit A H sinus inclinationis quæsitæ. (e) Huic orbis inclinationi æqualis est ejusdem inclinatio, ubi Luna distat 90gr. a nodis. In aliis Lunæ locis inæqualitas menstrua, quam inclinationis variatio admittit, (f) in calculo latitudinis Lunæ compensatur, et quo-

fit etiam o, evanescit itaque hoc in casu horaria variatio, ideóque in vario situ Lunæ non mutatur ejus orbitæ inclinatio. Et quidem idem citra calculum patet ex ipsâ rei naturâ, nam versantibus in syzygiis, sive Sole existente in lineâ nodorum, Sol est in eo plano in quo jacet linea nodorum, sed linea nodorum est in plano orbitæ lunaris, ergo Sol in ipsâ orbitâ lunari productâ positus censeri potest, ac per consequens qualiscumque sit ejus actio in Lunam, ipsam ex plano utrique communi neutiquam dimovebit.

(d) * *Ubi Luna in syzygiis et nodi ubivis versantur.* Nam dum Luna ab unâ syzygiâ ad eamdem syzygiam redit, tota variatio menstrua est ad 33″. 10‴. 33iv. ut $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad 2 A T q, sive ut ex Cor. 3. Prop. præcedentis constat ut inclinationis sinus ductus in sinum duplicatæ distantiæ nodi a Sole ad quadruplum quadratum radii, sed per hujus Probl. constructionem in eâ ratione est A H, si modò A B sit ut sinus minimæ inclinationis et A D sinus maximæ, sed 4gr. 59′. 35″. est minimus inclinationis angulus ubi Luna est in syzygiis et 5gr. 17′. 20″. est maximus. *Ergo fiat A B ad A D ut sinus graduum* 4gr. 59′. 35″., &c.

(e) *Huic orbis inclinationi æqualis est ejusdem inclinatio, ubi Luna distat.* 90gr. *a nodis.* Minima inclinatio ubi Luna distat 90gr. a nodis est ubi nodi sunt in quadraturis, nonagesimus autem a nodis gradus incidit in ipsam syzygiam, itaque minima inclinatio eadem est ac in præcedenti casu; maxima verò inclinatio est cùm nodi sunt in ipsis syzygiis, et nonagesimus a nodis gradus tunc quidem incidit in quadraturas, sed tunc inclinatio nihil mutatur ex vario situ Lunæ, itaque eadem est, sive Luna in syzygiis sive in quadraturis versetur, eadem ergo est iterum maxima inclinatio ac in casu præcedenti, ideóque in hoc casu A B et A D eadem assumenda sunt ac in casu præcedenti: reliquum ratiocinium hic etiam adplicatur, nam quamvis tempus reditûs Lunæ ad nonagesimum a nodo gradum brevior sit tempore ejus reditûs ad syzygiam sive mense synodico, siquidem mense periodico etiam brevior est, tamen hic casus ad fictionem Corollarii secundi magis accedit, in quo nempe supponitur nodum toto mense sensibilem viam non esse emensum, quod quidem accuratius dicetur si assumatur reditus Lunæ ad eumdem situm respectu nodi; hic ergo eadem constructio ac prior potiori jure erit adhibenda.

(f) * *In calculo latitudinis compensatur, et quodammodo tollitur per inæqualitatem menstruam motus nodorum.* Calculus latitudinis fit, positâ inclinatione orbitæ lunaris ad planum eclipticæ,

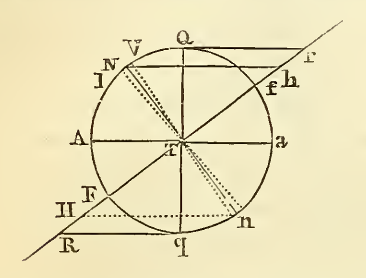


et assumptâ distantiâ Lunæ a nodo; hinc latitudo Lunæ obtinetur, quæ crescit a nodo ad gradum a nodo nonagesimum, inde decrescit accedendo ad alterum nodum, &c. Procedat

dammodo tollitur per inæqualitatem menstruam motus nodorum (ut supra diximus) ideóque in calculo latitudinis illius negligi potest.

(g) *Scholium.*

ergo Luna a nodo N ad punctum F 90gr. a nodo dissitum, motus medius nodi est major motu vero, toto eo intervallo, ut superius (ad Prop. XXXII.) ostensum est, ergo assumptâ mediocri distantiâ a nodo quæ verâ major est, et mediocri inclinatione quæ convenit illi mensi, latitudo



major invenietur quàm debuisset; sed quoniam in casu istius figuræ minuitur angulus inclinationis dum Luna movetur ab N in F, et is angulus ad mediocrem imminutionem tunc pervenit cùm Luna est in F circiter, quia area N F h est ferè semi-circulo æqualis, hinc inclinatio orbitæ angulum majorem efficit quàm is qui per inclinationem mediocrem supponitur, unde latitudo vera major evadit quàm ea quæ propter mediocrem inclinationem orbitæ obtinetur: hinc ex eo quod nodi motûs mediocris loco motûs veri assumitur, invenitur latitudo major vera, sed ex eo quod inclinatio mediocris assumitur loco veræ, invenitur latitudo minor verâ; inæqualitates itaque menstruæ, quas variatio inclinationis et motus nodorum admittunt, sese mutuo compensant in calculo latitudinis. Cæteri casus eamdem compensationem suppeditant, v. gr. dum Luna ex F in q movetur, motus verus nodi est minor motu vero, hinc Luna est reverâ remotior a nodo quàm statuitur per motum medium nodi, ideóque latitudo major supponitur quàm est (quia in secundo quadrante a nodo quò propior est Luna a nodo ascendente N, ideóque eo remotior a descendente n, eò ejus latitudo est major) sed cùm orbita Lunæ habuerit in F inclinationem mediocrem, augetur is angulus dum movetur Luna ab F ad q, ideóque assumendo eam inclinationem mediocrem, minor obtinetur latitudo quàm reverâ est, ergo, propter inæqualitatem motûs nodi, latitudo quæ ex motu nodi mediocri habetur, est major verâ, latitudo quæ obtinetur ex inclinatione mediocri est minor verâ, compensantur ergo errores, &c.

(g) * *Scholium.* Scholio hoc tradit Newtonus rationes quibus quædam ex æquationibus lunaribus ad calculos revocari possint, sed dolendum est illum non aperuisse vias quibus usus est ad eas concinnandas: defectum hunc utcumque reparare sumus conati, et methodos aperuimus quibus ex gravitatis theoriâ eas æquationes deducere liceat; quantum fieri potuit iisdem usi sumus methodis quas Newtono familiares fuisse constat, et ad ejus solutiones proxime nos accessisse percipient viri docti cùm paucis duntaxat secundis ab ipsius numeris discedat calculus noster, et ejus consequentiæ planæ sint similes iis quas ex suis Principiis Newtonus derivavit; utrum aliis methodis res felicius absolvi potuerit, viderint doctiores; speramus tamen hos calculos, ut legitimis principiis nixos, lectoribus nostris gratos fore, et forte eos juvare ut melius quid excogitent: cæterum hoc scholium in quinque paragraphos commode distribui potest; in primo Newtonus indicat calculum ejus æquationis Lunæ, quæ æquatio solaris prima dicitur: in secundo, tradit æquationes solares motûs nodorum et apogæi Lunæ; in tertio illam æquationis solaris correctionem tradit quæ ab excentricitate orbitæ lunaris pendet; in quarto aliam adhuc correctionem æquationis solaris addit, quæ nempe oritur ex inclinatione orbitæ lunaris ad planum eclipticæ; in quinto denique agit de æquationibus motûs Lunæ et ejus apogæi, quæ pendent ex situ apogæi Lunæ respectu Solis.

Ut autem hæc omnia et potissimum ea quæ æquationem solarem Lunæ spectant, et quæ primo, tertio et quarto paragrapho a Newtono indicantur, meliùs intelligantur, totum eum calculum qualis ex theoriâ gravitatis instituendus nobis videbatur, uno tenore tradendum censuimus.

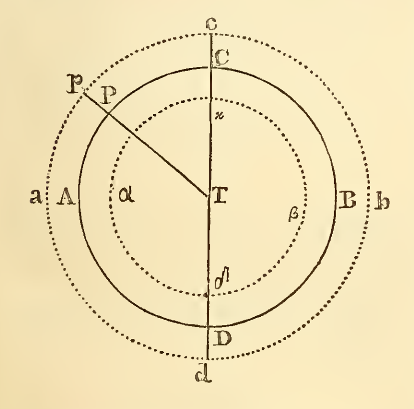
De incremento motûs medii Lunæ, et ejus æquatione annuâ, ex Solis actione pendentibus, primum in hypothesi orbem Lunæ esse circularem, postea in hypothesi orbem Lunæ esse ellipticum. Denique in orbe lunari ad eclipticam inclinato.

THEOR. I.

Corpus P revolvatur in circulo A D B C circa corpus T a quo retineatur per vim decrescentem secundùm quadrata distantiarum; accedat autem vis quædam constans quæ retrahat perpetuo corpus P a corpore centrali T, sed quæ sit exigua respectu vis ejus corporis T; et describatur circulus a d b c in tali distantiâ ut residuum vis quam exerceret corpus T in eâ distantiâ (detractâ eâ vi extraneâ) sit ad vim quâ corpus P revolvebatur in circulo A D B C inversè ut cubi radiorum T p, T P; dico, quod propter illam vim extraneam fiet ut corpus P circa circulum a d b c oscilletur, nunc citrà nunc ultra delatum, parum

ab illo discedens, ita ut ejus motus assumi possit quasi fieret in eo circulo.

Nam fingatur eam vim extraneam non esse constantem, sed talem ut, post discessum corporis P a circulo A D B C propter ejus vis extraneæ actionem, residuum vis quam exercet corpus T in distantiâ ad quam abit corpus P (detractâ eâ vi extraneâ) sit semper inversè ut cubi distantiarum, eveniet ut (per Prop. IX. Lib. I. Princip.) corpus P spiralem logarithmicam describat, in quâ angulus curvæ cum radio ad curvam ducto semper manet idem; verùm quoniam ab initio vis illa extranea fuit constans, liquet quod priusquam corpus P circulum a d b c attigerit, ea vis plus imminuebat vim centralem quàm ut decrescat secundùm cubos distantiarum auctarum, ideóque quod anguli curvæ cum radio ad curvam ducto semper crescere debuerunt, sed incremento perpetuo minore quo magis accedit virium decrescentium ratio ad rationem inversam



cubi distantiarum; perveniet ergo corpus P ad circulum a d b c, et angulus curvæ cum radio, quando P erit in circulo a d b c, erit recto major, quia semper crevit is angulus a tempore quo corpus P circulum A D B C describebat in quo angulus radii cum curvâ rectus est; ideo P ultra circulum a d b c perget; cùm autem P ultra circulum a d b c pervenerit, detractio vis constantis vim centralem minus minuet quàm secundum cubum distantiarum; itaque angulus curvæ cum radio minor fiet quàm si logarithmica spiralis describeretur, et tandem reducetur ad angulum rectum ultra circulum a d b c, inde verò curva cum radio faciet angulum acutum, nam vis centralis illic major est quàm ut circulus describi possit, quod sic demonstrari potest; areæ æqualibus temporibus descriptæ durante toto hoc corporis P motu sunt ubique æquales, quoniam vires ad centrum T constanter diriguntur (ex Hyp.) ideóque in eo loco ultra circulum a d b c in quo angulus curvæ cum radio fit rectus, arcus dato tempore descriptus foret ipsa basis areæ descriptæ cujus altitudo est distantia a centro seu ipse radius, et is arcus debet esse ad arcum qui eodem tempore descriptus fuisset a corpore P si in circulo A D B C moveri perseverasset, nullaque vis extranea accessisset inversè ut radii; sagittæ autem eorum arcuum (quæ sunt semper ut quadrata arcuum divisa per radios) forent inversè ut cubi radiorum, sed vis centralis ultra circulum a d b c, minus decrescit quàm secundum cubum distantiarum, ergo sagitta arcûs descripti quæ est ejus vis centralis effectus, major est sagittâ quæ foret secundùm rationem inversam cubi distantiarum, ergo ea sagitta quæ per vim centralem producitur, major est illâ quæ obtineretur si circulus in eo loco describeretur; ergo corpus P a tangente magis discedit versus centrum quàm si circulum describeret, ergo ejus via acutum angulum cum radio efficere incipit, sicque accedit iterum ad circulum a d b c angulis curvæ cum radio perpetuo decrescentibus; cùm autem infra eum circulum transiverit angulus quem facit curva cum radio, iterum augetur, donec is angulus rectus evadat, inde verò fiet obtusus quia vis centralis illic minor est quàm ut corpus P in circulo moveri pergat; redit ergo corpus P versus circulum a d b c idque perpetuâ oscillatione, ut liquet ex collatione motûs quem haberet in logarithmicâ spirali cum hoc motu: sed quò minor est vis illa data quæ ex centrali detrahitur, eò illæ alternæ oscillationes minus a circulo a d b c recedent, quare si vis ea exigua supponatur respectu vis centralis corporis T, supponi etiam potest motum corporis P in circulo a d b c fiet. Q. e. d.

Cor. 1. Si vis illa extranea et constans perpetuò traheret corpus P versus T, iisdem argumentis ostendetur quod si describatur circulus interior $\alpha\ \delta\ \beta\ \kappa$, in tali distantiâ a centro T, ut vis corporis T ad eam distantiam aucta per vim illam extraneam sit ad vim in circulo A D B C inversè ut cubi radiorum circulorum A D B C, $\alpha\ \delta\ \beta\ \kappa$, corpus P hinc inde cis citrave circulum $\alpha\ \delta\ \beta\ \kappa$ oscillatur, et si ea vis extranea sit exigua, censeri potest quod corpus P in eo ipso circulo $\alpha\ \delta\ \beta\ \kappa$ movebitur.

Cor. 2. Et si vis illa extranea constans non foret, sed cresceret secundùm aliquam dignitatem positivam distantiarum, iisdem omninò ratiociniis ostendi posset quod corpus P in circulo a d b c vel $\alpha\ \delta\ \beta\ \kappa$ movebitur, eveniet solummodo ut radius T p paulum diversus sumi debeat ab eo qui inveniretur si vis ea extranea constans foret.

Schol. Aliis methodis effectum illius vis extraneæ ad calculos revocari posse non negamus, et quidem unam aut alteram methodum ab hâc diversam eumdem in finem in sequentibus proponemus.

THEOR. II.

Positis iis quæ in primo Theoremate supponuntur, dicatur r radius circuli A D B C, sit ϱ radius circuli a d b c, vel $\alpha\ \delta\ \beta\ \kappa$, sit p radiorum r et ϱ differentia; vis corporis T in distantiâ r dicatur V et in eadem distantiâ vis extranea dicatur Y quæ crescat ut distantiæ a centro T et quæ positiva censeatur si distrahat corpus P a centro, negativa verò si illud attrahat ad centrum,

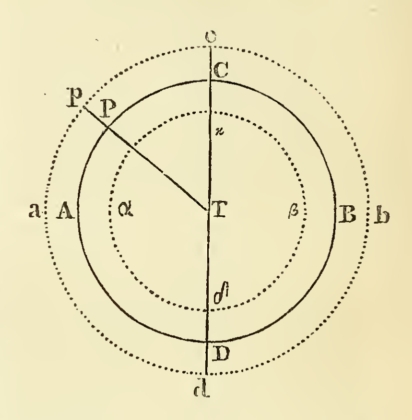
dico quod radius ϱ erit semper æqualis quantitati $\frac{V-3Y}{V-4Y}$ r, sive quantitati r $\times$ ($1+\frac{Y}{V}+\frac{4Y^2}{V^2}$ $+\frac{16Y^3}{V^3}$, &c.) et omissis terminis propter exiguitatem quantitatis Y evanescentibus, est ille radius $\varrho = r \times (1+\frac{Y}{V})$.

Nam vis corporis T in distantia ϱ erit $\frac{rr}{\varrho\varrho}$ V vis extranea erit $\frac{\varrho}{r}$ Y ex hypoth., ideóque vis quâ circulus a d b c (vel $\alpha\,\delta\,\beta\,\varkappa$) describitur est $\frac{rr}{\varrho\varrho}$ V $-\frac{\varrho}{r}$ Y, sed hæc vis debet esse ad vim V quâ circulus A C B D describitur inversè ut cubi radiorum, sive ut $\frac{1}{\varrho^3}$ ad $\frac{1}{r^3}$ (per Theor. præced.) ergo est $\frac{V}{\varrho^3} = \frac{V}{r\varrho^2} - \frac{Y\varrho}{r^4}$, sive reductis terminis ad eumdem denominatorem est $\varrho^4 Y = r^3 V \times \overline{\varrho - r} = \pm r^3 p V$. Loco ϱ scribatur r $\pm$ p fiet $r^4 Y \pm 4 r^3 p Y + 6 r^2 p^2 Y \pm 4 r p^3 Y + p^4 Y = \pm r^3 p V$, sive deletis terminis ubi p superat primum gradum, quoniam hæc quantitas exigua est, fit $r^4 Y \pm 4 r^3 p Y = \pm r^3 p V$, sive $\pm p V \mp 4 p Y = r Y$, unde obtinetur $\pm p = \frac{rY}{V-4Y}$; ideóque ϱ, quod est r $\pm$ p, fit $\frac{V-3Y}{V-4Y}$ r qui valor in seriem reductus est r $\times$ ($1+\frac{Y}{V}+\frac{4Y^2}{V^2}$, &c).sive r $\times$ $(1+\frac{Y}{V})$.

THEOR. III.

Dicatur M tempus periodicum corporis P in circulo A D B C, dico quod ejus tempus periodicum in circulo a d b c (vel $\alpha\,\delta\,\beta\,\varkappa$) erit M $\times$ $(1+\frac{2Y}{V})$.

Dem. Tempus periodicum corporis P revolventis in circulo a d b c (vel $\alpha\,\delta\,\beta\,\varkappa$) propter vim extraneam Y detractam vel additam, est ad tempus periodicum ejus corporis P cùm revolvebatur in circulo A D B C citra omnem vim extraneam, ut est quadratum radii ϱ ad quadratum radii r; nam quia vis Y est semper directa ad centrum T, areæ manebunt temporibus proportionales, quamcumque in viam flectatur corpus P, ergo, si tandem ejus via in circulum a d b c (vel $\alpha\,\delta\,\beta\,\varkappa$) mutetur, tempus quo describetur peripheria a d b c (vel $\alpha\,\delta\,\beta\,\varkappa$) erit ad tempus quo describebatur peripheria A D B C, ut tota area circuli a d b c (vel $\alpha\,\delta\,\beta\,\varkappa$) ad totam aream circuli A D B C, ideóque ut quadrata radiorum ϱ et r, sive (per Theor. præced.) ut $\frac{\overline{V-3Y}|^2}{\overline{V-4Y}|^2}$ r r ad r r, ideóque ut $\frac{\overline{V-3Y}|^2}{\overline{V-4Y}|^2}$ ad 1. sed hâc fractione in seriem resoluta ea evadit $1+\frac{Y}{V}$ $+\frac{4Y^2}{V^2}$, &c. &c. quæ series valde convergit propter exiguitatem istius fractionis $\frac{Y}{V}$ et illius



quadratum est $1+\frac{2Y}{V}+\frac{9Y^2}{V^2}+\frac{40Y^3}{V^3}$, &c. Ergo ut 1 ad $1+\frac{2Y}{V}+$, &c. ita M ad M $\times$ $(1+\frac{2Y}{V})$ quod est tempus quo describetur peripheria a d b c vel $\alpha\,\delta\,\beta\,\varkappa$.

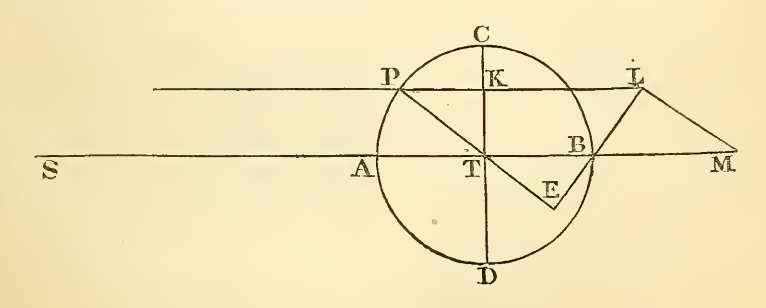
THEOR. IV.

Sit T Terra, P Luna, A D B C circulus quem Luna describit; sit S T distantia mediocris Terræ a Sole quæ dicatur a; dicatur F vis Solis in Terram in mediocri illâ distantiâ, Sol supponatur immotus; distantia Lunæ a Terrâ P T dicatur r et ea non obstante actione Solis in Lunam eadem manere censeatur; sit C P distantia Lunæ a quadraturâ proxima quæ dicatur u, sit ejus sinus y, sit ejus cosinus z; dico quod ea pars vis Solis quæ agit in Lunam secundùm directionem radii P T, est ubivis $\frac{F}{a} \times (\frac{3yy}{r} - r.)$

Nam, secundùm constructionem Prop. LXVI. Lib. I. Princip., repræsentetur vis Solis quæ dicitur F per lineam S T vel S K, ea vis Solis quâ trahitur Luna in loco P repræsentetur per lineam S L, et hæc vis censeatur composita ex duabus S M et L M, quarum L M sit parallela radio P T, cùm autem linea S M sit æqualis lineæ S T $\pm$ T M, et Terra trahatur per vim S T non secus ac Luna, situs respectivus Lunæ ac Terræ per eam vim S T non mutatur, ideo sola ea pars vis S M quæ exprimitur per T M consideranda

venit; præterea ex naturâ gravitatis, est S K ad S L ut est $\frac{1}{SK^2}$ ad $\frac{1}{\overline{SK \mp PK}|^2}$ sive ut est $SK^2 \mp 2\,SK \times PK + PK^2$ ad SK^2, aut omisso termino PK^2 ut $SK \mp 2\,PK$ ad S K, sive quoniam 2 P K est exiguum respectu lineæ S K ut S K ad $SK \pm 2\,PK$ est ergo S L sive $SK + KL = SK \pm 2\,PK$ et $KL = 2\,PK$, cùm autem linea P L sit proxime parallela lineæ S M, et ex constructione P T sit parallela L M, est T M proxime æqualis lineæ P L, et est $PL = PK + 2\,KL = 3\,PK$; ex puncto L ducatur perpendiculum in radium P T (productum si necesse sit) et vis T M, seu vis ipsi æqualis P L resoluta intelligatur in vim P E et vim L E, vis L E radio P T sit perpendicularis ideóque vim centralem non afficit, vis P E secundùm directionem radii agat, sicque punctum P a centro T distrahat, altera autem pars quæ per L M repræsentatur secundùm directionem radii agens punctum P versus centrum trahit; ergo ea pars Solis quæ agit in Lunam secundùm directionem radii P T est differentia virium P E et L M.

Jam verò ob parallelas S L, S M et T P, L M est $LM = TP = r$, et cùm P K sit proxime perpendicularis in lineam T C, erit P K sinus arcûs P C qui sinus dictus est y, ideóque $PL = 3\,PK = 3\,y$, cùm autem triangula P K T, P E L sint similia, est P T (r) ad P K (y) ut P L (3 y) ad P E quod erit ergo $\frac{3\,yy}{r}$ et differentia virium P E et L M est $\frac{3\,yy}{r} - r$, quæ differentia positiva est cùm $\frac{3\,yy}{r}$ superat r, tuncque Lunam a centro distrahit, negativa quando $\frac{3\,yy}{r}$ minus efficit quàm r, tuncque Lunam ad centrum attrahit; cùm ergo linea S T sive a repræsentet totam vim Solis in Terram, eaque vis dicatur F, et quantitas $\frac{3\,yy}{r} - r$ repræsentet eam partem vis Solis quæ in Lunam agit secundùm directionem P T, fiat ut a ad $\frac{2\,yy}{r} - r$, ita F ad eam partem vis Solis quæ afficit vim centralem Terræ in Lunam, quæ idcircò erit $\frac{F}{a} \times (\frac{3\,yy}{r} - r.)$ Q. e. o.



Corol. Si transferatur Luna in alium orbem a d b c, α δ β κ cujus radius sit ϱ, dico, quod, manente distantiâ Lunæ a quadraturâ proximâ, ea pars vis Solis quæ afficit vim centralem Terræ in Lunam, crescet ut illæ distantiæ ϱ, eritque ideo $\frac{\varrho}{r} \times \frac{F}{a} \times (\frac{3\,yy}{r} - r)$, nam cùm arcus p c ejusdem numeri graduum censeatur ac arcus P C, sinus eorum erunt ut radii, ideóque sinus arcûs p c erit $\frac{\varrho}{r}\,y$, demonstrabitur verò iisdem plane argumentis quibus in Theoremata usi sumus, quod, si Luna in circulo a d b c vel α δ β κ moveretur, ea pars vis Solis quæ secundùm directionem radii P T exercetur, erit $\frac{F}{a} \times (3\,\frac{\frac{\varrho\varrho y^2}{r^2}}{\varrho} - \varrho) = \frac{F}{a} \times \frac{3\,\varrho^2 y^2 - r^2 \varrho^2}{r^2 \varrho} = \frac{F}{a} \times \frac{3\,\varrho y^2 - r^2 \varrho}{r^2} = \frac{\varrho F}{r a} \times (\frac{3\,y^2}{r} - r.)$

THEOR. V.

Effectus actionis Solis in Lunam secundùm directionem radii orbitæ lunaris exercitæ intelligi potest, si concipiatur Lunam ex suâ orbitâ A D B C in aliam transferri, cujus singulæ particulæ quamminimæ sint portiones circulorum talium ut vis centralis Terræ in singulo circulo agens, sublata vel addita vis Solis quæ in eo loco exerceretur, sit ad vim centralem Terræ in circulo A D B C citra Solis actionem agentem, inversè ut cubus radii ejus circuli ad cubum radii circuli A D B C.

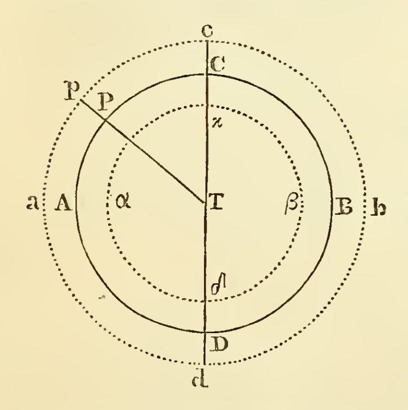
Etenim cùm ea vis Solis per gradus infinitè parvos crescat vel decrescat sitque nulla cum $\frac{3\,yy}{r} = r$, paulo post minima sit, sicque gradatim crescat, si constans censeatur per tempusculum aliquod, brevissime transibit Luna in circulum a d b c illi vi congruum per Theor. I., mox verò cùm vis Solis crescat quantitate quàm minimâ, ea vis censeatur constans per alterum tem-

pusculum, transibit Luna ex circulo primæ vi congruo in alterum huic incremento consentaneum, sicque semper, ideóque in singulis particulis arcûs C P Luna censeri potest delata in circulum vi Solis in eo puncto agenti congruum.

THEOR. VI.

Manentibus quæ in Theor. IV. supposita sunt, dicatur c tota circumferentia cujus radius est r, dicatur Y vis Solis agens in Lunam secundum directionem P T et in datâ distantiâ C P a quadraturâ C, quæ distantia C P dicatur u, dicatur M tempus periodicum Lunæ in circulo A D B C citrà Solis actionem, arcus exiguus a puncto P assumptus dicatur d u, dico quod tempus quo similis arcus describetur in orbitâ in quam Luna per actionem Solis est translata, erit $\frac{M\,d\,u}{c} \times (1 + \frac{2\,Y}{V} +$, &c.)

Nam si vis Y quæ in punctum P a Sole exercetur, in exiguas particulas divideretur, et singula quæ dicatur d Y maneret constans durante unicâ revolutione Lunæ, sicque gradatim Lunam

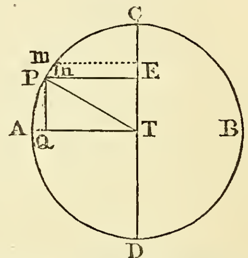


in circulum a d b c transferret, tempus periodicum in singulo circulo excederet tempus periodicum in circulo præcedenti quantitate $\frac{2\,d\,Y}{V}$. Hinc tandem tempus periodicum quo circulus a d b c describeretur, foret $M \times (1 + \frac{2\,Y}{V} +$ &c.) per Theor. III. et tempus quo arcus similis arcui d u describeretur in eo circulo, foret ad hoc tempus periodicum ut d u ad c, foret itaque $\frac{M\,d\,u}{c} \times (1 + \frac{2\,Y}{V} +$ &c.) sed singulæ particulæ orbitæ quam Luna describit propter adjunctionem vis Solis, spectari possunt quasi pertinerent ad circulos congruos vi Solis in illis punctis agentis, per Theor. V. Ergo, tempus inventum est illud ipsum, quo durante, Luna describet arcum similem arcui d u in orbitâ in quam transfertur per actionem Solis.

LEMMA I.

Invenire integrales quantitatum y d u, z d u, y^2 d u, z^2 y d u, z y^2 d u, y z^2 d u, y^3 d u, y^4 d u, &c. factarum ex elemento arcûs et dignitatibus ejus sinûs y, vel ejus cosinus z.

Ex naturâ circuli triangulum P T E est simile triangulo fluxionali P m n; ideóque est P T (r) ad P m (d u) ut P E (y) ad P n (d z), ut T E (z) ad m n (d y), hinc est $d\,u = \frac{r\,d\,z}{y} = \frac{r\,d\,y}{z}$;



hinc fit primò, ut, omnes termini in quibus alteruter factorum y vel z quantitatis d u dimensionem habet imparis numeri, possint integrari; nam loco elementi d u, ponatur ejus valor $\frac{r\,d\,z}{y}$ si y sit imparis dimensionis, vel $\frac{r\,d\,y}{z}$ si z sit imparis dimensionis, eâ substitutione fiet ut pares evadant dimensiones y vel z quæ prius impares erant, et quia in primo casu habetur fluxio d z, loco y^2 substituatur $r^2 - z^2$, sicque omnes factores ducentes d z, erunt aut r aut z, ideóque quantitas proposita erit absolutè integrabilis, in altero casu cùm habeatur fluxio d y, ut tollantur factores z cujus dimensiones sunt pares, loco z^2 substituatur $r^2 - y^2$, sicque omnes factores ducentes d y, erunt aut r aut y, ideóque habebuntur termini absolutè integrabiles.

Secundò, factores quantitatis d u sint pares, et quidam primò sit z^2 d u vel y^2 d u, integralis horum elementorum est r × C P Q T vel r × C P E, nam est $z^2\,d\,u = r\,z\,d\,y$, et z d y est fluxio areæ C P Q T; est $y^2\,d\,u = r\,y\,d\,z$, et y d z est fluxio areæ C P E; itaque quando P ex C pervenit in A et absolvit quadrantem integralis z^2 d u vel y^2 d u est $r \times \frac{r\,c}{8}$.

Sint itaque ambo factores y vel z quantitatis d u numero pari qualicumque, semper reduci poterunt ita ut quantitas proposita contineat dignitates pares alterutrius quantitatis, putà y, altera variabili exclusa ponendo loco z^2 quantitatem $r^2 - y^2$. Si ergo quæratur integralis quantitatis y^{2m} d u, ut ea ad impares dimensiones revocetur, spectetur ut $y^{2m-1} \times y\,d\,u$; est autem juxta methodos vulgares $\int y^{2m-1} \times y\,d\,u = y^{2m-1} \int y\,d\,u - \int \int y\,d\,u \times (2m - 1) \times y^{2m-2}\,d\,y$, sed $y\,d\,u = \frac{r\,y\,d\,z}{y} = r\,d\,z$, et integralis quantitatis d z sumptæ a puncto C est r — z, hinc $\int y\,d\,u = r\,r - r\,z$, qua substi-

tuta in valore integralis $\int y^{2m-1} \times y\, du$ ea fit $y^{2m-1} r^2 - y^{2m-1} rz - rr\int (2m-1) \times y^{2m-2} dy + \int. rz \times (2m-1) \times y^{2m-2} dy$, sive (quia $rr\int (2m-1) \times y^{2m-2} dy = \frac{2m-1}{2m-1} r^2 y^{2m-1} = r^2 y^{2m-1}$) est $\int. y^{2m} du = -rzy^{2m-1} + \int \times (2m-1) \times rz \times y^{2m-2} dy$ (sive quia $r\,dy = z\,du$) $= -rzy^{2m-1} + \int.(2m-1) \times z^2 y^{2m-1} du$ (et loco z^2 substituendo $r^2 - y^2$) $= -rzy^{2m-1} + (2m-1)\int. r^2 y^{2m-2} du - (2m-1)\int y^{2m} du$; et transpositione factâ est $2m\int y^{2m} du = -rzy^{2m-1} + \int (2m-1) \times r^2 \int y^{2m-2} du$, et tandem $\int. y^{2m} du = \frac{2m-1}{2m} \times r^2 \int y^{2m-2} du - \frac{rzy^{2m-1}}{2m}$; hinc cùm habeatur integralis quantitatis $y^2 du$; si quæratur integralis $y^4 du$, ea obtinebitur per hanc formulam, siquidem in eo casu est $y^{2m-2} du = y^2 du$, et ex ejus integratione habetur integratio quantitatis $\int y^{2m} du$, quæ isto in casu est $y^4 du$; simili modo ex integrali quantitatis $y^4 du$ habebitur integralis quantitatis $y^6 du$, &c.

Quando P pervenit in A, terminus $\frac{rzy^{2m-1}}{2m}$ evanescit, quia illic est $z = 0$ habetur ergo $\int y^{2m} du = \frac{2m-1}{2m} r^2 \int y^{2m-2} du$; in eo ergo casu si quæratur integralis quantitatis $y^4 du$, fiat $m = 2$ erit $\int. y^4 du = \frac{3}{4} r^2 \int y^2 du$, sed $\int. y^2 du = \frac{r^2 c}{8}$ ideóque $\int. y^4 du = \frac{3r^4 c}{4 \times 8}$; si quæratur integralis quantitatis $y^6 du$ fiat $m = 3$ et erit $\int y^6 du = \frac{5}{6} r^2 \int y^4 du$ sed $\int. y^4 du = \frac{3r^4 c}{4.8.}$ ideóque $\int. y^6 du = \frac{3.5r^6 c}{4.6.8.}$

Corol. 1. Si in primo casu in quo alteruter factorum quantitatis du aut ambo factores sunt imparis dimensionis, totum elementum per quantitates r, z, dz exprimatur, integralis quæ tunc obtinebitur non erit completa, quia cosinus z ex T incipit et arcus u ex puncto C, unde dz negativum esse debet; erit ergo $\int r^n z^m dz = C - \frac{r^n z^{m+1}}{m+1}$, ut hæc constans C obtineatur, observandum quod ubi u est o, ideóque evanescit hoc elementum, tunc est $z = r$ ergo $o = C - \frac{r^{n+m+1}}{m+1}$ hinc $C = \frac{1}{m+1} r^{n+m+1}$; v. gr. sit $\int. rz^3 dz = C - \frac{rz^4}{4}$ fit $C = \frac{1}{4} r^5$.

Cor. 2. Si e contra arcus u ex puncto A inciperet, integralis quæ obtinebitur cùm elementum per quantitatem y exprimetur, completa non erit, et eâ ratione compleri debebit quæ in præcedenti Corollario est indicata.

Cor. 3. In secundo casu, si u ex puncto A incipiat, erit $\int. y\,dz =$ A P E T et $\int z\,dy$ est area A P Q, ut liquet ex ipsâ figurâ.

Cor. 4. Denique si u ex puncto A incipiat et ambo factores sint uterque dimensionis paris, elementum non est reducendum ad litteram y, ut in Lemmatis solutione factum est, sed ad quantitatem z, quæ in toto calculo loco y substituatur et vice versa; liquet enim quod z est sinus respectu arcûs A P, et y ejus cosinus.

PROBLEMA I.

Invenire totam retardationem Lunæ dum unam revolutionem absolvit.

Constat ex Theor. VI. Quod si Sol sit immotus, et Luna in totâ revolutione eam vim Solis patiatur quam patitur in puncto P, eveniet ut tempus quo describitur arcus du, (quodque debet esse $\frac{M\,du}{c}$ posito M tempore periodico Lunæ, et c peripheriâ quam percurrit,) evadat $\frac{M\,du}{c} \times (1 + \frac{2Y}{V})$; itaque tempus illud producitur quantitate $\frac{M\,du}{c} \times \frac{2Y}{V}$, ideò cùm tempore $\frac{M\,du}{c}$ iste arcus du describi debuisset hoc tempore $\frac{M\,du}{c} \times \frac{2Y}{V}$, arcus $\frac{2Y}{V} du$ describeretur, hæc est ergo retardatio Lunæ in puncto P orta per actionem Solis.

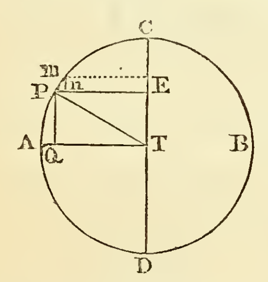
Sed in singulo puncto P orbitæ lunaris vis Y est $\frac{F}{a} \times (\frac{3yy}{r} - r)$ (per Theor. IV.) ergo elementum retardationis Lunæ est $du \frac{2F}{Va} \times (\frac{3yy}{r} - r)$, cujus integralis secundum Lemma præcedens est $\frac{2F}{Va} \times (\frac{3r^4 c}{8r} - \frac{1}{4} rc)$, sive $\frac{2F}{Va} \times \frac{1}{8} rc$, cùm P pervenit in A, cùmque idem sit Solis effectus in singulo quadrante, tota retardatio Lunæ est $\frac{2F}{Va} \times \frac{4}{8} rc$ sive $\frac{Frc}{Va}$ dum Luna revolutionem absolvit, respectu Solis immoti.

Si reddatur Soli motus suus, et loco mensis periodici M, mensis synodicus μ intelligatur, et censeatur quod proxime verum est, mensem synodicum qui respondet mensi periodico in circulo a d b c peracto, esse ad eum mensem periodicum ut μ ad M, ideóque eum mensem synodicum esse $\mu \times (1 + \frac{2Y}{V})$ omnia procedent ut prius, et erit $\frac{Frc}{Va}$ retardatio Lunæ toto ejus tempore synodico.

Scrupulus esse potest, utrum in hac expressione, quantitas c designet peripheriam 360 grad. an eam peripheriam conjunctam cum viâ quam Sol emensus est mense synodico; sed ex integrationis adhibitæ ratione patet, actum fuisse de

veris quadrantibus circuli, ideóque hic c designare peripheriam ipsam nihilque ultra, ita ut $\frac{F\,r\,c}{V\,a}$ sit retardatio absoluta Lunæ tempore synodico.

Verùm alia certior correctio est adhibenda; constat ex Propositione XXVI. hujusce Libri, velocitatem Lunæ augeri per Solis actionem radio orbitæ lunaris perpendicularem, ita ut velocitas Lunæ in quadraturis sit ad ejus velocitatem in quolibet puncto ut 109.73 r ad $109.73\,r + \frac{y\,y}{r}$, hinc tempus quo describitur arcus d u brevius fit in proportione velocitatum, ideóque cùm id tempus fuerit $\frac{\mu\,d\,u}{c} \times (1 + \frac{2\,Y}{V})$, fit $\frac{109.73\,r}{109.73\,r + \frac{y\,y}{r}} \times \frac{\mu\,d\,u}{c} \times (1 + \frac{2\,Y}{V})$ sive fractionem ad series reducendo $1 - \frac{y\,y}{109.73\,r\,r} \times \frac{\mu\,d\,c}{c} \times (1 + \frac{2\,Y}{V})$; quantitas autem hæc $\frac{\mu\,d\,c}{c} \times (1 + \frac{2\,Y}{V})$; duas partes continet, priorem independentem ab actione Solis secundùm directionem radii exercitam, et de acceleratione ad



hanc partem pertinente actum est in XXVI. Prop.; et hinc fit ut mensis synodicus medius sit brevior eo qui debuisset esse in proportione numeri 10973 ad 11023, et inæqualitates inde natæ in variis partibus mensis synodici in variatione continentur; altera pars $\frac{\mu\,d\,u}{c} \times \frac{2\,Y}{V}$ pendet ab actione Solis secundùm radium orbitæ lunaris exercitam, et de hac solâ isto calculo agitur, ideóque cùm ex istâ oriatur retardatio $\frac{2\,Y}{V}\,d\,u$, et tempus $\frac{\mu\,d\,u}{c}$ fiat minus in proportione 1 ad $1 - \frac{y\,y}{109.73\,r^2}$ retardatio quæ fiet dum arcus d u describi debuisset, erit solummodo $\frac{2\,Y\,d\,u}{V} - \frac{2\,Y\,y\,y\,d\,u}{109.73\,r^2\,V}$, loco Y ponatur $\frac{F}{a} \times (\frac{3\,y\,y}{r} - r)$ evadet hoc elementum $d\,u \times \frac{2\,F}{V\,a} \times (\frac{3\,y\,y}{r} - r - \frac{3\,y^4}{109.73\,r^3} + \frac{y\,y}{109.73\,r})$ cujus integralis pro quadrante juxta Lemma I. est $\frac{2\,F}{V\,a} \times (\frac{3\,r^2\,c}{8\,r} - \frac{1}{4}\,r\,c - \frac{3 \times 3\,r^4\,c}{4 \times 8 \times 109.73\,r^3} + \frac{r^2\,c}{8 \times 109.73})$ sive $\frac{2\,F\,r\,c}{V\,a} \times \frac{1}{8} - \frac{5}{4.8.109.73}$ et quadruplicatum pro totâ revolutione fit $\frac{F\,r\,c}{V\,a} \times \frac{433.92}{438.92}$.

Corol. Constat ex Cor. 2. Prop. IV. Lib. I. Princip. Quod vires centrales sunt inter se directè ut radii, et inversè ut temporum periodicorum quadrata: hinc, si sit A annus sidereus, et M mensis periodicus sidereus sepositâ omni Solis actione, erit F ad V ut $\frac{a}{A\,A}$ ad $\frac{r}{M\,M}$, sive $\frac{F}{V} = \frac{a\,M\,M}{r\,A\,A}$ substituto itaque hoc valore loco $\frac{F}{V}$ in quantitate $\frac{F\,r\,c}{V\,a} \times \frac{433.92}{438.92}$ quæ retardationem durante mense synodico exprimit, ea retardatio fit $\frac{M^2}{A^2} \times \frac{433.92}{438.92}\,c$, et si non attendatur ad correctionem quæ pendet ex actione Solis perpendicularis radio orbitæ lunaris, ea retardatio foret $\frac{M^2}{A^2}\,c$.

PROB. II.

Dato tempore synodico apparenti Lunæ, invenire tempus periodicum quod observari debuisset, si abesset actio Solis in Lunam secundum radium orbitæ lunaris exercitam.

Sit S mensis synodicus apparens, A annus sidereus, inde (ex notâ proportione mensis synodici ad periodicum) invenietur mensem periodicum apparentem esse $\frac{A\,S}{A + S}$, et quoniam hoc tempore periodico Luna describeret peripheriam c, deducetur quod tempore synodico S describet arcum $\frac{A + S}{A}\,c$.

Sed Luna citra Solis actionem tempore periodico M describere debuisset peripheriam c, et, eâdem in hypothesi, tempore S descripsisset arcam $\frac{S\,c}{M}$ hinc ergo retardatio absoluta quam patitur tempore S est $\frac{S\,c}{M} - \frac{A + S}{A}\,c = \frac{A\,S - A\,M - M\,S}{A\,M}\,c$. Sed per Corollarium præcedentis Problematis ea retardatio inventa fuerat $\frac{M^2}{A^2} \times \frac{433.92}{438.92}\,c$ hinc obtinetur hæc æquatio $A\,S - A\,M - M\,S = \frac{433.92\,M^3}{438.92\,A}$, loco M scribatur X A, loco S scribatur E A, et fiet hæc æquatio $A^2\,E - A^2\,X - A^2\,E\,X = \frac{433.92\,A^3X^3}{438.92\,A}$ sive $E = X + E\,X + \frac{433.92}{438.92}\,X^3$, sed mensis synodicus medius est .08084896 A

hinc $E = .0804896$ et æquatio fit $.08084896 = 1.08084896\ X + \frac{433.92}{438.92} X^3$, loco X substituatur $.0744 + R$ et æquatio evadit $.08084896 = .08082129 + 1.09726905\ R$, unde habetur $.00002767 = 1.09726905\ R$, hinc obtinetur $R = .0000252$ et $M = .0744252\ A$.

THEOR. VII.

Si mutetur utcumque Solis a Terrâ distantia, ita ut loco a dicatur X, dico quod, cæteris manentibus, retardatio Lunæ durante tempore synodico, cùm Terra distabit a Sole quantitate X erit $\frac{a^3 M^2}{X^3 A^2} \times \frac{433.92\ c}{438.92}$.

Nam ex Problemate I. retardatio Lunæ inventa fuerat $\frac{F r c}{V a} \times \frac{433.92}{438.92}$ sed in aliâ a Sole distantiâ loco a ponatur X, et præterea loco F ponatur $\frac{a^2 F}{X^2}$, decrescit enim vis Solis F ut quadrata distantiarum, hac ergo substitutione factâ retardatio Lunæ sit $\frac{a^2 F r c}{X^3 V} \times \frac{433.92}{438.92}$; tum verò loco $\frac{F}{V}$ substituatur $\frac{a M^2}{r A^2}$ et habebitur expressio Theorematis hujusce.

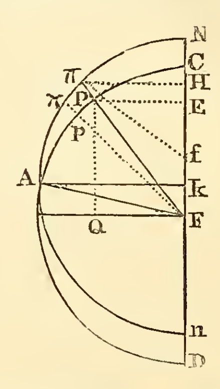
LEMMA II.

Foco F, axe majore N F n qui dicatur 2 a describatur ellipsis, sit e ejus excentricitas eaque parva sit, axis minor sit 2 b, erit $b^2 = a^2 - e^2$; ex foco ut centro radio a describatur circulus, et ducantur a foco lineæ secantes circulum in P et ellipsim in π, linea F π dicatur x, sinus anguli A F P sit y, cosinus z; dico quod linea x erit $\frac{b^2 a}{a^2 \mp e z}$.

Ducatur ex π, π H perpendicularis ad axem, et propter triangulorum F P E, F π H similitudinem erit F P ad F π ut P E ad π H et ut F E ad F H, hoc est $a : x = y : \frac{y}{a} x = z : \frac{z}{a} x$: sit f alter focus ellipseos, ex eo ducatur linea f π, ex natura ellipseos est $f\pi = 2a - x$ sed $f\pi^2 = \pi H^2 + f H^2$ et $\pi H = \frac{y}{a} x$, et $f H = F H - F f$ vel $F f - F H$ vel $F f + F H$, et est $F f = 2 e$ et $F H = \frac{z}{a} x$ hinc $\pi H^2 + f H^2 = \frac{y^2}{a^2} x^2 + \frac{z^2}{a^2} x^2 \mp \frac{4 e z}{a} x + 4 e^2 = f\pi^2 = 4 a^2 - 4 a x + x^2$, est autem $\frac{y^2}{a^2} x + \frac{z^2}{a^2} x^2 = x^2$, ergo $\mp \frac{4 e z}{a} x + 4 e^2 = 4 a^2 - 4 a x$, et dividendo per 4 et transponendo est $a x \mp \frac{e z}{a} x = a^2 - e^2 = b^2$; unde habetur $x = \frac{b^2 a}{a^2 \mp e z}$. Q. e. o.

Cor. Hic valor x in series resolutus est $\frac{b^2}{a} \times (1 \pm \frac{e z}{a^2} + \frac{z^2 e^2}{a^2} \pm \frac{e^3 z^3}{a^3}$, &c.) sumptis signis superioribus quando E cadit in eâdem parte ac centrum, et sumptis signis inferioribus quando E cadit in parte in quâ non est centrum.

Cor. 2. Si fractio $\frac{a}{x} \times \frac{a^2 \mp e z}{b^2}$ ad dignitates superiores evehatur, termini in quibus e plurium dimensionum poterunt omitti, propter suppositionem excentricitatem exiguam esse, et quidem si agatur de Solis excentricitate, ea non



assurgit ad duas centesimas radii, et excentricitas Lunæ non assurgit ad septem centesimas.

Cor. 3. Hinc tardatio Lunæ quæ ex Solis actione pendet, fiet durante tempore synodico S, $\frac{433.92\ c}{438.92} \times \frac{M^2}{A^2} \times \frac{a^2 \mp e z^3}{b^6}$, positis a pro semi-axe majore orbitæ Solis, e pro ejus excentricitate, et b pro axe minore.

PROBL. III.

Determinare quantitatem graduum quibus tardatur Luna per actionem Solis dum Terra describit circa Solem arcum quamminimum datum.

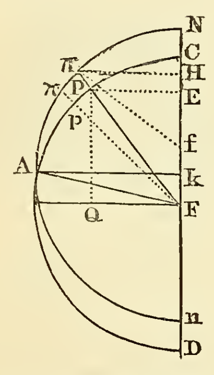
Sit ut in præcedenti Lemmate N π n ellipsis quam Terra describit, sit Sol in foco F, ducatur ut prius linea F P π et ei quam proxima F p ϖ quæ secet in circulo C A D arcum P p, et quæratur quantitas graduum quâ tardatur Luna per Solis actionem, dum Terra videretur e Sole, descripsisse arcum P p.

Sit ut prius A tempus annuum, a ellipseos semi-axis major, k circumferentia eo radio descripta ex foco F, sit e excentricitas, $b = \sqrt{a^2 - e^2}$ semi-axis minor, area semi-circuli

$\frac{a k}{4}$, quæ est ad aream semi-ellipseos ut est a ad b, hinc area semi-ellipseos est $\frac{b k}{4}$.

Dicatur arcus A P, u, arcus P p sit d u, radio F π sive X describatur arculus ex ϖ in F π, is erit ad d u ut est F π sive X ad a, ergo is arculus erit $\frac{x\, d u}{a}$, ideóque area F π ϖ est $\frac{x^2 d u}{2 a} = \frac{b^4 a d u}{2 \times \overline{a^2 + e z}|^2}$ (per Lem. præced.).

Sed tempus quo Terra arcum P p descripsisse videtur, est ad tempus semestre $\frac{1}{2}$ A, ut hæc area F π ϖ, sive $\frac{x^2 d u}{2 a}$ ad semi-ellipsim $\frac{b k}{4}$. Est itaque illud tempus quo Terra arcum P p descripsisse videtur $\frac{4 x^2 du}{2 a b k} \times \frac{1}{2} A = \frac{x^2 A d u}{a b k}$.



Inventum autem est quod tempore S Luna tardabatur propter actionem Solis quantitate $\frac{433.92\, c}{439.92} \times \frac{M^2 a^3}{A^2 x^3}$ ergo tempore $\frac{x^2 A d u}{a b k}$ tardabitur quantitate $\frac{433.92\, c \times x^2 A d u}{438.92 \times S a b k} \times \frac{M^2 a^3}{A^2 x^3}$ sive $\frac{433.92\, c \times d u}{438.92 \times S.\, b.\, k} \times \frac{M^2 a^2}{A x}$, aut substituendo valorem fractio $\frac{a}{x}$, fit $\frac{433.92.\, c d u}{438.92.\, S b k} \times \frac{M^2 a}{A} \times \frac{a^2 \mp e z}{b^2}$ sive $\frac{433.92\, c d u \times M^2 a}{438.92\, S A b^3 k} \times (a^2 \mp e z.)$

PROBL. IV.

Invenire retardationem Lunæ ex actione Solis ortam durante semestri revolutione Terræ circa Solem.

Primo inveniatur integralis elementi per Probl. III. inventi, quod est $\frac{433.92\, c d u \times M^2 a}{438.92.\, S.\, A.\, b^3 k} \times (a^2 \pm a z)$ cujus integralis est $\frac{433.92\, c \times M^2 a}{438.92\, S.\, A\, b^3 k} \times (a^2 u \mp a c y.)$

Si ergo sumatur semestris revolutio, illic est $u = \frac{1}{2} k$, et termini in quibus occurrit y sese destruunt, ut quidem liquet ex eo quod y illic evanescat, unde semestris retardatio sit $\frac{433.92\, c \times M^2 a}{438.92\, S A b^3 k} \times \frac{1}{2} a^2 k = \frac{433.92\, c \times M^2 a^3}{438.92\, S A b^3} \times \frac{1}{2}$ sive ponendo $a = b$ quod proxime verum est $\frac{433.92\, c\, M^2}{438.92\, S \times A} \times \frac{1}{2}$.

Cor. Si quæratur retardatio Lunæ, facta tempore quo Terra a suo aphelio ad mediocrem ejus distantiam pervenit; observandum quod eo in loco arcus u est $\frac{1}{4} k - e$, et y est b, unde integralis inventa evadit $\frac{433.92\, c \times M^2 a}{438.92\, S.\, A b^3 k} \times (\frac{1}{4} a^2 k - a^2 e - a b e)$ aut simplicius si quantitates a et b pro æqualibus sumere liceat, fiet $\frac{433.92 c \times M^2}{438.92 S.\, A k} \times (\frac{1}{4} k - 2 e)$ sive $\frac{433.92\, c a^3 \times M^2}{438.92 \times S A b^3} \times (\frac{1}{4} - \frac{2 e}{k}.)$

PROBL. V.

Invenire æquationem motûs medii lunaris quæ pendet ex Solis actione, et quæ est adhibenda quando Terra est in suâ mediocri distantiâ a Sole.

Primò observandum est, motum Lunæ, qualis ex apparentiis determinatur; ex duplici causâ pendere, ex actione Terræ cum motu projectili conjunctâ, et ex Solis actione quæ motum ex præcedenti causâ natum tardat; prior motus in orbe circulari uniformis foret, sed tardatio ex alterâ causâ procedens inæqualiter priori illi sese immiscet. Astronomi verò cùm motum medium Lunæ æstimant, hanc tardationem sumunt quasi uniformiter in omne tempus distributam.

Cùm ergo ea tardatio major sit in aliquibus Terræ positionibus, in aliis sit minor, quæstio est quænam correctio motui medio Lunæ sit facienda, ut habeatur Lunæ locus verus, ideóque investiganda est differentia inter tardationem proportionaliter tempori distributam, et tardationem veram quæ singulo loco competit, quæ differentia loco medio addita, aut ex eo detracta, restituet verum locum Lunæ quatenus hæc Sola irregularitas spectatur.

Ut ergo habeatur tardatio tempori proportionalis quando Terra est in mediocri distantiâ, fiat secundum Regulam Keplerianam, ut area semi-ellipseos (quæ est $\frac{b k}{4}$ et est semestri tempori proportionalis) ad aream F N A (quæ est ellipseos quarta pars cum triangulo F A K ideóque est $\frac{b k}{8} + \frac{b e}{2}$ et est proportionalis tempori quo Terra ab aphelio suo ad mediocrem a Sole distantiam pervenit) hoc est ut $\frac{1}{2}$ ad $\frac{1}{4} + \frac{e}{k}$, ita tardatio semestri tempore facta quæ (per Probl. IV.) est $\frac{433.92\, c a^3 \times M^2}{438.92\, S A b^3} \times \frac{1}{2}$, ad tardatio-

nem proportionalem tempori quo Terra ab aphelio ad mediocrem suam a Sole distantiam pervenit, quæ erit ergo $\frac{433.92\ c\ a^3 \times M^2}{438.92\ S\ A\ b^3} \times (\frac{1}{4} + \frac{e}{k})$; sed per Cor. Probl. IV. vera tardatio eo in loco erat $\frac{433.92\ c\ a^3 \times M^2}{438.92\ S\ A\ b^3} \times (\frac{1}{4} - \frac{2\ e}{k})$. Hinc substractione factâ, tardatio mediocris superat tardationem veram quantitate $\frac{433.92\ c\ a^3 \times M^2}{438.92\ S.\ A\ b^3} \times \frac{3\ e}{k}$. Hæc ergo quantitas graduum debet addi loco medio ut locus verus obtineatur. Si ergo loco e sumatur $.016\frac{7}{8}$ a, erit 3 e = $.050\frac{5}{8}$ a, et loco k scribatur 6.283188 a; et loco c, 360 gr. erit $\frac{3\ e\ c}{k} = \frac{18^{gr}.\ 225}{6.283188} = 2^{gr}.\ 9005$; præterea $\frac{M^2}{S.A}$ ad calculum revocatur si loco M ponatur .0744252 A; et loco S, .08084896 A, ut in Prob. II. repertum est, fit $\frac{M^2}{S.A} = .06851183835$, idque ductum in fractionem $\frac{433.92}{438.92}$ efficit .06773137 cùmque fractio $\frac{a^3}{b^3}$ sit tantum 1.00045 et superius sumptum sit a loco b, hæc fractio pro unitate sumi potest, hinc est $\frac{a^3\ M^2}{b^3\ S.\ A} \times \frac{433.92}{438.92} = .06773137$, quod ductum in $2^{gr}.\ .9005$ efficit $0^{o}.19646$ quod ductum per 60′. efficit 11′.7876, sive 11′. 47″. 256‴, quam Newtonus 11′. 49″. assumit; majorem autem æquationem in hypothesi ellipticâ inveniemus, unde medium quoddam inter utramque ab ipso assumptum esse videtur.

Cor. 1. Cùm hæc æquatio sit $\frac{433.92 \times c a^3 \times M^2}{438.92 \times S.\ b^3\ A} \times \frac{3\ e}{k}$ sive proxime $\frac{433.92\ c \times M^2}{438.92\ S \times A} \times \frac{3\ e}{k}$, et quantitates c, M, S, A, k, sint constantes, hæc æquatio ubi Tellus est in suâ mediocri distantiâ, est sicut excentricitas orbitæ Telluris e, ideóque si ea excentricitas major sit quàm $.016\frac{7}{8}$ radii a, crescet hæc æquatio in hac proportione; sit v. gr. e = a × $.016\frac{11}{12}$, et fiat ut $16\frac{7}{8}$ ad $16\frac{11}{12}$ ita 11′. 47″. 616 ad quartum, is quartus terminus 11′. 49″. 42, erit æquatio, suppositâ excentricitate orbitæ Telluris $.016\frac{11}{12}$, hoc in casu Newtonus æquationem facit 11′. 50″.

Cor. 2. In alio quovis loco orbitæ Telluris, æquatio habebitur si fiat ut semi-ellipsis $\frac{b\ k}{4}$ ad aream F N Π ita semestris tardatio $\frac{433.92\ c\ M^2}{438.92 \times S.A} \times \frac{a^3}{2\ b^3}$ ad tardationem huic tempori proportionalem, quæ erit ergo $\frac{433.92\ c \times M^2 \times F\ N\ \Pi}{438.92 \times S \times A\ b^3} \times \frac{2\ a^3}{b\ k}$ tum verò si sumatur tardatio loco Π conveniens, quæ est $\frac{433.92 \times c \times M^2\ a}{438.92 \times S \times A b^3 k} \times (a^2 u \mp aey)$ (Probl. IV.) erit hæc æqu. $\frac{433.92\ c \times M^2\ a^2}{438.92 \times S.\ A \times b^3\ k} \times (\frac{2\ a \times F\ N\ \Pi}{b} - a\ u \pm e\ y)$, ideóque erit ut $\frac{2\ a\ F\ N\ \Pi - a\ b\ u \pm b\ e\ y}{b}$; aut sumendo a = b, ut $\frac{2\ F\ N\ \Pi - b\ u \pm e\ y}{b}$. Jam verò hæc quantitas est ipsa æquatio centri Solis; nam arcus qui describeretur per motum medium Solis eo tempore quo arcus u reverâ percurritur, hac proportione obtinetur, ut semi-ellipsis $\frac{b\ k}{4}$ ad aream F N Π ita semi-circulus $\frac{1}{2}$ k ad arcum medio motu descriptum; qui ergo erit $\frac{4\ F\ N\ \Pi}{b\ k} \times \frac{1}{2} k = \frac{2\ F\ N\ \Pi}{b}$; sed arcus tunc temporis reverâ descriptus, est N Π sive u, ergo æquatio centri Solis est $\frac{2\ F\ N\ \Pi}{b} - u$ sive $\frac{2\ F\ N\ \Pi - b\ u}{b}$ cui quantit. $\frac{2\ F\ N\ \Pi - b\ u \pm e\ y}{b}$ est quam proximè æqualis, nam terminus e y propter exiguitatem e respectu b, et y respectu u considerationem nullam hic meretur; ergo æquatio lunaris in quovis loco orbitæ Telluris est sicut æquatio centri Solis eo in loco; ergo ut æquatio centri Solis in mediocri distantiâ Telluris a Sole, est ad æquationem motûs lunaris adhibendam cùm Tellus est in ea mediocri distantiâ a Sole, ita est æquatio centri Solis in quâvis distantiâ u ab aphelio, ad æquationem Luni-Solarem primam Lunæ illi loco convenientem.

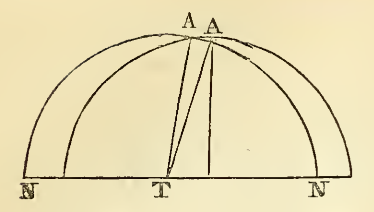
Cor. 3. Æquatio ista Lunæ, quæ solaris prima dicitur, est maxima in distantia mediocri Terræ a Sole; nam cùm sit proportionata æquationi centri Solis, et æquatio centri Solis sit maxima in mediocri distantiâ Telluris a Sole per ea quæ primo Libro circa hanc æquationem demonstrata sunt, æquatio solaris Lunæ eo in loco maxima pariter erit.

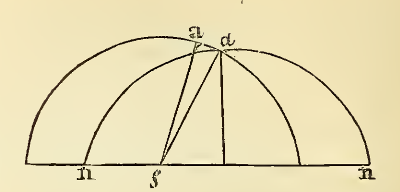
De incremento motûs medii Lunæ, et ejus æquatione ex Solis actione pendentibus, in hypothesi eum orbem esse ellipticum, methodo diversâ ab eâ quæ in calculo præcedente fuit adhibita.

THEOR. I.

Sint duæ ellipses descriptæ circa corpora centralia in ipsarum focis posita, quorum vires absolutæ diversæ sint; dico, quod si tempora periodica in utraque ellipsi sint ut earum ellipsium areæ, ellipses illæ erunt inter se similes.

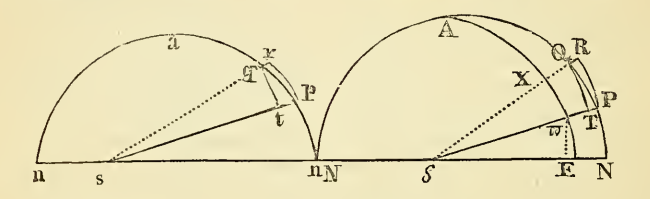
Describantur duæ ellipses N A N, n a n, circa corpora S et s in focis ellipsium posita, et quorum vires sint diversæ, si totum tempus quo describitur peripheria ellipseos N A N, sit ad totum tempus quo describitur peripheria ellipseos n A n





ut area prioris ellipseos ad aream alterius, ellipses illæ similes esse debebunt, hoc est earum ellipsium axes majores erunt inter se ut sunt inter se earum minores axes, v. gr. si semi-axis major ellipseos N A N dicatur r, ejus minor semi-axis dicatur q et major semi-axis ellipseos n a n dicatur ϱ, ejus minor semi-axis $\varkappa$, dico quod erit q ad $\varkappa$ ut est r ad ϱ.

Ex naturâ ellipsium area ellipseos N A N est ad aream ellipseos n a n ut est r q ad $\varrho\,\varkappa$, et ex hypothesi tempus periodicum in ellipsi N A N est ad tempus periodicum in ellipsi n a n in eadem ratione r q ad r $\varkappa$, si ergo sumantur arcus similes A A, a a in mediocri distantiâ in utrâque ellipsi, tempora quibus describentur illi arcus erunt ut tota tempora periodica, quia illi arcus A A, a a in mediocri distantiâ positi describuntur motu medio corporum eas ellipses describentium, et erunt etiam ut areæ A S A et a s a ex hypothesi, et istæ areæ A S A et a s a, sunt ut quadrata linearum S A et s a sive ut r^2 ad ϱ^2; ergo est r^2 ad ϱ^2 ut r q ad $\varrho\,\varkappa$, et dividendo terminos homologos per r et ϱ est r ad ϱ ut q ad $\varkappa$; ergo ellipses sunt similes. Q. e. d.



THEOR. II.

Sint, ut prius, duæ ellipses descriptæ circa corpora centralia in ipsarum focis posita quorum vires absolutæ diversæ sint, et sint tempora periodica in utrâque ellipsi ut earum ellipsium areæ, dico quod axes majores earum ellipsium erunt reciprocè ut vires absolutæ corporum centralium.

Vis absoluta corporis S dicatur V, corporis s dicatur V — Y, ducantur in utrâque ellipsi lineæ S P, s p ad lineas apsidum S N, s n similiter inclinatæ, et iis proximæ ducantur lineæ S Q, s q angulos similes P S Q, p s q constituentes, ducantur ex Q et q perpendiculares Q T, q t in lineas S P, s p, et productis lineis S Q, s q donec occurrant tangentibus in R et r, erunt Q R, q r virium centralium effectus dum describuntur arcus P Q, p q.

Primò quidem ex hypothesi, tempora quibus describentur ii arcus P Q, p q erunt ut areæ P S Q, p s q, et quia, ex const. illæ areæ sunt similes, erunt ut quadrata linearum homologarum sive ut SP^2 ad sp^2 aut QT^2 ad qt^2. Sunt autem virium centralium effectus, directè ut vires centrales et ut quadrata temporum, vires verò centrales sunt ut $\frac{V}{SP^2}$ ad $\frac{V-Y}{sp^2}$, et quadrata temporum sunt ut SP^4 ad sp^4, ergo lineæ Q R et q r erunt inter se ut $\frac{V}{SP^2} \times SP^4$ ad $\frac{V-Y}{sp^2} \times sp^4$ sive ut $V \times SP^2$ ad $\overline{V-Y} \times sp^2$, aut denique ut $V \times QT^2$ ad $\overline{V-Y} \times qt^2$.

Secundo. In omnibus ellipsibus per vim centralem ex foco prodeuntem descriptis latus rectum est æquale $\frac{QT^2}{QR}$ ut constat ex Prop. XI. Lib. I. Princip. Si itaque latus rectum ellipseos N A N sit L, ellipseos verò n a n sit λ, erit $L = \frac{QT^2}{QR}$ et $\lambda = \frac{qt^2}{qr}$, loco Q R et q r quantitates ipsis proportionales $V \times QT^2$ et $\overline{V-Y} \times qt^2$ collocentur, et erit L ad λ ut $\frac{QT^2}{V \times QT^2}$ ad $\frac{qt^2}{(V-Y)\,qt^2}$ sive ut $\frac{1}{V}$ ad $\frac{1}{V-Y}$; sed ex naturâ ellipsium, est $L = \frac{q^2}{r}$ et $\lambda = \frac{\varkappa^2}{\varrho}$, præterea quia ellipses sunt similes, ex præcedente Theoremate, est $q : r = \varkappa : \varrho$, ideóque $\frac{q}{r} = \frac{\varkappa}{\varrho}$; est ergo $L : \lambda$ ut q ad $\varkappa$ sive ut r ad ϱ; itaque est r ad ϱ ut $\frac{1}{V}$ ad $\frac{1}{V-Y}$. Q. e. d.

Cor. In his itaque hypothesibus tempora periodica erunt inversè ut quadrata virium absolutarum corporum S et s; sunt enim per Theor. I.

ut r^2 ad ϱ^2, et ex hoc Theoremate est r ad ϱ ut $\frac{1}{V}$ ad $\frac{1}{V-Y}$; ergo tempora periodica sunt ut $\frac{1}{V^2}$ ad $\frac{1}{\overline{V-Y}|^2}$.

THEOR. III.

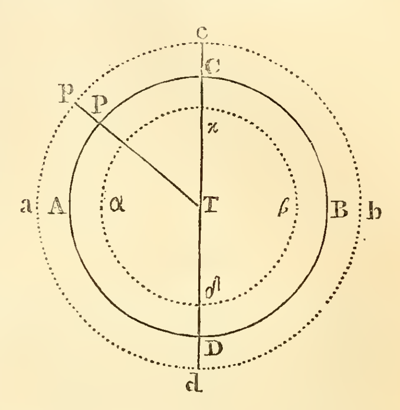
Sit T Terra, P Luna quæ circa Terram (sepositâ omni actione Solis) describat orbitam circulo proximam tempore periodico M, vis absoluta Terræ in Lunam dicatur V, minuatur ea vis absoluta quantitate exiguâ Y; dico quod si ea vis V — Y maneat constans, Luna describet circa Terram orbitam similem illi quam prius describebat, ita ut si prioris orbitæ semi-axis major dicatur r, semi-axis major orbitæ novæ erit $\frac{V\,r}{V-Y}$ et tempus periodicum erit $\frac{V^2\,M}{\overline{V-Y}|^2}$ sive $M \times (1 + \frac{2\,Y}{V} \times \frac{3\,Y^2}{V^2} + \frac{4\,Y^3}{V^3}$, &c.).

Nam 1. cùm Luna discedit a suâ orbitâ, retinetur tamen per vim decrescentem secundum quadrata distantiarum, describet ergo circa corpus in foco positum sectionem conicam, quæ erit adhuc ellipsis, quia mutatio vis centralis ponitur exigua, et per vim priorem orbita circulo finitima describebatur, ita ut nec in hyperbolam nec in parabolam mutari possit hæc orbita.

2. Cùm vis nova Y ad centrum sit etiamnum directa, quamcumque in viam flectatur Luna, areæ semper manebunt temporibus proportionales, ideo si tandem in orbitam a d b c deveniat ex orbitâ A D B C, tempus quo describetur peripheria a d b c erit ad tempus M quo describebatur peripheria A D B C ut tota area A D B C ad aream a d b c.

3. Cùm ergo in his orbitis A D B C, a d b c (quæ describuntur circa corpus idem quidem, sed cujus vis absoluta alia censetur cùm describitur orbita A D B C quàm cùm describitur a d b c) tempora sint areis proportionalia, istæ areæ similes erunt, per Theor. I., circulisque finitimæ per hyp., axes majores erunt inversè ut vires V et V — Y, per Theor. II. et tempora periodica ut $\frac{1}{V^2}$ ad $\frac{1}{\overline{V-Y}|^2}$ itaque si in orbita A D B C, id tempus dictum fuerit M, in orbita a d b c, erit $\frac{V^2\,M}{\overline{V-Y}|^2}$, sive hanc quantitatem in seriem resolvendo $M \times (1 + \frac{2\,Y}{V} + \frac{3\,Y^2}{V^2})$. Q. e. d.

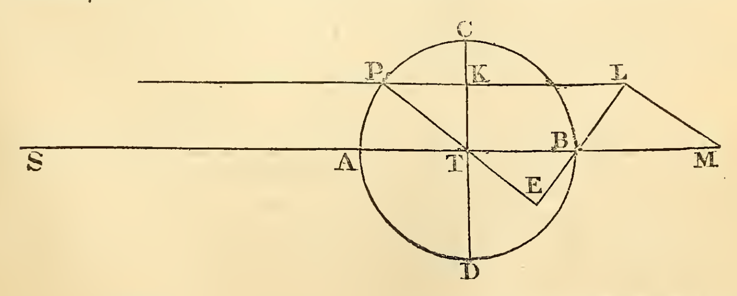
Cor. Iisdem principiis ostendetur, quod si vis absoluta Terræ augeretur quantitate exiguâ Y, Luna deferretur in orbitam interiorem $\alpha\,\delta\,\beta\,\varkappa$



similem priori A D B C, cujus radius foret $\frac{r\,V}{V-Y}$, sumendo quantitatem Y negativè et quæ describeretur tempore $M \times (1 + \frac{2\,Y^2}{V} + \frac{3\,Y^2}{V^2} + \frac{4\,Y^3}{V^3}$, &c).sumendo negativè terminos in quibus quantitas Y est imparium dimensionum

Ut autem servetur hæc conditio quantitatem Y esse exiguam, fractiones $\frac{3\,Y^2}{V^2}$, &c. sunt delendæ in utroque casu ut infinitè parvæ.

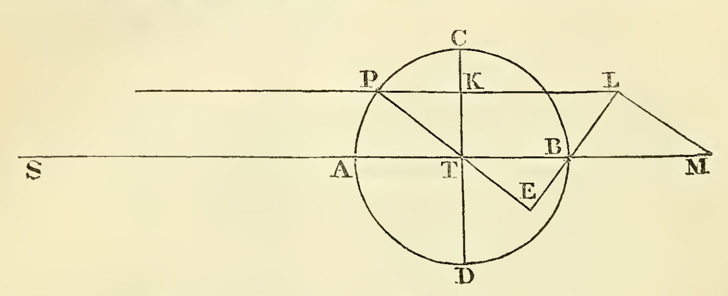
Schol. In primo calculo, cùm supposuerimus orbitam Lunæ A D B C esse circularem, orbitas novas a d b c, $\alpha\,\delta\,\beta\,\varkappa$ circulares etiam esse, supponere necesse erat per Theor. I. hujusce calculi.



THEOR. IV

Sit T Terra, P Luna, A D B C orbita quam Luna circa Terram describeret, sepositâ omni Solis actione, sit S T distantia mediocris Terræ a Sole quæ dicatur a; dicatur F vis Solis in

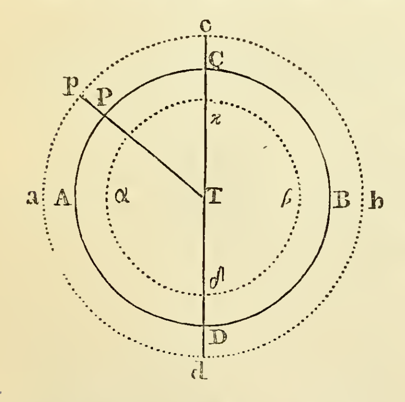
Terram ipsam in mediocri illâ distantiâ, distantia Lunæ a Terrâ P T dicatur r; sit C P distantia Lunæ a quadraturâ proximâ quæ dicatur u, sit ejus sinus y, sit ejus cosinus z; dico quod ea pars vis Solis quæ agit in Lunam secundum directionem radii P T est ubique $\frac{F}{a} \times (\frac{3yy}{r} - r)$. Hoc Theor. idem est cum Theor. IV. præcedentis calculi, cujus demonstratio adiri potest.



THEOR. V.

Effectus actionis Solis in Lunam secundum directionem radii orbitæ lunaris exercitæ intelligi poterit, si concipiatur Lunam ex suâ orbitâ A D B C in aliam transferri cujus singulæ particulæ quamminimæ forent portiones earum orbitarum quas Luna reverâ describeret, si vis Terræ constanter imminuta aut aucta foret eâ quantitate, quæ, per actionem Solis in eam particulam exercitæ, ex vi Terræ detrahitur aut ei additur.

Etenim cùm ea vis Solis per gradus infinitè



parvos crescat et decrescat, sitque nulla cum $\frac{3yy}{r} = r$, paulo post minima sit, sicque gradatim crescat, si censeatur eam constantem manere per aliquod tempusculum, Luna brevissimè transibit in orbitam a d b c illi vi congruam per Theor. III. mox verò cùm vis Solis crescat quantitate quam minimâ, ea vis censeatur iterum constans per alterum tempusculum transibit Luna ex orbitâ primæ vi congruâ in alteram huic incremento consentaneam, sicque semper: ideóque in singulis particulis arcûs C P, censeri potest Lunam delatam esse in orbitam vi Solis in eo puncto agenti congruam.

THEOR. VI.

Dicatur mediocris distantia Lunæ a Terrâ, r; vis Terræ in eâ distantiâ sit V, vis Solis sive addititia sive substractiva sit, quæ agit in Lunam secundum radii Telluris directionem, sit Y in eâ mediocri distantiâ a Terrâ, crescat verò ut distantiæ; dicatur x alia quævis distantia Lunæ a Terrâ in quâ vis Terræ erit $\frac{rrv}{xx}$, et vis Solis erit $\frac{xY}{r}$; dico quod vis corporis centralis quæ in distantiâ x foret $\frac{rrV}{xx} - \frac{xY}{r}$, in mediocri distantiâ esse debuisset $V - \frac{x^3}{r^3}Y$.

Nam siquidem fingitur vim corporis ejus centralis fictitii sequi legem gravitatis et decrescere sicut quadrata distantiarum, fiat ut $\frac{1}{xx}$ ad $\frac{1}{rr}$ ita $\frac{rrV}{xx} - \frac{xV}{r}$ quæ est vis in distantiâ x ad $V - \frac{x^3}{r^3}Y$ quæ erit vis in distantiâ r.

THEOR. VII.

Sit x ut prius distantia Lunæ a Terrâ in propriâ orbitâ, dico quod per actionem Solis illa distantia fiet $\frac{r^3xV}{Vr^3 - Yx^3}$, sive hoc valore in seriem redacto fiet $x + \frac{x^4Y}{r^3V} + \frac{x^7Y^2}{r^6V^2}$, &c. aut omissis terminis superfluis $x + \frac{x^4Y}{r^3V}$.

Nam nova orbita in quam Luna delata censetur, est similis priori per Lem. I. et per Lem.

II. earum lineæ homologæ sunt ut vires absolutæ corporum centralium inversè, seu ut vires quas habent in distantiis æqualibus, nempe inversè ut $V - \frac{x^3}{r^3} Y$ ad V, ergo ut $V - \frac{x^3}{r^3} Y$ ad V, ita x ad distantiam homologam in novâ orbitâ quæ erit ergo $\frac{x V}{V - \frac{x^3}{r^3} Y}$ sive $\frac{r^3 x V}{V r^3 - x^3 Y}$.

Q. e. d.

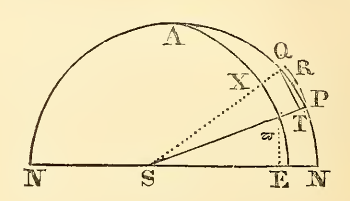
THEOR. VIII.

Centro S, radio æquali mediocri distantiæ r, describatur circulus, arcus ejus ϖ X inter lineas S P, S Q interceptus dicatur d u; dico primò quod Luna in eo circulo uniformiter moveri posset eodem tempore periodico quo moveretur in propriâ orbitâ si abesset vis Solis, ideòque si tempus periodicum Lunæ in propriâ orbitâ dicatur M, et tota peripheria circuli cujus radius est r, dicatur c, tempus quo arcus d u describetur mediocri Lunæ motu citra Solis actionem erit $\frac{M\, d\, u}{c}$; 2. cùm sit r semi-axis major orbitæ lunaris, si dicatur q ejus axis minor, dico quod tempus quo idem ille arcus d u describi videbitur urgente Solis actione et spectatâ excentricitate orbitæ lunaris erit $\frac{M\, d\, u}{c} \times (\frac{x^2}{q\, r} + \frac{2 x^5 Y}{q\, r^4 V} + \frac{3 x^8 Y^2}{q\, r^7 V^2}$, &c.).

Primò enim liquet quod is circulus describetur eo tempore periodico quo describeretur orbita elliptica lunaris si sola vis Telluris agat, nam si corpora plura circa centrum commune revolvantur in quibuscumque ellipsibus, tempora eorum periodica sunt in sesquiplicatâ ratione axium majorum (per Prop. XV. Lib. I. Princip. Newt.) sed hujus circuli et orbitæ lunaris axes majores sunt æquales (per const.); ergo eorum tempora periodica sunt æqualia.

Secundò dicatur E tota superficies ellipseos orbitæ lunaris, hæc superficies E erit ad aream S Q P ut tempus periodicum M ad tempus quo arcus P Q describeretur, quod erit ergo $\frac{S\, Q\, P \times M}{E}$ valor autem areæ S P Q est $\frac{Q\, T \times S{\cdot}P}{2}$, sed ut r ad d u, ita S Q sive S P (x) ad Q T, est ergo $Q\, T = \frac{x\, d\, u}{r}$ et $\frac{Q\, T \times S\, P}{2} = \frac{x\, x\, d\, u}{2\, r}$ hinc tempus quo Luna in propriâ orbitâ citra Solis actionem describeret arcum Q P, est $\frac{M\, x\, x\, d\, u}{2\, r.\, E}$. Hoc autem tempus erit ad illud quo describeretur similis arcus in orbitâ in quam Luna per actionem Solis defertur, ut quadrata radiorum seu (per Theor. præc.) ut x x ad $x\, x + \frac{2 x^5 Y}{r^3 V}$ ita $\frac{M\, x\, x\, d\, u}{2\, r.\, E}$ ad $\frac{M\, d\, u}{2\, r.\, E} \times (x\, x + \frac{2 x^5 Y}{r^3 V})$, sive cùm semi-axis minor orbitæ lunaris dicatur q et area ellipseos E sit ideò $\frac{1}{2}$ q c, tempus quo arcus d u describi videbitur a Lunâ translatâ per actionem Solis in aliam orbitam fiet $\frac{M\, d\, u}{c} \times (\frac{x\, x}{q\, r} + \frac{2 x^5 V}{q\, r^4 V.}$ +, &c.).

Cor. I. Ex ipsâ demonstratione liquet quod tempus quo citra Solis actionem describeretur area S P Q foret $\frac{M\, d\, u}{c} \times \frac{x\, x}{q\, r}$, et discrepantiæ illius quantitatis a motu medio in æquatione Lunæ, quæ dicitur soluta, continentur: excessus verò (vel defectus si vis Y fiat negativa) $\frac{M\, d\, u}{c} \times \frac{2 x^5 Y}{q\, r^4 V}$ per Solis actionem genitus novam motûs medii perturbationem producit, de quâ hic



agendum; ergo, siquidem per medium motum tempore $\frac{M\, d\, u}{c}$ arcus d u descriptus fuisset, tempore hujus excessûs $\frac{M\, d\, u}{c} \times \frac{2 x^5 Y}{q\, r^4 V}$ arcus $\frac{2 x^5 Y\, d\, u}{q\, r^4 V}$ describi potuisset, eâque quantitate graduum tardatur medius motus Lunæ propter actionem Solis secundum directionem radii orbitæ lunaris exercitam.

Cor. 2. Iisdem verò ratiociniis quibus usi sumus in solutione Probl. I. calculi præcedentis constabit, quod propter accelerationem quæ oritur per actionem Solis perpendiculariter in radium orbitæ lunaris exercitam, hæc retardatio $\frac{2 x^5 Y\, d\, u}{q\, r^4 V}$ debet minui in proportione 1 ad $1 - \frac{y\, y}{109.73 r^2}$, sicque evadit $\frac{2 x^5 Y\, d\, u}{q\, r^4 V} - \frac{2 x^5 y^2 Y\, d\, u}{109.73 q r^6 V}$.

LEMMA I.

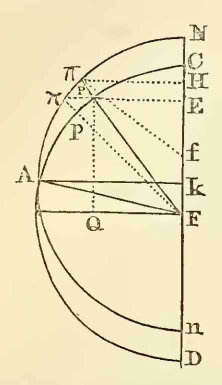
Ex præcedentis calculi Lemmate II. constat quod si ex puncto ϖ ducatur perpendicularis ϖ E in lineam apsidum, et excentricitas dicatur f, erit F Π sive $x = \frac{q^2 r}{r^2 \mp f \times F\, E}$.

Nulla enim est differentia nisi in litteris, quæ diversæ sunt quia hic agitur de orbitâ ellipticâ Lunæ, illic de orbitâ ellipticâ Telluris, cæterum eadem est demonstratio.

Hic autem valor in seriem redactus evadet

$\frac{q^2}{r} \times (1 \pm \frac{FE \times f}{r} + \frac{FE^2 \times f^2}{r^4} \pm \frac{FE^3 \times f^3}{r^6}$, &c.)

Signa superiora adhibenda sunt cùm Luna distat ab apogæo minus quàm 90 gr. tam in

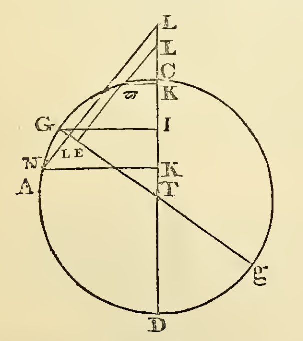


consequentia quàm in antecedentia, cùm Luna magis distat ab apogæo quàm 90 gr. signa inferiora sunt adhibenda.

LEMMA II.

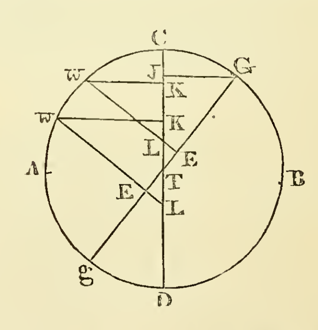
Si linea apsidum non coincidat cum lineâ quadraturarum, dicatur verò m sinus anguli lineæ quadraturarum et lineæ apsidum, et n ejus anguli cosinus; sit y sinus distantiæ Lunæ a quadraturâ, z ejus cosinus, dico quòd distantia Lunæ a Terrâ, quæ dicitur x erit $\frac{q^2 r^2}{r^3 \mp f \times \overline{nz + my}}$ cùm Luna est in eâdem quadraturâ cum alterutrâ apsi, est verò $\frac{q^2 r^2}{r^3 \mp f \times \overline{nz - my}}$ cùm Luna et alterutra apsis non sunt in eâdem quadraturâ.

Sit C A D B circulus descriptus centro T,



radio æquali mediocri distantiæ Lunæ a Terrâ quæ dicitur r. Sit G T g linea apsidum, C T D linea quadraturarum, G I sinus anguli lineæ quadraturarum et lineæ apsidum qui dicitur m, T I ejus cosinus qui dicitur n, ϖ punctum circuli C A D B quod respondet vero loco Lunæ in peripheria suæ orbitæ, quod sumitur vel ultra vel citra apsidem, ϖ K sinus distantiæ Lunæ a quadraturâ qui dicitur y, T K ejus cosinus qui dicitur z, ducatur ex ϖ in lineam apsidum perpendicularis ϖ E, quæ producatur donec secet lineam quadraturarum in L, triangulum T I G est simile triangulo T E L (ob angulos rectos E et I et angulum communem T); triangulum T E L est simile triangulo ϖ K L (ob angulos rectos E et K et angulum communem L); hinc est T I (n) : I G (m) : : ϖ K (y) : K L $= \frac{my}{n}$; hinc in isto casu T L $=$ T K $+$ K L $= z + \frac{my}{n}$, sed ex similitudine triang. T I G et T E L est T G (r) : T I (n) : : T L, $(z + \frac{my}{n})$: T E $= \frac{nz + my}{r}$, substituto ergo hoc valore in valore x Lemmate superiori reperto fit $\frac{q^2 r^2}{r^3 + f \times (nz - my)}$. Q. e. o. 1°.

Si ϖ et apsis alterutra non sint in eadem quadratura, et 1. si tamen ϖ non distet 90 gr. a



proxima apside, similia erunt ut prius triang. T J G, T E L, ϖ K L, unde erit K L $= \frac{my}{n}$, sed erit T L $=$ T K $-$ K L sive $z - \frac{my}{y}$, unde fiet T E $= \frac{nz - my}{r}$ ideóque erit $x = \frac{q^2 r^2}{r^3 \mp f \times (nz + my)}$; sed si ϖ distet a lineâ apsidum plusquam 90 gradibus, erit T L $=$ K L $-$ T K sive $-$ T K $+$ K L, ideóque T E fiet $\frac{-nz + my}{r}$, sed cùm in eo casu signum anceps litteræ f mutari debeat, statuatur non mutari illud signum litteræ f dum Luna est in eâdem quadraturâ donec in aliam quadraturam transeat, quamvis magis quàm 90 gradibus ab apside discedat, mutari debebit ut fiat æquipollentia signum quantitatis $\frac{-nz + my}{r}$, quæ

itaque evadet ut prius $\frac{nz - my}{r}$, ideóque fiet $x = \frac{q^2 r^2}{r^3 \mp f \times (nz - my)}$ quotiescumque ϖ et apsis alterutra non erunt in eâdem quadraturâ, determinando signum anceps $\mp f$ ex apside cui vicinior fuit Luna cùm eam quadraturam describere incepit. Q. e. o. 2°.

Cor. Hic valor x in seriem redactus evadit $\frac{q^2}{r} \times (1 \pm \frac{f \times \overline{nz \pm my}}{r^2} + \frac{f^2 \times \overline{nz \pm my}|^2}{r^4} \pm \frac{f^3 \times \overline{nz \pm my}|^3}{r^6}$, &c.) signa superiora litteræ f sunt adhibenda cùm initium quadraturæ, quam describit Luna, minus distat ab apogæo quàm 90 gr. tam in consequentia quàm in antecedentia, si verò magis distet ab apogæo quàm 90 gr. signa inferiora sunt adhibenda.

Signa superiora quantitatis m y sunt adhibenda cùm et Luna et apsis alterutra sunt in eâdem quadraturâ, signa inferiora cùm Luna et apsis sunt in diversis quadraturis.

PROBL. I.

Dato sinu et cosinu anguli quem faciunt linea apsidum et linea quadraturarum, invenire quantitatem graduum quibus tardatur Luna per actionem Solis secundum directionem radii orbitæ lunaris exercitam, tempore quo Luna orbitam suam percurrit.

Supponitur lineam apsidum et Solem immotos manere durante illâ revolutione Lunæ; quo posito, cùm retardationis Lunæ elementum inventum fuerit (Cor. 2. Theor. VIII.) $\frac{2a^5 Y du}{q r^4 V} - \frac{2x^5 y^2 Y du}{109.73\, q r^6 V}$, loco $\frac{2rYdu}{qV}$ ponatur ejus valor $\frac{2rFdu}{Vaq} \times \frac{3y^2}{r} - r$ et loco $\frac{x}{r}$ valor ejus $\frac{q^2}{r^2} \times (1 \pm f \times \frac{nz \pm my}{r^2}$, &c.) qui ad quintam dignitatem evehatur, dicatur A terminus $nz \pm my$, ea quinta dignitas erit $\frac{q^{10}}{r^{10}} \times (1 \pm \frac{5fA}{r^3} + \frac{15f^2A^2}{r^6} \pm \frac{35f^3A^3}{r^8})$; verùm observari potest, quod siquidem totidem sunt quadrantes in quibus f positivum aut negativum sumi debet, si tota revolutio Lunæ spectetur, hi termini ancipites omitti possunt, vel ab initio, hæc quinta dignitas sumi debet quasi foret $\frac{q^{10}}{r^{10}} \times (1 + \frac{15f^2A^2}{r^2})$ ducatur in $1 - \frac{yy}{109.73\, r^2}$ fiet $\frac{q^{10}}{109.73\, r^{12}} \times (109.73r^2 - y^2 + 15 \times 109.73 \frac{f^2A^2}{r^4} - \frac{15f^2y^2A^2}{r^6})$ denique ducatur in $\frac{2Fdu}{Vaq} \times (3y^2 - r^2)$ fit $\frac{2Fq^9du}{109.73Var^{12}} \times (329.19r^2y^2 - 3y^4 - 109.73r^4 + r^2y^2 + \frac{45 \times 109.73 f^2y^2A^2}{r^4}) - \frac{15 \times 109.73 f^2r^2A^2}{r^4} - \frac{45f^2y^4A^2}{r^6} + \frac{15f^2y^2A^2}{r^4}$ sive $\frac{2Fq^9du}{109.73Var^{12}} \times (330.19r^2y^2 - 3y^4 - 109.73r^4 + \frac{330.19 \times 15f^2y^2A^2}{r^4} - \frac{15 \times 109.73f^2r^2A^2}{r^4} - \frac{45f^2y^4A^2}{r^6})$. Loco A^2 substituatur $n^2z^2 + m^2y^2$, omisso termino $\pm 2mnzy$ quia quando tota revolutio Lunæ assumitur, duo sunt quadrantes in quibus Luna est cum apside, duo verò in quibus Luna cum neutrâ apside occurrit, fit tandem totum elementum $\frac{2Fq^9du}{109.73Var^{12}} \times (330.19r^2y^2 - 3y^4 - 109.73r^4 + \frac{330.19 \times 15f^2n^2z^2y^2}{r^4} + \frac{330.19 \times 15f^2m^2y^4}{r^4} - \frac{109.73 \times 15f^2r^2n^2z^4}{r^4} - \frac{109.37 \times 15f^2r^2m^2y^2}{r^4} - \frac{45f^2n^2z^2y^4}{r^6} - \frac{45f^2m^2y^6}{r^6})$; cujus integralis secundùm Lemma I. calculi præcedentis pro quadrante fit $\frac{2Fq^9}{109.73Var} \times \frac{330.19r^4c}{8} - \frac{3 \times 3r^4c}{4 \times 8} - \frac{109.73r^4c}{4} + \frac{330.19 \times 15f^2n^2r^4c}{8r^4} - \frac{330.19 \times 15f^2n^2 \times \frac{3}{4}r^4c}{8r^4} + \frac{330.19 \times 15f^2m^2 \times \frac{3}{4}r^4c}{8r^4} - \frac{109.73 \times 15f^2n^2r^4c}{4r^4} + \frac{109.73 \times 15f^2n^2r^4c}{8r^4} - \frac{109.73 \times 15f^2m^2r^4c}{8r^4} - \frac{45f^2n^2 \times \frac{3}{4}r^4c}{8r^4} + \frac{45f^2n^2 \times \frac{3 \times 5}{4 \times 6}r^4c}{8r^4} - \frac{45f^2m^2 \times \frac{3 \times 5}{4 \times 6}r^4c}{8r^4}$; quod reductum efficit $\frac{2Fq^9c}{109.73\ V.\ a.\ r} \times (\frac{108.48}{8} + \frac{330.19 \times 15 \times f^2 \times \overline{\frac{1}{4}n^2 + \frac{3}{4}m^2}}{8r^4} - \frac{109.73 \times 15f^2\,\overline{n^2 + m^2}}{8r^4} - \frac{45f^2 \times \overline{\frac{1}{8}n^2 + \frac{5}{8}m^2}}{8r^4})$ quod quadruplicatum efficit $\frac{Fq^9c}{109.73\ V a r^8} \times (108.48 + 330.19 \times 15f^2 \times \frac{\frac{1}{4}n^2 + \frac{3}{4}m^2}{r^4} - 109.73 \times 15f^2 \times \frac{n^2 + m^2}{r^4} - 45f^2 \times \frac{\frac{1}{8}n^2 + \frac{5}{8}m^2}{r^4})$ sive tandem $\frac{Fq^9c}{109.73\ V a r^8} \times (108.48 + 136.0375 \times 15\frac{f^2m^2}{r^4} - 27.5575 \times \frac{15f^2n^2}{r^4})$.

Cor. Si Sol et apsis immoti non fingantur, sed supponatur eos pari passu moveri, res eodem redibit, si modò hæc revolutio, quâ durante nascitur hæc tardatio, censeatur æqualis mensi synodico; quamvis autem apsis reverâ non sequatur

motum Solis, sed longe lentiùs procedat, imo in isto calculo immota censeri debeat, non tamen inde oritur error ullius momenti tam propter eccentricitatem orbitæ lunaris quæ magna non est, quàm propterea quod maxima pars hujus tardationis pendeat ex positione Lunæ respectu Solis, et minima sit ea pars hujus tardationis quæ per situm Lunæ respectu apsidum determinatur.

Cor. 2. Ex his terminis $\frac{F q^9 c}{109.73 \ V a r^8} \times (108.48 + 136.0375 \times 15 \frac{f^2 m^2}{r^4} - 27.5575 \times 15 \frac{f^2 n^2}{r^4})$ liquet quod si linea apsidum cum lineâ quadraturarum consentiat, quo casu sinus m anguli quem facit linea apsidum cum linea quadraturarum evanescit, et ejus cosinus n fit r, hæc tardatio fit omnium minima, nempe $\frac{F q^9 c}{109.73. V a r} \times (108.48 - 27.5575 \times 15 \frac{f^2}{r^2})$.

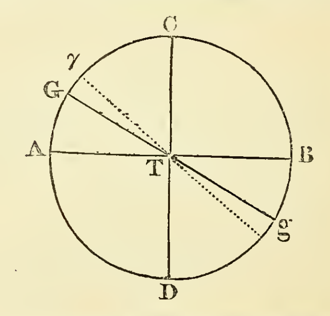
E contra, si linea apsidum sit in syzygiis ita ut m fiat r, et n evanescat, hæc expressio fit omnium maxima nempe $\frac{F q^9 c}{109.73. \ V a r^8} \times (108.48 + 136.0375 \times 15 \frac{f^2}{r^2})$; ideò mensis synodicus fit minimus cùm apsides sunt in quadraturis, longissimus verò cùm apsides sunt in syzygiis.

Cor. 3. Hinc oritur altera æquatio solaris Lunæ, quæ secunda dicitur, et pendet ex situ apsidum, sive apogæi, respectu Solis.

PROBL. II.

Posito Solem in mediocri suâ distantiâ versari et lineam apsidum omnes possibiles positiones cum lineâ syzygiarum successive obtinere, invenire tardationem mediocrem Lunæ in singulâ ejus revolutione synodicâ.

Sit linea apsidum, in ipsâ directione syzygiarum A et B, et dum Sol ab apogæo Lunæ in consequentia movetur, et apogæum revera est immotum, fingatur Solem immotum stare et ipsum apogæum a Sole in antecedentia regredi; moveatur apogæum ex G in γ per arcum quamminimum G γ qui dicatur d u tardatio Lunæ quæ fiet dum describitur G γ erit ad totam tardationem quæ fieret si apsis foret immota in G et quæ per Probl. præcedens inveniretur, ut tempus quo apsis describit arcum G γ ad totum mensem synodicum: dicatur ergo A tempus quo apsidum revolutio Solis respectu absolveretur, quod in hac hypothesi est ipse annus sidereus, erit ut tota circumferentia c ad d u, ita A ad tempus quo apsis arcum d u describet, quod erit $\frac{A d u}{c}$. Præterea ut mensis synodicus S ad hoc tempus $\frac{A d u}{c}$, ita tardatio mense synodico facta, quæ est $\frac{F q^9 c}{109.73 \ V a r^8} \times (108.48 + 136.0375 \times 15 \frac{f^2 m^2}{r^4} - 27.5575 \times 15 \frac{f^2 n^2}{r^4})$ ad tardationem quæ fiet tempore $\frac{A d u}{c}$ quæ erit itaque $\frac{A F q^9 d u}{S \times 109.73. \ V. a r^8} \times (108.48 + 136.0375 \times 15 \times \frac{f^2 m^2}{r^4} - 27.5575 \times 15 \frac{f^2 n^2}{r^4})$ (in quâ expressione m respondet quantitati y quæ in Lemmate I. præcedentis calculi adhibetur, et n respondet quantitati z) et integretur pro quadrante juxta Cor. 4. ejus Lem. habebitur $\frac{A. F q^9}{S \times 109.73. \ V. a r^8} \times \frac{108.48 \ c}{4} + \frac{136.0375 \times 15 f^2 r^2 c}{4 r^4} - \frac{163.595 \times 15 f^2 r^2 c}{8 r^4})$; quadruplicetur verò pro toto circulo fiet $\frac{A \ F q^9 c}{S \times 109.73. \ V a r^8} \times (108.48 + \frac{813.6 f^2}{r^2})$; denique ut totum tempus A ad tempus synodicum



S ita hæc tardatio ad tardationem mense synodico factam, quæ erit ergo $\frac{F q^9 c}{109.73 \ V a r^8} \times (108.48 + \frac{813.6 f^2}{r^2})$.

PROBL. III.

Positâ excentricitate orbitæ Telluris circa Solem, et orbitæ Lunæ circa Terram invenire tardationem Lunæ, 1. dum Terra describit arcum quamminimum datum, 2. dum describit annuam suam orbitam, 3. durante mense synodico, 4. dum Terra ab aphelio suo ad mediocrem suam a Sole distantiam pervenit.

Sit a mediocris distantia Telluris a Sole, x alia quævis distantia, si F sit vis Solis in distantia a, erit $\frac{a a F}{x x}$ ejus vis in distantia x; ergo in calculo Probl. mox præcedentis quo tardationem mense synodico factam invenimus, x loco a ponatur et $\frac{a a F}{x x}$ loco F, evadet tardatio $\frac{a^2 F q^9 c}{109.73 \ V x^3 r^8} \times (108.48 + \frac{813.6 f^2}{r^2})$, et si

A sit annus sidereus, M mensis periodicus Lunæ citra omnem Solis actionem, est $\frac{F}{V} = \frac{M^2 a}{A^2 r}$ (per Cor. 2. Prop. IV. Lib. I.) hinc ista tardatio evadit $\frac{M^2 a^3 q^9 c}{109.73 A^2 x^3 r^9} \times (108.48 + \frac{813.6 f^2}{r^2})$.

Sit b semi-axis minor ellipseos quam Terra describit circa Solem, e excentricitas, k peripheria radio a descripta, ideóque sit $\frac{1}{2}$ b k area tota ellipseos quam Terra describit circa Solem, sit d u motus angularis Terræ circa Solem quam minimo tempore, area illi angulari motui respondens erit $\frac{x x d u}{2 a}$, (ut constat ex calculo præcedente) ideóque ut ellipsis tota $\frac{1}{2}$ b k ad hanc aream $\frac{x x d u}{2 a}$, ita annus A, ad tempus quo arcus d u describitur, qui erit ergo $\frac{A x x d u}{a b k}$, et ut mensis synodicus S ad id tempus, ita tota tardatio ad tardationem hoc tempore factam quæ erit $\frac{A M^2 a^3 x^2 q^9 c d u}{109.73. S. A^2 x^3 a b k r^9} \times (108.48 + \frac{813.6 f^2}{r^2})$ sive $\frac{M^2 a^2 q^9 c d u}{109.73. S. A x. b k r^9} \times (108.48 + \frac{813.6 f^2}{r^2})$ sed $\frac{a}{x}$ est $\frac{a^2 \mp e z}{b^2}$ per Lem. II. calculi præcedentis, hinc istud elementum evadit

$$\frac{M^2 a q^9 c \times (108.48 + 813.6 \frac{f^2}{r^2})}{109.73. S. A. b^3 k. r^9} \times (a^2 du \mp e z d u)$$

cujus integralis est $\frac{M^2 a q^9 c \times (108.48 + 813.6 \frac{f^2}{r^2})}{109.73. S. A. b^3. k r^9} \times (a^2 u \mp a e y)$, quæ semi-circulo absoluto fit

$$\frac{M^2 a^3 q^9 c \times (108.48 + 813.6 \frac{f^2}{r^2})}{109.73. S. A. b^3 k r^9} \times \tfrac{1}{2} k;$$

cujus duplum est retardatio anno durante facta, estque $\frac{M^2 a^3 q^9 c \times (108.48 + 813.6 \frac{f^2}{r^2})}{109.73. S. A. b^3 r^9}$ hinc ut A ad S ita hæc tardatio ad tardationem mense synodico factam, quæ erit ergo $\frac{M^2 a^3 q^9 c}{A^3 b^3 r^9}$

$$\times \frac{108.48 + 813.6 \frac{f^2}{r^2}}{109.73}.$$

Denique, retardatio quæ convenit mediocri distantiæ a Sole, in quâ u est $\frac{1}{4}$ k — e, et est y = b, est $\frac{M^2 a q^9 c \times (108.48 + 813.6 \frac{f^2}{r^2})}{109.73 S. A. b^3 r^3}$

$$\times (\tfrac{1}{4} a^2 - \frac{a^2 e}{k} - \frac{a b e}{k}.)$$

PROBL. IV.

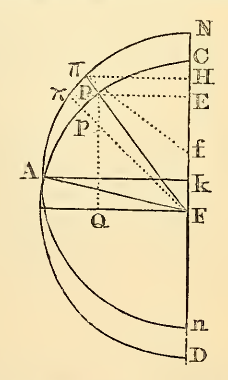
Dato tempore synodico apparenti Lunæ invenire tempus periodicum M quod observaretur si omnino abesset vis Solis.

Siquidem tempore M describeretur arcus c, tempore S describeretur $\frac{S c}{M}$, tempus autem periodicum quod tempori synodico S respondet est $\frac{A S}{A + S}$, ideóque cùm illo tempore revera describatur arcus c, tempore synodico S describeretur $\frac{A + S}{A}$ c, hinc retardatio quæ fit mense synodico est $\frac{S c}{M} - \frac{A c + S c}{A}$ sive $\frac{A S c - A M c - M S c}{A M}$; quæ inventa fuit $\frac{M^2 a^3 q^9 c}{A^2 b^2 r^9} \times \frac{108.48 + 813.6 \frac{f^2}{r^2}}{109.73}$ unde fit æquatio ex quâ valor quantitatis M obtinebitur, fiat ut in præcedenti calculo S = E A et M = X A, æquatio evadit E = X + E X + $X^3 \times \frac{a^3 q^9}{b^3 r^9} \times \frac{108.48 + 813.6 \frac{f^2}{r^2}}{109.73}$.

Sumatur excentricitas mediocris orbitæ lunaris quam .05505 r facit Newtonus in hoc scholio, unde is terminus $\frac{108.48 + 813.6 \frac{f^2}{r^2}}{109.73}$ evadit 1.0110782 est $\frac{q^9}{r^9}$ = 9864, est $\frac{a^3}{b^3}$ = 1. proximè, itaque æquatio est E = X × $\overline{1 + E} +$ 9972 X^3, loco E substituatur .0804896, loco X substituatur .0744 + R et æquatio evadit .08084896 = .08082583 + 1.09740854 R unde habetur .00002313 = 1.09740854 R unde obtinetur R = .0000210, et M = .0744210 A; fere ut in præcedenti calculo.

PROBL. V.

Invenire æquationem motûs medii lunaris quæ pendet ex Solis actione et quæ adhibenda est cùm Terra est in mediocri suâ distantiâ a Sole.



Hoc Problema solvitur ut in præcedenti calculo, itaque ut tota ellipsis cujus area est $\frac{1}{2}$ b k ad aream F N A (sive $\frac{b k}{8} + \frac{b e}{2}$.) ita tardatio

annua quæ inventa est

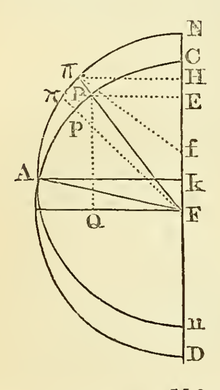
$$\frac{M^2 a^3 q^9 c \times (108.48 + 813.6 \times \frac{f^2}{r^2})}{S.\ A.\ b^3 r^9 \times 109.73.},$$

ad tardationem quæ in motu medio continetur, et quæ est ideò

$$\frac{M^2 a q^9 c \times (108.48 + 813.6 \frac{f^2}{r^2})}{S.\ A b^3 r^9 \times 109.73} \times (\tfrac{1}{4} a^2 + \frac{a^2 e}{k}),$$

cujus excessus supra retardationem veram Problemate III. inventam est

$$\frac{M^2 a q^9 c \times (108.48 + 813.6 \frac{f^2}{r^2})}{S.\ A b^3 r^9 \times 109.73} \times \frac{2 a^2 e + a b e}{k}$$



sive sumendo a b pro a^2 fit $\frac{M^2 a^3 q^9 c}{S.\ A.\ b^3 r^9} \times$

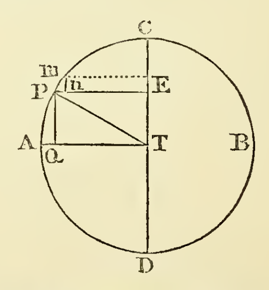
$$\frac{108.48 + 813.6 \frac{f^2}{r^2}}{109.73} \times \frac{3 e}{k} = \frac{.9972\ M^2}{S.\ A.} \times \frac{3 e c}{k}$$

(per Prob. IV.) est $\frac{3 e c}{k} = 2$ gr. 9005, est $\frac{M^2}{S A} = .0685042$ quod ductum in .9972 efficit .068312388, quod ductum in 2 gr. 9005, efficit 0°.1982 quod ductum per 60′. bis efficit 11″. 52‴. &c. sed in priori calculo erat 11″. 47‴, itaque medium inter hos duos valores est 11′. 49″, ut invenit Newtonus; cùm enim orbitæ lunaris figura sit admodum variabilis, et incerta sit excentricitas quæ ipsi citra actionem Solis conveniret, non immerito sumitur medium inter id quod prodit ex hypothesi orbem Lunæ esse circularem, et in hypothesi orbem Lunæ esse ellipsim, cujus excentricitas est ea excentricitas mediocris quæ observatur.

PROBL. VI.

Positâ excentricitate orbitæ lunaris, posito verò Solem in mediocri suâ distantiâ a Terrâ semper stare, invenire æquationem motûs medii Lunæ pendentem ex vario situ apogæi Lunæ, respectu Solis.

Inventum erat in Problemate I. quod tota tardatio Lunæ, durante mense periodico, in mediocri distantiâ Terræ a Sole et in data apsidis ad quadraturam positione erat $\frac{F q^9 c}{109.73\ V a r^8}$ $\times (108.48 + \frac{136.035 \times 15 f^2 m^2}{r^4} - \frac{27.5575.15 f^2 n^2}{r^4})$, posito sinum anguli lineæ apsidum cum lineâ quadraturarum esse m, cosinum verò anguli esse n, sive, quod eodem redit, sinum distantiæ apsidis a syzygiâ esse n, ejus cosinum esse m; præterea inventum erat quod si linea apsidum omnes possibiles positiones cum lineâ syzygiarum assumat, tota tardatio quæ eo tempore fit est $\frac{A F q^9 c}{S \times 109.73 \times V a r^8} \times (108.48 + \frac{813.6 f^2}{r^2})$; hinc si linea apsidum discedat a syzygiâ arcu u, et fingatur retardationem esse proportionaliter tempori distributam, fiet ut tota peripheria c ad eum arcum u, ita tota tardatio facta dum peripheria describitur, quæ est $\frac{A F q^9 c}{S \times 109.73 \times V a r^8} \times$ $(108.48 + \frac{813.6 f^2}{r^2})$, ad tardationem mediam huic tempori proportionalem quæ erit $\frac{A F q^9 u}{S \times 109.73 \times V a r^8} \times (108.48 + \frac{813.6 f^2}{r^2})$,



sed cùm elementum tardationis (eodem Prob. II.) repertum sit $\frac{A F q^9 d u}{S.\ 109.73 \times V a r^8} \times (108.48 + \frac{136.0375 \times 15 f^2 m^2 - 27.5575 \times 15 f^2 n^2}{r^4}.)$ Integralis ejus sumatur per Lemma I. calculi præcedentis, loco m ponendo z et loco n ponendo y, et integralis erit $\frac{A F q^9}{S \times 109.73 \times V a r^8} \times (108.48 u + \frac{136.0375 \times 15 f^2 \times APET - 27.5575 \times 15 f^2 APQ}{r^3})$ quæ quantitas si subtrahatur ex præcedenti, æquatio in datâ distantiâ u apogæi a Sole in antecedentia, vel Solis ab apogæo in consequentia erit $\frac{A F q^9 f^2}{S \times 109.73\ V a r^8} \times (813.6 r u - 136.0375 \times 15\ APET + 27.5575 \times 15\ APQ)$ est autem $APET = APQ + 2 PQT$, est $r u = 2 APT = 2 APQ + 2 PQT$, quibus valoribus substitutis, divisoque primo termino 813.6 per 15, æquatio evadit $\frac{15 A F q^9 f^2}{109.73 \times S.\ V.\ a r^8} \times$

(108.48 A P Q + 108.48 P Q T — 136.0375 × A P Q—272.075 P Q T + 27.5575 A P Q, et reductione factâ fit $\frac{15 A \times F q^9 f^2}{109.73 \times S. V. a r^8} \times$ (— 163.595 P Q T.)

Hæc æquatio negativa est cùm apogæum Lunæ ex A in C a syzygiâ ad quadraturam procedit, in quadraturâ evanescit, nam P Q T in quadraturâ fit zero: si apsis ex C in syzygiam B pergat, fit A P E T = A P Q — 2 P Q T, est r u = 2 A P T = 2 A Q P — 2 P Q T, quibus valoribus in æquatione substitutis quantitas — 163.595 P Q T ex negativâ positiva fit, rursus fit negativa cùm ex syzygiâ B ad quadraturam D apogæum pergit, positiva iterum ex D in A; evanescit verò in omnibus punctis syzygiarum et quadraturarum.

Cor. 1. Ex trigonometriâ notum est, quod sinus arcûs dupli alterius arcûs est duplum facti sinus arcûs simpli per ejus cosinum divisum per radium; ideóque constat quod sinus arcûs dupli alterius arcûs est semper ut factum arcûs simpli per ipsius cosinum; sed areæ Q P T duplum, nempe area T Q P E, et ipsum factum sinus Q P arcus A P per ejus cosinum T Q, ergo area Q P T est ut sinus arcûs dupli arcûs A P, æquatio autem inventa est ubique ut area illa P Q T siquidem constat ex facto illius areæ per constantes ductæ; ergo æquatio proposita est ubique ut sinus arcus dupli distantiæ apogæi Lunæ a syzygiâ.

Cor. 2. Hinc etiam sequitur illam æquationem evanescere in syzygiis et quadraturis, iis enim in punctis Luna distat a syzygiâ vel 90 gr. vel 180 gr. vel 270 vel 360, quorum arcuum duplum est 180, 360, 540, 720, quorum arcuum sinus sunt zero.

Cor. 3. Hinc etiam sequitur hanc æquationem esse maximam in octantibus; tunc enim cùm apogæum distet a syzygiâ vel 45 gr. vel 135 vel 225 vel 315 quorum dupli sunt, 90 gr. 270, 450, 630, &c. et horum arcuum sinus sit radius qui omnium sinuum maximus est, sequitur æquationem istis sinibus proportionatam hic loci esse maximam.

Cor. 4. In octantibus hæc area P Q T est $\frac{1}{4} r^2$, ut notum est, hinc ista æquatio evadit $\frac{40.89875 \times 15 A F r^9 f^2}{109.73 S. V \times a r^9}$, loco $\frac{F}{V}$ ponatur $\frac{M^2 a}{A^2 r}$ est $f^2 = 0030305 r^2$; est $\frac{q^9}{r^9} = .9864$ tota quantitas fit $\frac{40.89875 \times 15 \times .00298928\, r \times A M^2}{109.73.\ S.\ A^2}$ sed inventum est quod est $\frac{M^2}{S A} = .0685042$, et est $\frac{40.89875 \times 15}{109.73} = 5.59082$ hinc tota æquatio est .0011448782 r, sed r est æqualis arcui 57 gr. 29′, &c. hinc æquatio est graduum .065590872, &c. quod ductum per 60 efficit 3′.9354, et .9354 ductum per 60, efficit 56″. Ita ut tota æquatio sit 3′. 56″, &c.

Cor. 5. Newtonus non tradit quantitatem hujus æquationis qualem illam ex calculis invenit, sed ait ille, *Hæc æquatio quam semestrem vocabo in octantibus apogæi quando maxima est ascendit ad 3′. 45″. circiter quantum ex phænomenis colligere potui. Hæc est ejus quantitas in mediocri Solis distantiâ a Terrâ.* Scilicet in hypothesibus nostris apsidem et Terram immotam assumpsimus, cùm id revera non sit; ideóque, si concedatur nos attigisse verum Newtoni calculum, æquatio per calculum inventa non plane eadem erit cum verâ, parum tamen admodum ab illâ differet; cæterum omnes æquationis veræ leges ex iis quæ per istum calculum obtinentur meritò deducentur, et eæ ipsæ sunt quæ in præcedentibus Coroll. sunt constitutæ, sed absoluta æquationis quantitas ex observatione, non ex calculo, est petenda, differunt autem calculus et rei veritas 3″. duntaxat quod theoriæ præstantiam sufficienter probat.

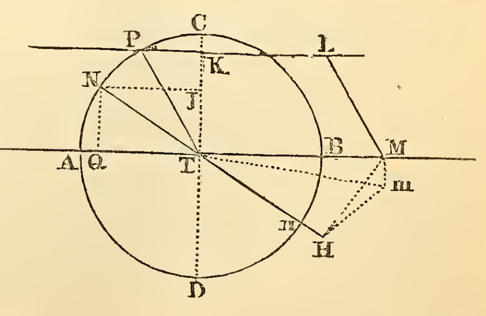
De æquatione motûs lunaris semestri secunda quæ pendet ex positione lineæ nodorum, respectu lineæ syzygiarum.

Ex inclinatione orbitæ lunaris ad planum eclipticæ fit ut pars actionis Solis consumatur in ipso plano orbitæ lunaris ad planum eclipticæ admovendo, sicque tota non occupetur, ut hactenus suppositum fuerat in distrahendo Lunam a Terræ centro aut illam ad id attrahendo, aut alio modo Lunam in proprio ejus plano accelerando aut retardando. Hinc æquationes prius inventæ novâ correctione indigent.

PROBL. I.

Invenire partem actionis Solis quæ Lunam secundum radium ejus orbitæ trahit, sublatâ eâ parte actionis Solis quæ consumitur in ipso plano orbitæ lunaris dimovendo.

Sit A T B linea syzygiarum in eclipticæ plano; N T n linea nodorum; P locus Lunæ in propria orbita; P L, L M directiones virium



in quas resolvitur vis Solis, quarum P L est parallela T M et L M parallela radio T P.

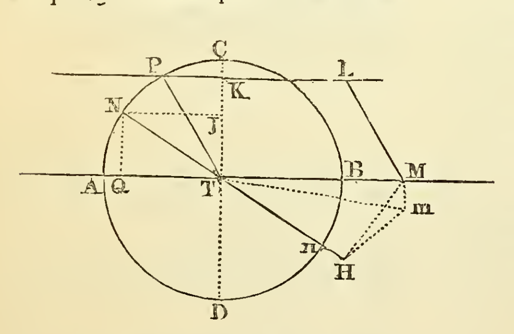
Ducatur ex M in planum orbitæ lunaris productum perpendicularis M m, ducatur in plano

orbitæ lunaris linea T m, et ex M et m ducantur perpendiculares M H, m H in lineam nodorum N n productam.

Radius T P dicatur r ut prius, distantiæ Lunæ a quadraturâ sinus P K dicatur y, cosinus T K dicatur z; distantiæ nodorum a syzygia sinus N Q sit n, cosinus T Q sit m; denique sinus inclinationis orbitæ lunaris ad eclipticam dicatur l, existente r radio, et ea inclinatio constans supponatur, quæ secundùm Keplerum, De la Hirium, &c. est ubi maxima, graduum 5. 19′. 30″.

Ex demonstratis est T M = 3 y; et propter similitudinem triangulorum N T Q, M T H, est N T (r) : M T (3 y) : : N Q (n) : M H $\left(\frac{3\,y\,n}{r}\right)$, et quia angulus M H m est angulus inclinationis orbitæ lunaris ad eclipticam, ut r : l : : M H $\left(\frac{3\,y\,n}{r}\right)$: M m = $\frac{3\,y\,n\,l}{r^2}$; denique ut est T M (3 y) ad M m $\left(\frac{3\,y\,n\,l}{r^2}\right)$ sic est r ad sinum anguli M T m qui erit ergo $\frac{n\,l}{r}$, cujusque cosinus erit $\sqrt{r^2 - \frac{n^2\,l^2}{r^2}}$ sive $r - \frac{n^2\,l^2}{2\,r^3}$.

Jam autem tota vis T M est ad eam ejus partem quæ agit secundum planum orbitæ lunaris



ut radius ad cosinum anguli M T m sive ut r ad $r - \frac{n^2\,l^2}{2\,r^3}$ et in eâdem proportione minuuntur partes in quas resolvitur ea vis, ergo cùm portio totius vis T M secundùm directionem radii exercita (si planum orbitæ lunaris et eclipticæ idem fuissent) sit $\frac{F}{a} \times \frac{3\,y\,y}{r}$ ex superiùs demonstratis; pars residua propter inclinationem plani erit $\frac{F}{a} \times \frac{3\,y\,y}{r} - \frac{3\,y^2\,n^2\,l^2}{2\,r^5}$; vis autem L M quæ est $\frac{F}{a}$ r et negative sumitur, nullam diminutionem patitur ex hâc inclinatione, quippe P T est in ipsâ orbitâ lunari, ideóque ejus planum quomodocumque situm non dimovet; hinc ergo pars actionis Solis quæ Lunam secundum radium ejus orbitæ trahit, sublatâ eâ parte quæ consumitur in plano orbitæ dimovendo est $\frac{F}{a} \times \left(\frac{3\,y\,y}{r} - r - \frac{3\,y^2\,n^2\,l^2}{2\,r^5}\right)$.

PROBL. II.

Dato sinu anguli quem faciunt lineæ nodorum et syzygiarum, invenire quantitatem graduum quibus tardatur Luna per actionem Solis secundum directionem radii orbitæ lunaris exercitam, semotâ eâ ejus actionis parte quæ in dimovendo plano orbitæ lunaris exercetur.

Elementum retardationis Lunæ (Probl. I. calculi prioris) inventum erat $\frac{2\,Y\,d\,u}{V}$, loco Y ponatur ejus valor Probl. præcedente inventus $\frac{F}{a} \times \left(\frac{3\,y\,y}{r} - r - \frac{3\,y^2\,n^2\,l^2}{2\,r^5}\right)$; si, quia jam actum est de retardatione per vim $\frac{F}{a} \times \left(\frac{3\,y\,y}{r} - r\right)$ productâ, adhibeatur solummodo quantitas $\frac{F}{a} \times - \frac{3\,y^2\,n^2\,l^2}{2\,r^5}$ (quæ cùm negativa sit ex retardatione fit acceleratio) hinc, accelerationis ex hâc causâ pendentis elementum est $\frac{2\,F\,d\,u}{V\,a} \times \frac{3\,y^2\,n^2\,l^2}{2\,r^5}$, cujus integralis pro quadrante est $\frac{F\,n^2\,l^2}{V\,a\,r^5} \times \frac{3\,r^2\,c}{8}$ et quadruplicatum pro revolutione integrâ fit $\frac{3\,F\,n^2\,l^2\,c}{2\,V\,a\,r^3}$. Unde liquet quod cùm linea nodorum est in ipsâ lineâ syzygiarum, quo casu n evanescit, tunc motus Lunæ est ipse ille qui præcedentibus theoriis fuit inventus, quando verò linea nodorum est in lineâ syzygiarum, tunc est n = r, et est acceleratio $\frac{2\,F\,l^2\,c}{2\,V\,a\,r}$ quæ tum maxima est.

PROBL. III.

Posito Solem in mediocri suâ distantiâ versari, et lineam nodorum omnes possibiles positiones cum lineâ syzygiarum successivè obtinere, invenire æquationem motûs medii Lunæ pendentem ex vario situ nodorum Lunæ.

Primò, ut inveniatur acceleratio mediocris quæ ex inclinatione plani lunaris oritur, fingatur Solem immotum stare, et lineam nodorum ab eo recedere in antecedentia (nodorum autem motum proprium hic omittere licet, cùm in Problemate præcedente omissus sit, sic enim utraque omissio sese compensant.)

Moveatur nodus ex N per arcum d u, acceleratio Lunæ quæ fiet dum describitur d u erit ad accelerationem toto mense factam, ut tempus quo nodus describit arcum d u ad totum mensem,

sed tempus quo nodus describit arcum d u est $\frac{A\,d\,u}{c}$, nam ut tota peripheria c ad arcum d u, ita annus sidereus A ad tempus quo arcus d u describitur, quod erit ergo $\frac{A\,d\,u}{c}$, ergo ut mensis synodicus S, ad hoc tempus $\frac{A\,d\,u}{c}$, ita acceleratio uno mense facta quæ inventa est $\frac{3\,F\,l^2\,n^2\,c}{2\,V\,a\,r^3}$ ad $\frac{3\,A\,F\,l^2\,n^2\,d\,u}{2\,S.\,V.\,a\,r^3}$. Integretur pro quadrante et erit $\frac{3\,A\,F\,l^2\,r^2\,c}{2 \times 8\,S.\,V\,a\,r^3}$ quadruplicetur pro totâ revolutione fiet $\frac{3\,A\,F\,l^2\,c}{4\,S\,V\,a\,r}$, et hæc erit acceleratio motûs medii Lunæ propter orbitæ inclinationem.

Hinc si linea nodorum discedat a lineâ syzygiarum arcu u, et fingatur totam accelerationem proportionaliter tempori distribui, fiat ut tota peripheria c ad eum arcum u, ita tota tardatio $\frac{3\,A\,F\,l^2\,c}{4\,S.\,V\,a\,r}$, ad accelerationem huic tempori proportionalem quæ erit $\frac{3\,A\,F\,l^2\,u}{4\,S.\,V.\,a\,r}$ sive $\frac{3\,A\,F\,l^2}{2\,S.\,V\,a\,r^2} \times \frac{r\,u}{2}$. Sed integralis elementi $\frac{3\,A\,F\,l^2\,n^2\,d\,u}{2\,S\,V\,a\,r^2}$ quando arcus A N est u, est $\frac{3\,A\,F\,l^2 \times A\,N\,Q}{2.\,S.\,V.\,a\,r^2}$ (ex Lem. I. calc. 1.) hæc ergo quantitas ex præcedenti substracta dat æquationem sive differentiam accelerationis mediæ et accelerationis veræ, quæ æquatio erit ergo $\frac{3\,A\,F\,l^2}{2\,S\,V\,a\,r^2} \times (\frac{r\,u}{2}$ — A N Q), sed $\frac{r\,u}{2}$ — A N Q est triangulum N Q T, et est $N\,Q\,T = \frac{n\,m}{2} = \frac{2\,n\,m}{4}$, hinc æquatio proposita sive excessus accelerationis mediæ super veram est $\frac{3\,A\,F\,l^2}{8\,S.\,V\,a\,r} \times \frac{2\,n\,m}{r}$, quæ est quantitas quâ minuendus est motus medius Lunæ ut ejus locus verior habeatur.

Cor. Hinc cùm quantitates $\frac{3\,A\,F\,l^2}{8\,S.\,V\,a\,r}$ sint constantes et $\frac{2\,n\,m}{r}$ sit sinus arcûs dupli distantiæ nodi a syzygiâ, æquatio est ubique ut sinus arcûs dupli distantiæ nodi a syzygiâ, ergo evanescit in syzygiis et quadraturis; maxima est in octantibus, cùmque sit illic $m = n = r \sqrt{\frac{1}{2}}$, est $\frac{2\,n\,m}{r} = r$: loco $\frac{F}{V}$ ponatur $\frac{M^2\,a}{A^2\,r}$, æquatio in octantibus fit $\frac{3\,M^2\,l^2}{8\,S.\,A.\,r}$, sed cùm inclinatio sit 5 gr. $19\frac{1}{2}'$. cujus sinus l est ·9281 r, ideóque $\frac{l^2}{r}$ est ·00865 r, et $\frac{3\,l^2}{8\,r}$ = ·00325, cùm verò $\frac{M^2}{S.\,A}$ (per Probl. V. calc. præc.) sit .0685, hinc æquatio evadit in octantibus ·000221 r; denique est r = 57^{gr}. 29′, quod ad secundas reductum efficit 206264″, et ductum per ·000223 efficit 45″·6, quam Newtonus 47″ per theoriam gravitatis se invenisse profitetur.

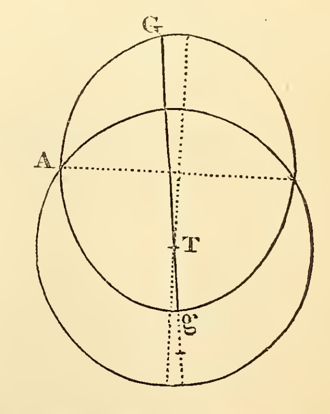
DE MOTU APSIDUM.

Newtonus Sectione XI. Lib. I. Princip. ingeniosissimam excogitavit rationem motum apsidum ad calculum revocandi, fingendo nempe vim externam Solis posse conferri cum vi quæ ex revolutione plani ipsius orbitæ lunaris oriretur, sicque inveniri curvam per motum corporis in ellipsi mobili genitam quæ eadem foret cum eâ quæ per vis extraneæ adjunctionem nasceretur; eidem methodo mox insistemus et ex eâ leges motûs apsidum derivantur accuratissimè quales illas Newtonus statuit; sed fatendum ipsam absolutam ejus motûs quantitatem dimidio circiter minorem inveniri illâ quæ per observationes innotescit; itaque aliam indicare methodum rem eamdem æstimandi, priori illâ non omissâ, inopportunum visum non est.

PROBL. I.

Sol supponatur immotus; linea apsidum qualemcumque angulum cum lineâ quadraturarum efficiat, ejusque anguli sinus sit y; invenire motum apogæi dum Luna ab apogæo ad apogæum redit.

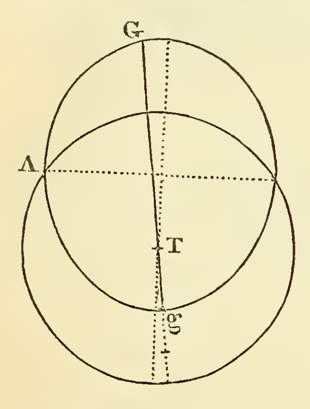
Sit G A g ellipsis quam Luna circa Terram T describit; sit G apogæum, g perigæum; dicatur r semi-axis major; T distantia apogæa T—2 f distantia perigæa. Centro T describatur circulus radio r, eum circulum Luna describeret eodem tempore quo ellipsim suam describit, et vis centralis Terræ in Lunam in eodem circulo revolventem foret $\frac{d\,u^2}{2\,r}$ ex notâ circuli proprietate.



Portiones d u ejus circuli ubique æquales in-

telligantur, et sumantur in ellipsi arcus terminati per lineas e centro T per utrumque extremum arcûs illius d u ductas; liquet, quod dum arcus illi elliptici describentur, lineolæ per quas Luna ex tangente ad ellipsin reducetur, erunt effectus vis centralis Terræ et vis Solis secundum directionem radii orbitæ lunaris, conjunctis vel oppositis actionibus Lunam trahentium.

Lineolæ autem propter vim centralem Terræ descriptæ erunt ubique, primò in ratione ipsius vis centralis, sive inversè ut quadrata distantiarum a centro, ideóque in distantia X erunt $\frac{r^2 du^2}{2rX^2}$; et secundò ut quadrata temporum sive ut quadrata arearum ellipseos quæ respondent arcubus æqualibus d u; illæ verò areæ cùm sint inter se similes (ob æquales angulos in T arcubus æqualibus d u mensuratos) erunt ut X^2, ideóque tempora erunt ut X^2 eorumque quadrata ut X^4; ideóque vis centralis Terræ



effectus, dum describitur area quæ respondet arcui d u, erit ubique $\frac{r^2 du^2}{2rX^2} \times \frac{X^4}{r^4}$ sive $\frac{X^2 du^2}{2r^3}$. In apogæo erit $\frac{T^2 du^2}{2r^3}$ in perigæo $\frac{T^2 du^2}{2r^3} - \frac{4Tf du^2}{2r^3}$, &c.

Vis Solis in Lunam agens secundum directionem radii orbitæ lunaris dicatur Y in mediocri distantiâ, et quia crescit ut distantiæ, in distantiâ X fit $\frac{X}{r}$ Y, ejus verò effectus crescit ut quadrata temporum, ideóque per ea quæ dicta sunt, effectus ejus vis dum describitur area quæ respondet arcui d u est $\frac{X}{r} \times Y \times \frac{X^4}{r^4}$ sive $\frac{X^5}{r^5}$ Y, in apogæo erit $\frac{T^5}{r^5}$ Y, in perigæo $\frac{T^5}{r^5}$ Y — $\frac{10T^4f}{r^5}$ Y, &c.

Sit, ut prius, F vis Solis in Terram in ejus mediocri distantiâ à Terrâ a, inventum est vim Y esse $\frac{F}{a} \times (\frac{3yy}{r} - r)$, et vim Lunæ in mediocri distantiâ esse ad vim Solis F ut $A^2 r$ ad $M^2 a$ (A ut prius est annus sidereus, M mensis periodicus, sed sepositâ Solis actione) cùm ergo effectus vis Terræ in Lunam in mediocri distantiâ dum describitur area $\frac{rdu}{2}$ sit $\frac{du^2}{2r}$, si fiat ut $A^2 r$ ad $M^2 a$ ita $\frac{du^2}{2r}$ ad quartum qui erit $\frac{M^2 a}{A^2 r} \times \frac{du^2}{2r}$, is terminus erit effectus vis Solis quæ per F exprimitur, sicque effectus vis Y in mediocri distantiâ dum describitur area $\frac{rdu}{2}$ erit $\frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{du^2}{2r} \times (\frac{3yy}{r} - r)$, et in quâ i. cumque distantiâ X erit $\frac{X^5}{r^5} \times \frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{du^2}{2r} \times (\frac{3yy}{r} - r)$.

Hinc fluxio secunda orbitæ lunaris; hoc est, lineola ad Terram directa, intercepta inter tangentem et curvam lunarem quæ est differentia (vel summa) effectuum vis centralis Terræ et vis Solis in Lunam dum arcus respondens arcui d u percurritur, erit ubique $\frac{du^2}{2r} \times (\frac{X^2}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{X^5}{r^5} \times \overline{\frac{3yy}{r} - r})$.

Hæc fluxio in apogæo erit $\frac{du^2}{2r} \times (\frac{T^2}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{T^5}{r^5} \times \overline{\frac{3yy}{r} - r})$; in perigæo verò erit $\frac{du^2}{2r} \times \overline{\frac{T^2}{r^2} - \frac{4Tf}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times (\frac{T^5}{r^5} - \frac{10T^4 f}{r^5}) \times (\frac{3yy}{r} - r)}$; ubi notandum quod si Sol immotus fingatur, (ut in hyp. Problem. assumitur,) et si perigæum esset e diametro oppositum apogæo, tunc quantitas $\frac{3yy}{r} - r$ eadem absolutè foret tam in apogæo quàm in perigæo.

Si conciperetur quod effectu virium existente in apogæo $\frac{du^2}{2r} \times \overline{\frac{T^2}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{T^5}{r^5} \times \frac{3yy}{r} - r}$ vera ellipsis describeretur, hic effectus virium in apogæo deberet esse ad earum effectum in perigæo, primò inversè ut quadrata distantiarum, secundo directè ut quadrata temporum sive ut quartæ dignitates distantiarum, unde illi effectus erunt ut quadrata distantiarum directè, hoc est ut T^2 ad $T^2 - 4Tf$, dividatur ergo effectus virium in apogæo per T^2 et ducatur in $T^2 - 4Tf$ effectus virium in perigæo esse deberet $\frac{du^2}{2r} \times \overline{\frac{T^2}{r^2} - \frac{4Tf}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times (\frac{T^5}{r^5} - \frac{4T^4 f}{r^5}) \times (\frac{3yy}{r} - r)}$: sed in perigæo ut et in apogæo ex naturâ apsidum evanescit fluxio distantiæ X ut pote maximæ vel minimæ, ejus autem fluxionis fluxio est is ipse effectus virium Terræ et Solis, ideò

fluens hujus effectus virium reverâ evanesceret, itaque ex ipsis hypothesibus oportebit ut $\int \frac{du^2}{2r} \times \overline{\frac{T^2}{r^2} - \frac{4Tf}{r^2} - \frac{M^2}{A^2r} \times \frac{T^5}{r^5} - \frac{4T^4f}{r^5} \times \frac{3yy}{r} - r} = 0$; sed in perigæo, spectatâ actione Terræ et Solis, fluxio secunda reperta erat $\frac{du^2}{2r} \times \overline{\frac{T^2}{r^2} - \frac{4Tf}{r} - \frac{M^2}{A^2r} \times \frac{T^5}{r^5} - \frac{10T^4f}{r^5} \times \frac{3yy}{r} - r}$. Itaque excedit eam quantitatem cujus fluens evadit zero quantitate $\frac{du^2}{2r} \times \overline{\frac{M^2}{A^2r} \times \frac{6T^4f}{r^5} \times \frac{3yy}{r} - r}$.

Punctum itaque perigæi non erit in puncto e diametro opposito apogæo, sed arcu quodam differet, quem obtinemus quærendo quonam in loco orbitæ lunaris fluens fluxionis secundæ ejus curvæ evanescat. Observandum autem, quod distantiæ Lunæ a Terrâ, circa puncta apogæi vel perigæi non multum mutantur, ideóque si perigæum arcu p transferatur, non magna mutatio exinde orietur in effectu vis centralis Terræ, sed sinus y qui occurrit in valore vis Solis evadet, $y + \frac{zp}{r}$ (sumpto z pro cosinu arcus cujus sinus est y, est enim $dy = \frac{zdu}{r}$ per naturam circuli, cùm hic verò agatur de arcu p non magno, potest poni p loco d u, et differentia sinuum pro d y) fiet itaque fluxio secunda orbitæ lunaris in loco in quo perigæum esse debebit $\frac{du^2}{2r} \times \left\{ \frac{T^2}{r^2} - \frac{4Tf}{r^2} - \frac{M^2}{A^2r} \times \frac{T^5}{r^5} - \frac{10T^4f}{r^5} \times \left(3y^2 + \frac{6yzp}{r} + \frac{3z^2p^2}{r^2}\right) \times \frac{1}{r} - r \right\}$ cujus pars $\frac{du^2}{2r} \times \overline{\frac{T^2}{r^2} - \frac{4Tf}{r^2} - \frac{M^2}{A^2r} \times \left(\frac{T^5}{r^5} - \frac{4T^4f}{r^5}\right) \times \frac{3yy}{r} - r}$ fluentem habet æqualem zero; fluens autem excessus $\frac{du^2}{2r} \times \left(\frac{M^2}{A^2r} \times - \frac{T^5}{r^5} \times \frac{6yzp}{r^2} + \frac{6T^4f}{r^5} \times \frac{3yy}{r} - r\right)$ fiat æqualis zero (omissis terminis in quibus f aut p ad duas dimensiones assurgunt) et habebitur valor p, quâtenus designat arcum quo processit perigæum, siquidem tota fluens fluxionis secundæ orbitæ lunaris in eo puncto fiet zero.

Hinc itaque divisis terminis per quantitatem communem $\frac{6M^2T^4du}{2Ar^8}$ habetur hæc æquatio

$$Tp \times \int \frac{yzdu}{r} = f \times \int 3yydu - rrdu,$$

sive quia $ydu = -rdz$ fit $Tp \times \int -zdz = f \times \int \overline{-3rydz - r^2du}$. Est autem $\int -zdz = \frac{1}{2}rr - \frac{1}{2}zz$ et $\int -ydz$ segmentum circulare cujus ordinata est y, sive sector circularis $\frac{1}{2}ru$, dempto vel assumpto triangulo cujus area est $\frac{1}{2}yz$; hinc æquatio evadit $\frac{1}{2}Tp \times (rr - zz) = f \times (\frac{3}{2}r^2u - \frac{3}{2}ryz - r^2u,)$ sive $Tp \times yy = f \times (r^2u - 3ryz,)$ unde tandem habetur $p = \frac{rf}{T} \times \frac{ru - 3yz}{yy}$.

Atque cùm hic sit motus perigæi quo tempore Luna fertur ab apogæo ad perigæum, erit motus apsidis durante unâ revolutione Lunæ ab apogæo ad apogæum $\frac{2fr}{T} \times \frac{ru - 3yz}{yy}$.

Cor. 1. Hinc motus apsidum nullus est cum $ru - 3yz = 0$; in quadraturis verò fit negativus; regrediuntur itaque apsides; maximus autem est in syzygiis et positivus, tunc enim evanescit quantitas negativa $3yz$, fit $u = \frac{1}{4}c$, et $y = r$, unde ille motus fit $\frac{fc}{2T}$ durante unâ revolutione Lunæ.

Cor. 2. Si hunc calculum accuratius instituere liceret, attendi posset ad motum Solis dum Luna ab apogæo ad perigæum movetur, promovetur enim interim Sol 13 circiter gradibus, itaque etsi Luna veram describeret ellipsim, perigæum non faceret cum quadraturâ eumdem angulum quem faciebat apogæum, sed 13 gradibus minus distaret in consequentia. Sed instituto calculo invenimus parum admodum exinde mutari motum perigæi in propriâ orbitâ, ita ut ad institutum nostrum sufficiat illum assumere qualis per Problema repertus est.

PROBL. II.

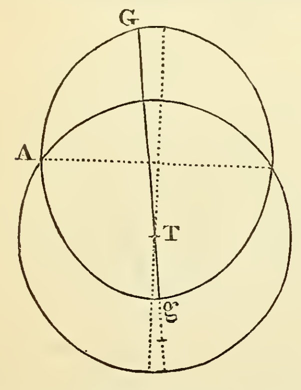
Invenire quantitatem motûs apsidum singulo anno.

Sit apogæum in quadraturâ, et Sole procedente apogæum inde versus syzygiam recedat.

Dicatur α tempus quo Sol revolutionem respectu apogæi Lunæ absolvit, dicatur π tempus quo Luna ab apogæo ad apogæum redit, sit c tota peripheria quam Sol apogæi respectu describit, et d u arcus ejus exiguus quo apogæum a quadraturâ recessisse censebitur propter Solis motum, tempus quo hunc arcum descripserit erit $\frac{adu}{c}$, et cùm tempore π, apogæum moveatur quantitate $\frac{2fr}{T.yy} \times (ru - 3yz)$ tempore $\frac{adu}{c}$ procedet quantitate $\frac{2\alpha fr}{\pi.Tc} \times \left(\frac{rudu}{y^2} - \frac{3yzdu}{y^2}\right)$, erit autem u arcus qui metitur distantiam apogæi a quadraturâ, y ejus sinus, et z ejus cosinus, et $du = \frac{rdy}{z}$ hinc quantitas $\frac{2afr}{\pi.T.c} \times \left(\frac{rudu}{y^2} - \frac{3zydu}{y^2},\right)$ fit $\frac{2afr}{\pi.T.c} \times \left(\frac{rudu}{y^2} - \frac{3rdu}{y}.\right)$

Ut habeatur fluens quantitatis $\frac{rudu}{y^2}$, ponatur loco u ejus valor $y + \frac{y^3}{6rr} + \frac{3y^5}{40r^4} + \frac{5y^7}{112r^6} + \frac{35y^9}{1152r^8} + \frac{63y^{11}}{2816r^{10}}$, &c. fiet $\frac{rudr}{yy} =$

$\frac{r\,d\,u}{y} + \frac{y\,d\,u}{6\,r} + \frac{3\,y^3\,d\,u}{40\,r^3} + \frac{5\,y^5\,d\,u}{112\,r^6} +$, &c. et dividendo r d u per valorem y, qui est $u - \frac{u^3}{6\,r\,r} + \frac{u^5}{120\,r^4} - \frac{u^7}{5040\,r^6}$ est $\frac{r\,d\,u}{y} = \frac{r\,d\,u}{u} + \frac{u\,d\,u}{6\,r} + \frac{7\,u^3\,d\,u}{360\,r^3} + \frac{31\,u^5\,d\,u}{15120\,r^5}$; et loco y d u in sequentibus terminis ponendo $-r\,d\,z$ et loco y^2 ejusque dignitatum ponendo $r^2 - z^2$ ejusque dignitates, fit $\frac{r\,u\,d\,u}{y\,y} = \frac{r\,d\,u}{u} + \frac{u\,d\,u}{6\,r} + \frac{7u^3du}{360\,r^3}$, &c. $- \frac{r\,d\,z}{6\,r} + \frac{3}{40} \times \frac{\overline{rr - zz} \times -rdz}{r^3} + \frac{5}{112} \times \frac{\overline{rr - zz}|^2 \times -r\,d\,z}{r^6} + \frac{35}{1152} \times \frac{\overline{rr - zz}|^3 \times -r\,d\,z}{r^8} + \frac{63}{2816} \times \frac{\overline{rr - zz}|^4 \times -r\,d\,z}{r^{10}}$, &c. Cujus quantitatis fluens est $r\,L.\,u + \frac{u^2}{12\,r} + \frac{7\,u^4}{1440\,r^3}$, &c. $+ \frac{r\,r - r\,z}{6\,r} + \frac{3}{40} \times \frac{\frac{2}{3}r^4 - r^3 z + \frac{1}{3} r z^3}{r^3} + \frac{5}{112} \times \frac{\frac{8}{15} r^6 - r^5 z + \frac{2}{3} r^3 z^3 - \frac{1}{5} r z^5}{r^5} + \frac{35}{1152} \times \frac{\frac{16}{35} r^8 - r^7 z + r^5 z^3 - \frac{3}{5} r^3 z^5 + \frac{1}{7} r z^7}{r^7} + \frac{63}{2816} \times$



$\frac{\frac{128}{315} r^{10} - r^9 z + \frac{4}{3} r^7 z^3 - \frac{6}{5} r^5 z^5 + \frac{4}{7} r^3 z^7 - \frac{1}{9} r z^9}{r^9}$

cui fluenti si adjungatur fluens quantitatis $-\frac{3\,r\,d\,y}{y}$ quæ est $-3\,r\,L.\,y$ et omne ducatur per $\frac{2\,a\,f\,r}{\pi\,T\,c}$ habetur motus apogæi dum propter Solis motum apsis recessit a quadraturâ arcu u.

Si ergo u sit quadrans, y erit r, et z fiet zero, unde hæc expressio evadet $\frac{2\,\alpha\,f\,r}{\pi\,T\,c} \times (r\,L.\,\frac{1}{4}\,c + \frac{\frac{1}{16}\,c^2}{12\,r} + \frac{\frac{7}{256}\,c^4}{1440\,r^3}$, &c. $+ \frac{r}{6} + \frac{3}{40} \times \frac{2}{3} r + \frac{5}{112} \times (\frac{8}{15} r + \frac{35}{1152} \times \frac{16}{35} r +$, &c. $- 3\,r\,L.\,r)$ $= \frac{2\,\alpha\,f\,r^2}{\pi.\,T\,c} \times (L.\,\frac{\frac{1}{4}c}{r\,4} + \frac{c^2}{19^2\,r^2} + \frac{7\,c^4}{368640\,r^4} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{6.7} + \frac{1}{8.9} + \frac{1}{10 \times 11}$, &c.) harum fractionum $\frac{1}{2.3} + \frac{1}{4.5}$, &c. summa variis modis haberi potest, et quidem liquet oriri istos terminos ex terminis seriei quæ excessum quadrantis supra radium exprimit cùm radius est unitas, cujus seriei quinque priores termini efficiunt .33905, residui .23174; hinc cùm quinque primi termini hic assumpti evadant propter fractiones per quas ducuntur .26343, et sequentes per fractiones minores quàm $\frac{1}{3}$ ducantur, ii omnes sequentes simul sumpti non efficient $\frac{.23174}{3}$ sive .07724, id itaque addatur ad .26343, erit .34067 numerus major quæsito, et .26343 numerus quæsito minor, assumatur medium .30205 quantitas proposita evadit $\frac{2\,\alpha\,f}{\pi\,T\,c} \times (L\,\frac{1}{4}\,c + \frac{c^2}{192} + .30205)$.

Si verò dicatur g excessus quadrantis super radium, per naturam logarithmorum fiet $L.\,\frac{1}{4}\,c = g - \frac{1}{2} g^2 + \frac{1}{3} g^3 - \frac{1}{4} g^4 +$, &c. $= .57079 - .16290 + .06196 - .02652 + .01211 - .00576 = .4496$, unde expressio inventa fit $\frac{2\,\alpha\,f}{\pi\,T\,c} \times (.4496\,r^2 + \frac{c^2}{192} + .30205\,r^2) = \frac{2\,\alpha\,f}{\varpi\,T} \times (\frac{.75165\,r^2}{c} + \frac{c}{192}) = \frac{\alpha\,f}{\varpi\,T} \times (\frac{1.5033\,r^2}{c} + \frac{c}{96})$ sive quia est $\frac{c}{96} = 3^{gr}.75$, et $\frac{r^2}{c} = \frac{r}{6.283188} = 9^{gr}.1189$ et $\frac{1.5\,r^2}{c} = 13^{gr}.6783$, habetur motus apogæi durante quadrante $\frac{f}{T} \times \frac{\alpha}{\pi} \times 17^{gr}.4283$ et durante totâ revolutione $\frac{f}{T} \times \frac{\alpha}{\pi} \times 69^{gr}.7132$, sed ut totum tempus α qualecumque sit, ad tempus annuum A, ita motus $\frac{f}{T} \times \frac{\alpha}{\pi} \times 69^{gr}.7132$ ad motum annuo tempore factum qui erit $\frac{f}{T} \times \frac{A}{\varpi} \times 69^{gr}.7132$; præterea sit P mensis periodicus Lunæ fiatque ut A ad P ita $\frac{f}{T} \times \frac{A}{\varpi} \times 69^{gr}.7132$ ad motum apsidum tempore periodico Lunæ, qui erit $\frac{f}{T} \times \frac{P}{\varpi} \times 69^{gr}.7132$, et ut P ad ϖ ita $\frac{f}{T} \times \frac{P}{\varpi} \times 69^{gr}.7132$, ad motum apsidum mense anomalistico ϖ qui erit $\frac{f}{T}\ 69^{gr}.7132$, et ut 360 ad 360 $+ \frac{f}{T} \times 69^{gr}.7132$ ita P ad mensem anomalisticum ϖ qui ergo erit $P \times (1 + \frac{f}{T} \times \frac{69^{gr}.7132}{360})$; ideóque motus annuus apo-

gæi erit $\frac{f}{T} \times \frac{A \times 69.7132}{P \times (1 + \frac{f}{T} \times \frac{69.7132}{360})}$, sed annus tropicus est $13\frac{1}{3}$ P proxime, hinc motus apogæi fit $\frac{f}{T} \times \frac{13\frac{1}{3} \times 69.7132}{1 + \frac{f}{T} \times \frac{69.7132}{360}}$.

Excentricitas f orbitæ lunaris est quidem variabilis, de ejus legibus posthac; excentricitatis valorem mediocrem assumit Newtonus .05505 si radius sit 1, Ill. Cassinus eam paulo minorem facit, nempe .05430; ex legibus autem variationis excentricitatis patebit quod loco f scribi debet .05147 et loco T, 1.05147 unde motus apsidum fiet $\frac{.04895 \times 13\frac{1}{3} \times 69^{gr}.7132}{360 + .04895 \times 69.7132} 360 = \frac{45^{gr}.4997}{1.0126} = 44.9$ circiter; qui quidem motus invenitur per observationes 40^{gr}.

DE MOTU APSIDUM

Secundùm Newtoni methodum.

Hic revocanda sunt ea quæ in Sectione IX. Lib. I. dicta sunt de motu corporum in orbibus mobilibus.

LEMMA I. PROP. XLIV. Lib. I.

Concipiatur planum orbitæ alicujus uniformiter revolvi, dum corpus quoddam ipsam orbitam propter vim centralem aliquam percurrit, id corpus in singulo puncto duplici vi centrali urgebitur, propriâ nempe quâ urgetur in centrum virium, et eâ quæ ex revolutione plani orbitæ pendet: hæc ubique erit inversè in triplicatâ ratione distantiæ a centro.

Demonstrationem vide Propositione suprà indicatâ.

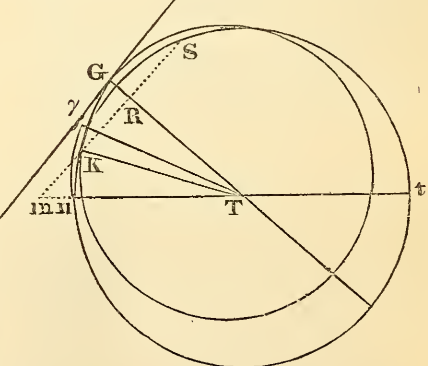
LEMMA II.

Si vis Solis in Lunam agens, sit quantitas quæ in mediocri distantiâ sit constans, dicaturque Y, crescat verò ut distantia a Terrâ, vis Terræ in distantiâ mediocri sit V, dico quod (ponendo orbitam lunarem circulo satis finitimam esse) motus Lunæ concipi poterit quasi fieret in ellipsi simili illi quam reverâ describit, sed cujus planum foret mobile, ita ut integrâ revolutione apsis ejus orbitæ promoveretur quantitate $360^{gr}. \times \sqrt{\frac{r^3 V - T^3 Y}{r^3 V - 4 T^3 Y}}$; demonstratio est in exemplis tertiis ad Propositionem XLV. sed eam demonstrationem hic breviter trademus.

Sit G Lunæ apogæum, G K arcus quàm minimus quem Luna in propriâ orbitâ dato exiguo tempore describeret, transferatur verò Luna cum suo plano ita ut ejus apsis transferatur in γ dum Luna ex G in K moveri debuisset; motus Lunæ in G ex duobus compositus censeatur, nempe ex motu secundum tangentem per velocitatem acquisitam, et ex motu per vim centralem genitam quæ simul ac semel in puncto G agere censeatur, hic motus per G R repræsentetur, motus secundum tangentem per R K, fiat verò R K ad R m, ut angulus G T K ad G T K + G T γ, et si nulla vis centralis ex revolutione plani oriretur, Luna foret in m cùm debuisset esse in K, sed quia T m est longior quàm T K sumatur T n = T K et reverâ Luna erit in n, et erit m n effectus vis centralis ex revolutione plani genitus dum Luna descripsisset arcum G K.

Radio T K centro T describatur circulus quem m T producta secet in t et m K producta secet in S, erit m n $\times$ m t = m K $\times$ m S per Cor. Prop. XXXV. Elem. III. Eucl. ideóque erit $m n = \frac{m K \times m S}{m t}$ et si fingatur hunc circulum quam proximè coincidere cum arcu orbitæ lunaris G K, eodemque tempore describi quo arcus describeretur, erit G R effectus vis centralis Terræ dum Luna descripsisset arcum G K, et per notam proprietatem circuli hic arcus foret $\frac{\overline{R K}|^2}{2 G T}$.

Ergo cùm effectus vis centralis ex revolutione plani genitæ, et effectus vis centralis Terræ eodem tempore geniti sint m n et G R, vires illæ erunt uti m n et G R, sive ut quantitates ipsis æquales $\frac{m K \times m S}{m t}$ et $\frac{R K^2}{2 G T}$ sed cùm



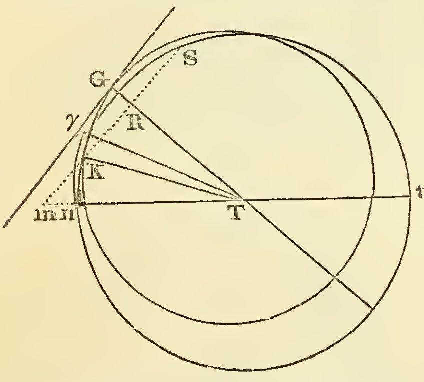
m t sit quam proximè 2 G T, sitque m S = m R + R K, et m K = m R — R K, istæ vires sunt ut m R ^{2} — R K ^{2} ad R K ^{2}, si itaque dicatur T distantia maxima Lunæ, T — X alia distantia quævis, r mediocris distantia, V vis Terræ in eâ mediocri distantiâ, erit $\frac{r^2}{T^2}$ V vis centralis Terræ in puncto T, ideóque, cùm sit R K ^{2} ad m R ^{2} — R K ^{2} ut vis gravitatis ad vim ex revolutione plani genitam, hæc erit, $\frac{r^2 V \times m R^2 - r^2 V \times R K^2}{T^2 \times R K^2}$.

In puncto K aut alio quocumque ubi T K

est T — X, vis gravitatis est $\frac{r^2}{\overline{T-X}|^2}V$ t quoniam vires ex revolutione plani genitæ sunt inversè in triplicatâ ratione distantiarum, vis plani est $\frac{T.\,r^2.\,V \times m\,R^2 - T\,r^2\,V \times R\,K^2}{\overline{T-X}|^3 \times R\,K^2}$ quæ si addatur vi gravitatis fit $\frac{Tr^2VRK^2 - Xr^2VRK^2 + Tr^2VmR^2 - Tr^2VRK^2}{\overline{T-X}|^3 \times R\,K^2}$.

Sed cùm in eo puncto vis gravitatis sit $\frac{r^2}{\overline{T-X}|^2}V$, et vis substractitia Solis sit ut distantiæ, ideóque sit $\frac{T-X}{r}Y$, si reducantur ad communem denominatorem $\overline{T-X}|^3$ fient $\frac{T\,r^2\,V - X\,r^2\,V - \frac{T^4\,Y}{r} + \frac{4\,T^3\,X\,Y}{r}}{\overline{T-X}|^3}$

Ut autem æquipolleat plani revolutio cum substractione vis Solis, ita determinandæ sunt quanti-



tates R K² et m R², ut expressiones harum virium sint ubique æquales, et 1. quidem cùm X fit zero, vis gravitatis cum vi plani est $\frac{T\,r^2 V \times m\,R^2}{\overline{T-X}|^3 \times RK^2}$ et vis gravitatis substractâ vi Solis remanet $\frac{T\,r^2\,V - \frac{T^4\,Y}{r}}{\overline{T-X}|^3}$. Oportet ergo ut sit m R² $= \frac{\overline{R\,K}|^2}{r^2\,V} \times (r^2\,V - \frac{T^3\,Y}{r})$. Termini verò reliqui in quibus est X sunt $-\frac{X\,r^2\,V\,R\,K^2}{T.\,\overline{X}|^3 - R\,K^2}$ et $-\frac{X\,r^2\,V + 4\,T^3\,X\,\frac{Y}{r}}{(T-Y)^3}$. Oportet ergo ut sit R K² $= \frac{\overline{R\,K}|^2}{r^2\,V} \times (r^2\,V - 4\,T^3\,\frac{Y}{r})$.

Itaque ut vis revolutionis plani vi gravitatis permixta, idem efficiet ac vis substractitia Solis, oportet ut sit m R² ad R K² ut $r^2\,V - \frac{T^3\,Y}{r}$ ad $r^2\,V - \frac{4\,T^3\,Y}{r}$, sive ut sit m R ad R K ut $\sqrt{r^2\,V - \frac{T^3\,Y}{r}}$ ad $\sqrt{r^2\,V - 4\,\frac{T^3\,Y}{r}}$ unde cùm sit m R ut motus Lunæ et apogæi conjunctim et R K ut motus Lunæ, si Luna descripserit 360^gr. fiet ut $\sqrt{r^2\,V - \frac{4\,T^3\,Y}{r}}$ ad $\sqrt{r^2V - \frac{T^3Y}{r}}$ ita 360^gr. ad Lunæ et apogæi motum conjunctim, qui erit ergo $360 \times \sqrt{\frac{r^2\,V - \frac{T^3\,Y}{r}}{r^2\,V - \frac{4\,T^3\,Y}{r}}} = 360\sqrt{\frac{r^3\,V - T^3\,Y}{r^3\,V - 4\,T^3\,Y}}$, itaque si ex hoc valore tollantur 360^gr. residuum erit motus apogæi integrâ revolutione Lunæ. Q. e. o.

THEOR. I.

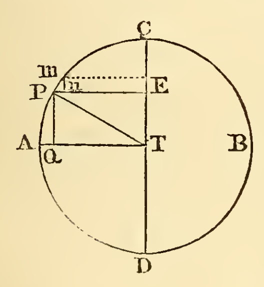
Invenire motum apogæi lunaris, supponendo orbitam lunarem esse circulo finitimam.

Describat Luna arcum d u, et eo durante vis Y constans maneat, et spectatur d u quasi portio ellipseos descriptæ, si vis Y durante totâ revolutione crevisset sicut distantiæ; motus apsidis durante totâ revolutione C, foret (per Lem. II.) $c\sqrt{\frac{r^3\,V - T^3\,Y}{r^3\,V - 4\,T^3\,r}} - c$, ideóque durante tempore quo arcus d u percurritur, foret $d\,u\sqrt{\frac{r^3\,V - T^3\,Y}{r^3\,V - 4\,T^3\,Y}} - d\,u$, sit r = T, et sumatur valor quantitatis $\sqrt{\frac{V-Y}{V-4\,Y}}$ is erit $1 + \frac{3\,Y}{2\,Y}$, hinc itaque elementum motûs apsidum est $\frac{3\,r}{2\,V}d\,u$, loco Y ponatur $\frac{F}{a} \times (\frac{3\,y\,y}{r} - r)$. fit $\frac{3\,F}{2\,V\,a} \times (\frac{3\,y\,y\,d\,u}{r} - r\,d\,u)$, cujus integralis pro quadrante est $\frac{3\,F}{2\,V\,a} \times (\frac{3\,r^2\,c}{8\,r} - \frac{r\,c}{4})$ et pro circulo $\frac{3\,F}{2\,V\,a} \times \frac{r\,c}{2}$ et cùm $\frac{F}{V}$ sit $\frac{M\,M}{r\,A\,A}$ evadit, $\frac{3\,M\,M}{4\,A\,A}$ c sive cùm $\frac{M\,M}{A\,A}$ sit fere .0055 est motus apsidum .0041 c = 1^d.476 sive 1^d. 28′. 33″, et quia is absolvitur mense synodico, ut habeatur motus apogæi annuus, fiat ut .0808 ad 1, ita 1^d.476 ad 18^gr. 267 sive 18^gr. 16′, quod est circiter dimidium veri motûs apsidis ut observat Newtonus.

THEOR. II.

Invenire leges motûs apogæi Lunæ supponendo orbitam lunarem esse ellipticam.

Distantia Lunæ apogæa dicatur A, perigæa dicatur P, sinus anguli apogæi et lineæ quadraturarum sit y, vis Solis in apogæo agens erit per demonstrata $A \times \frac{F}{a} \times (\frac{3yy}{r} - r)$, et vis Solis agens in perigæo, erit $P \times \frac{F}{a} \times (\frac{3yy}{r} - r)$, et y in utroque casu est eadem quantitas, dicatur itaque C hæc quantitas $\frac{F}{a} \times (\frac{3yy}{r} - r)$; siquidem est constans; vis Solis substractitia aut addititia in apogæo ac perigæo erit A C vel P C; hoc est, erit ut quantitas constans C, ducta in distantiam A vel P; si itaque fingatur in punctis intermediis, eam vim esse etiam eandem constantem C, per distantiam ductam, aut saltem variationem quantitatis C compensari, tunc per Cor. 2. Prop. XLV., et exempla tertia ejusdem, erit motus Lunæ ab apside ad apsidem $360 \times \sqrt{\frac{V - C}{V - 4C}}$, si V sit ut vis gravitatis Terræ in data distantia, est verò $360 \sqrt{\frac{V - C}{V - 4C}} = 360 \times (1 + \frac{3C}{2V})$, ideóque motus apsidis erit $360 \times \frac{3C}{2V}$ tota revolutione synodico-anomalisticâ quam pro synodicâ sumimus.



Loco C litteram Y quæ in toto calculo designabat quantitatem $\frac{F}{a} \times (\frac{3yy}{r} - r)$ resumamus, et fingatur talem esse apogæi motum ut ubique sit proportionalis motui $360 \times \frac{3Y}{2V}$ durante mense synodico quod quidem ex prædictis consequitur, fingaturque Solem immotum stare et apogæum ejus respectu in antecedentia regredi, totamque revolutionem respectu Solis tempore α absolvere, sit ergo c tota peripheria, apsis percurret respectu Solis arcum d u tempore $\frac{\alpha du}{c}$; ideò tempore synodico S percurret $360^{gr.} \times \frac{3Y}{2V}$ motu suo, tempore $\frac{\alpha du}{c}$ percurret $\frac{\alpha}{S} \times \frac{3Ydu}{2V}$, sed quia est $\frac{Y}{V} = \frac{F}{Va} \times (\frac{3yy}{r} - r)$ et $\frac{F}{V} = \frac{MMa}{AAr}$, elementum motûs apogæi est $\frac{\alpha}{S} \times \frac{3MM}{2AAr^2} \times (3yydu - r^2du)$, cujus integralis est (si fingatur apogæum a quadraturâ ad syzygiam in antecedentia retrocedere) $\frac{\alpha}{S} \times \frac{3MM}{2AAr^2} \times (3.r f.ydz - r^2 u)$ est autem $f.ydz = CPE$, hinc sumendo $\frac{\alpha M}{SA}$ pro unitate, est $\frac{3M}{2Ar} \times (3CPE - ru)$ et pro quadrante $\frac{3M}{2Ar} \times \frac{rc}{8}$ et pro circulo $\frac{3M}{2Ar} \times \frac{rc}{2}$ prope ut in præcedenti Theoremate.

Hinc si sumatur motus apogæi proportionalis tempori, dum apogæum discedet a Sole arcu u, ejus motus esse debuisset $\frac{3M}{2Ar} \times \frac{ru}{2}$ cùm revera inventus sit $\frac{3M}{2Ar} \times (3CPE - ru)$, hinc æquatio est $\frac{3M}{2Ar} \times (\frac{3ru}{2} - 3CPE)$, sed $3CPE = \frac{3ru}{2} \mp \frac{3yz}{2}$ per constr. hinc æquatio fit $\frac{3M}{2Ar} \times \pm \frac{3yz}{2}$, sed $\frac{2yz}{r}$ est sinus arcûs dupli distantiæ a Sole, hinc itaque hæc æquatio est ut sinus arcûs dupli distantiæ apogæi a Sole, unde lex æquationis habetur, quod sit maxima in octantibus, nulla in syzygiis et quadraturis, positiva a quadraturis ad syzygias, negativa inde, sed ejus quantitas, non per hunc calculum, sed per observationes est determinanda, siquidem, ut observatum est, hypotheses adhibitæ, utut a motu apsidum non dissimiles, attamen ipsius quantitatem dimidio fere minorem exhibent. De his in notis subsequentibus plura.

DE EXCENTRICITATE ORBITÆ LUNARIS.

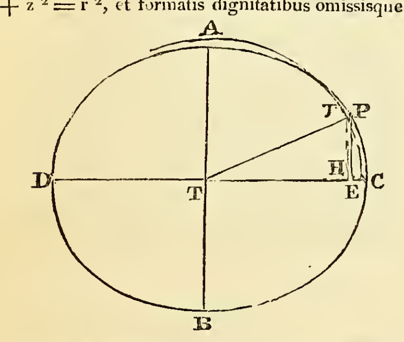
Ipsa curva quam Luna describit, posset determinari per calculum adhibitâ ejus curvæ fluxione secundâ, quæ obtinetur subtrahendo vim solarem a vi Terræ; audivimus autem viros in mathesi primarios hoc Problema, quod certe non est exiguæ difficultatis, suum fecisse; cùm autem nobis videatur Newtonum non aliter hanc curvam investigasse quàm per approximationes quasdam, eadem methodo, tenui nostro modulo magis accommodatâ, idem persequi conabimur.

I. Propositione XXVIII. hujus Libri quæsivit Newtonus qualis foret orbita lunaris ex suppositione illam citra actionem Solis circularem esse, et invenit quod si assumatur eam orbitam fieri ellipsim per Solis actionem, ea ellipsis Terram in centro haberet, et ejus axis minor foret ad majorem qui secundùm lineam quadraturarum jaceret, ut 69 ad 70.

Hinc deducitur quod si semi-axis major 70 dicatur r + p, semi-axis minor 69 sit r — p, distantia Lunæ a Terrâ in loco quovis dicatur

$r + x$, sit y sinus distantiæ Lunæ a quadraturâ proximâ, z ejus distantiæ cosinus erit ubivis $x = p \times (1 - \frac{2y^2}{r^2})$.

Nam sit $T\Pi = r$, $TP = r + x$, $\Pi H = y$, $TH = z$; propter triangula similia TPE, TΠH est $PE = \frac{r+x}{r} \times y$ et $TE = \frac{r+x}{r} \times z$, unde per naturam ellipseos est $\frac{\overline{r-p}|^2}{\overline{r+p}|^2} \times \overline{r+p}|^2 - \frac{\overline{r-p}|^2}{\overline{r+p}|^2} \times \frac{\overline{r+x}|^2}{r^2} \times z^2 = \frac{\overline{r+x}|^2}{r^2} \times y^2$; unde est $\overline{r-p}|^2 = \frac{\overline{r+x}|^2}{r^2} \times y^2 + \frac{\overline{r-p}|^2}{\overline{r+p}|^2} \times \frac{\overline{r+x}|^2}{r^2} \times z^2$, sed divisione factâ, omissisque terminis superfluis, est $\frac{\overline{r-p}|^2}{\overline{r+p}|^2} = 1 - \frac{4p}{r}$, hinc fit $\overline{r-p}|^2 = \frac{\overline{r+x}|^2}{r^2} \times y^2 + \frac{\overline{r+x}|^2}{r^2} \times z^2 - \frac{\overline{r+x}|^2}{r^2} \times \frac{4pz^2}{r}$ et quia $y^2 + z^2 = r^2$, et formatis dignitatibus omissisque



terminis in quibus p, vel x, ad secundam dimensionem assurgunt, habetur $r^2 - 2rp = r^2 + 2rx - \frac{4pz^2}{r} =$ sive loco z^2 scripto $r^2 - y^2$; deletis terminis æqualibus et transpositione factâ et divisione per 2, habetur $rx = \frac{2pr^2}{r} - \frac{2py^2}{r} - rp$ ideóque $x = p \times (1 - \frac{2y^2}{r^2})$.

Ex quo sequitur quod in octantibus x evanescit, illic enim $\frac{2y^2}{r^2} = 1$.

II. Ponatur verò orbitam lunarem ellipticam citra Solis actionem ejusque semi-axem majorem esse Y, excentricitatem dici f, accedere autem vim Solis, sed eam tantùm partem ejus actionis considerari quæ secundum orbitæ radium agit, omissâ illâ parte ejus actionis solaris quæ radio est perpendicularis, in hâc hypothesi deprehendetur hujus orbitæ figuram variari, et magis oblongam evadere dum apsides sunt in syzygiis quàm dum sunt in quadraturis, excentricitatem pariter variabilem esse maximam dum apsides sunt in syzygiis, mediocrem cùm apsides sunt in octantibus, cùm sunt in quadraturis minimam, et ex hâc hypothesi cum priori conjunctâ ejus excentricitatis variabilis leges et quantitas rudi Minervâ determinari potest.

THEOR. I.

Positis Sole et lineâ apsidum immotis, item omissâ eâ actionis solaris parte quæ perpendiculariter in radium orbitæ lunaris agit; dico quod si describatur ellipsis, cujus Terra sit focus et cujus axis major sit linea inter Lunæ apogæum et perigæum interjacens, orbita lunaris erit contenta intra eam ellipsim cùm apsides erunt in syzygiis, erit verò extra eam ellipsim cùm apsides erunt in quadraturis, cùm verò apsides erunt in octantibus, orbita lunaris cum eâ ellipsi coincidet.

Resumptis iis quæ in Theor. VII. calculi secundi dicta fuerunt, inventum est quod si distantia Lunæ citra Solis actionem fuisset x, evadit per Solis actionem secundum radium exercitam $x + \frac{x^4}{r^3} \times \frac{Y}{V}$ sive quia est $\frac{Y}{V} = \frac{M^2}{A^2 r} \times (\frac{3yy}{r} - r)$, hæc distantia fit $x + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3x^4y^2}{r^5} - \frac{M^2}{A^2} \times \frac{x^4}{r^3}$. Hinc cùm distantia apogæa sit $r + f$, distantia perigæa sit $r - f$, et ea distantia quæ est perpendicularis in axem, et quæ est semilateri recto ellipseos æqualis $r - \frac{f^2}{r}$; distantia apogæa evadit $r + f + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3r^4y^2 + 12r^3y^2f}{r^5} - \frac{M^2}{A^2} \times \frac{r^4 + 4r^3f}{r^3}$. Distantia perigæa fit $r - f + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3r^4y^2 - 12r^3y^2f}{r^5} - \frac{M^2}{A^2} \times \frac{r^4 - 4r^3f}{r^3}$, et distantia perpendicularis est $r - \frac{H}{r} + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3r^4z^2 - 12r^2z^2f^2}{r^5}$; ponendo z loco y, ut fieri debere ex ipsâ constructione patet. Ergo totus axis major invenitur $2r + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{6r^4y^2}{r^5} - \frac{M^2}{A^2} \times \frac{2r^4}{r^3}$, sive semi-axis est $r + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3y^2}{r} - \frac{M^2}{A^2} \times r$; excentricitas verò est $f + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{12y^2f}{r^2} - \frac{M^2}{A^2} \times 4f$; ex ellipseon autem naturâ, semi-latus rectum ellipseos cujus hic foret axis major et hæc foret excentricitas, evaderet $r + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3y^2}{r} - r - \frac{\overline{1 + \frac{M^2}{A^2} \times (\frac{12y^2}{r^2} - 4)}|^2}{r + \frac{M^2}{A^2} \times (\frac{3y^2}{r} - r)} f^2 = r + \frac{M^2}{A^2} \times$

$\overline{\frac{3y^2}{r} - r} - f^2 \times (\frac{1}{r} + \frac{7M^2}{A^2 r^2} \times \overline{\frac{3y^2}{r} - r})$, sed ea distantia perpendicularis est in curvâ lunari $r - \frac{f^2}{r} + \frac{M^2}{A^2} + \overline{\frac{3z^2}{r} - r} - \frac{4M^2 f^2}{A^2 r^2} \times (\frac{3z^2}{r} - r)$ unde differentia inter distantiam perpendicularem in ellipsi et eam distantiam in orbitâ lunari, est $\frac{3M^2}{A^2 r} \times (y^2 - z^2) - \frac{M^2 f^2}{A^2 r^3} \times (21y^2 - 12z^2 - 3r^2)$, sive omisso hoc ultimo termino propter f^2, ea differentia est $\frac{3M^2}{A^2 r} \times (y^2 - z^2)$. Si apsides sunt in syzygiis, est $y = r$, et $z = o$, unde hæc quantitas est maxima quæ esse possit, unde distantia perpendicularis in ellipsi excedit distantiam in orbitâ lunari quantitate $\frac{3M^2 r}{A^2}$; si apsides sunt in quadraturis, fit $y = o$, et $z = r$, unde hæc quantitas $\frac{3M^2}{A^2 r} \times (y^2 - z^2)$ evadit $-\frac{3M^2 r}{A^2}$, ideó quod distantia perpendicularis in ellipsi minor est distantiâ in orbita lunari, unde fit ut orbita lunaris contineat intra se ellipsim; si verò apsides sint in octantibus, evanescit $y^2 - z^2$ hinc ipsa orbita lunaris cum ellipsi coincidit.

Cor. Ex hoc Theoremate liquet quod omissio vis quæ agit perpendiculariter in radium orbitæ lunaris, exhibet orbitæ lunaris mutationem plane oppositam illi quæ ex ejus consideratione deduceretur omissâ excentricitate orbitæ; nam sive apsides sint in syzygiis sive in quadraturis, liquet ex Theoremate præcedenti orbitam Lunæ prolongari secundum lineam syzygiarum, contrahi verò secundum lineam quadraturarum, cujus oppositum statuebatur Prop. XXVIII. hujusce, ex consideratione vis solaris totius, sed semotâ excentricitatis orbitæ lunaris ratione; hinc ergo ut mediocrem quodammodo teneamus viam, jungemus incremento distantiæ lunaris secundum hypothesim Theor. VII. calculi 2. invento, partem aliquam $\frac{m}{n}$ decrementi secundum methodum Newtonianam inventi; unde sic medium quoddam inter ambas hypotheses obtinebimus. Itaque quævis distantia x evadet $x + \frac{x^4}{r^3} \times \frac{Y}{V} + \frac{n}{m} p y \times (1 - \frac{2y^2}{r^2}) = x + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3x^4y^2}{r^5} - \frac{M^2 \times x^4}{A^2 \times r^3} + \frac{n}{m} p \times \overline{1 - \frac{2y^2}{r^2}}$.

PROBL. I.

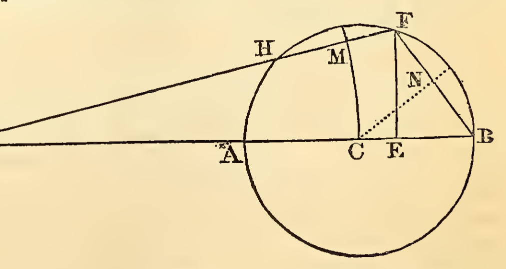
Positis iis quæ in Corollario præcedentis Theorematis statuuntur, et supposito orbitam lunarem, quomodocumque mutatam per Solis actionem, ellipsi proximam esse, invenire leges excentricitatis orbitæ lunaris.

Primò cùm distantia apogæa sit $r + f$, hæc distantia loco x substituta in valore per Coroll. Theor. præcedentis reperto evadit $r + f + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3r^4y^2 + 12r^3fy^2}{r^5} - \frac{M^2 \times (r^4 + 4r^3)}{A^2 r^3} + \frac{n}{m} p \times (1 - \frac{2y^2}{r^2})$; ut habeatur distantia mediocris loco x scribatur r, sinus autem ejus distantiæ a quadraturâ proximâ est quam proxime cosinus distantiæ apogæi a quadraturâ proximâ, ideóque loco y scribatur z, fit $r + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3z^2}{r} - \frac{M^2 r}{A^2} + \frac{n}{m} p \times \overline{1 - \frac{2z^2}{r^2}}$ quæ substracta ex distantiâ apogæâ relinquit excentricitatem $f + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3r^4 \times \overline{y^2 - z^2} + 12rfy^2}{r^5} + \frac{M^2}{A^2} \times 4f - \frac{2np}{m} \times \frac{y^2 - z^2}{r^2}$, quæ omissis terminis omittendis fit $f + \frac{3M^2 r - \frac{2n}{m} A^2 p}{A^2} \times \frac{y^2 - z^2}{r^2}$; hinc illius excentricitatis hæ sunt leges.

1. Excentricitas est maxima cùm apsides sunt in syzygiis, nam illic y fit r, et $z = o$, hinc excentricitas evadit $f + \frac{3M^2 r - \frac{2n}{m} A^2 p}{A^2}$.

2. Excentricitas est minima cùm apsides sunt in quadraturis, illic enim est $y = o$ et $z = r$, unde excentricitas evadit $f - \frac{3M^2 r - \frac{2n}{m} A^2 p}{A^2}$.

3. Excentricitas est mediocris cùm apsides versantur in octantibus, estque $= f$, quia $y^2 = z^2$ sicque evanescit $\frac{3M^2 r - \frac{2n}{m} A^2 p}{A^2} \times \frac{y^2 - z^2}{r^2}$.

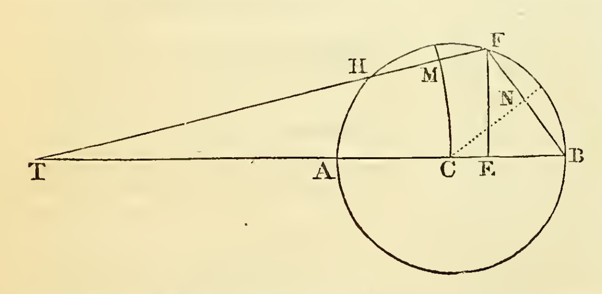


4. In aliis quibuscunque locis hâc constructione obtinetur fere excentricitas, sumatur $TC = f$, $CB = \frac{3M^2 r - \frac{2n}{m} A^2 p}{A^2}$, hoc radio

C B describatur circulus in quo sumatur B F æqualis duplæ distantiæ apsidum a syzygiâ, erit satis proximè C F excentricitas, nam centro T radio T C describatur arcus C M, cùm fit perpendicularis in lineam T H M F, et is arcus parum discedat a lineâ rectâ, punctum M erit medium lineæ H F per III. 3 Elem. et M F erit æqualis cosinui C E arcûs B F.

Radius C B ad compendium dicatur g, et quia sinus dimidii arcûs B F in circulo cujus radius erat r dicebatur z in hoc calculo, hinc in hoc circulo erit B N $= \frac{g}{r} z$, et juxta nota trig. Theor. ut C B (g) ad B N $\left(\frac{g}{r} z\right)$ sic F B $\left(\frac{2gz}{r}\right)$ ad E B $= \frac{2zz}{rr} g$, et C E $= g - \frac{2zz}{rr} g = g \times \frac{rr - 2zz}{rr}$, sed $rr - zz = yy$, hinc C E $= g \times \frac{yy - zz}{rr}$, ideóque T F sive T E $= f + \frac{3M^2 r - \frac{2n}{m} A^2 p}{A^2} \times \frac{yy - zz}{r^2}$ ut prius inventum fuerat.

Schol. Hæc fictitia ellipsis nonnihil discederet a loco perigæi Lunæ per easdem hypotheses



determinato, si verò ex distantiâ perigæâ cum distantiâ apogæa collatis excentricitas quæreretur, diversa quidem ejus quantitas obtineretur, sed eædem forent leges, nam distantia apogæa foret $r + f + \overline{r + 4f} \times \frac{Y}{V} + \frac{n}{m} p \times (1 - \frac{2y^2}{r^2})$ et perigæa $r - f + \overline{r - 4f} \times \frac{Y}{V} + \frac{n}{m} p \times \overline{1 - \frac{2y^2}{r^2}}$ hinc axis major esset $2r + 2r \times \frac{Y}{V} + \frac{2n}{m} \times p \times \overline{1 - \frac{2y^2}{r^2}}$ et semi-axis $r + r \times \frac{Y}{V} + \frac{n}{m} p \times \overline{1 - \frac{2y^2}{r^2}}$; excentricitas verò $f + 4f \times \frac{Y}{V}$ sive $f \times (1 + \frac{4M^2}{A^2 r}) \times (\frac{3yy}{r} - r)$. Quæ quidem est maxima cùm apsides sunt in syzygiis quia illic $y^2 = r^2$ ergo $f \times (1 + \frac{8M^2}{A^2})$. In quadraturis fit minima quia evanescit y, ideóque fit $f \times (1 - \frac{4M^2}{A^2})$, hinc mediocris excentricitas est $f \times (1 + \frac{2M^2}{A^2})$, quod evenit in octantibus, tunc enim $y^2 = \frac{1}{2} r^2$, ideóque $\frac{3y^2}{r} - r = \frac{1}{2} r$, fit ergo $f \times (1 + \frac{4M^2}{A^2 r}) \times \frac{1}{2} r = f \times (1 + \frac{2M^2}{A^2})$. In cæteris locis sumatur T C $= f \times (1 + \frac{2M^2}{A^2})$ et C B $= \frac{6M^2}{A^2} f$, et si C B dicatur g ut in Probl. præcedente erit C E $= g \times \frac{rr - 2zz}{rr} = g \times \frac{rr - 2rr + 2yy}{rr} = g \times \frac{2yy - rr}{rr}$ ideóque T E $= f \times (1 + \frac{2M^2}{A^2} + \frac{6M^2}{A^2}) \times \frac{2yy - rr}{rr} = f \times (1 + \frac{2M^2}{A^2 r} \times r + \frac{4M^2}{A^2 r} \times \frac{3yy}{r} - \frac{6M^2}{A^2 r} \times r) = f \times (1 + \frac{4M^2}{A^2 r}) \times (\frac{3y^2}{r} - r)$ quæ est excentricitas reperta, et eadem constructione obtinetur ac in hypothesi Problematis.

Si denique, sicut astronomis solemne est, axim majorem constantem assumamus, et semi-axis major dicatur r, qui ex distantiâ apogæâ subducatur ut habeatur excentricitas, eædem ejus excentricitatis leges iterum obtinebuntur; erit quippe excentricitas $f + \overline{r + 4f} \times \frac{Y}{V} + \frac{n}{m} p \times (1 - \frac{2y^2}{r^2})$ sive $f + \frac{M^2}{A^2} \times (\frac{3yy}{r} - r) + \frac{4M^2 f}{A^2 r} \times \overline{\frac{3yy}{r} - r} + \frac{n}{m} p \times \overline{1 - \frac{2y^2}{r^2}}$; quæ fit in syzygiis ubi $y^2 = r^2$, $f + \frac{2M^2 r}{A^2} + \frac{8M^2 f}{A^2} - \frac{2np}{m}$, in quadraturis ubi y evanescit $f - \frac{M^2 r}{A^2} - \frac{4M^2 f}{A^2 f} + \frac{n}{mp}$. Unde mediocris excentricitas est $f + \frac{M^2 r}{2A^2} + \frac{2M^2 f}{A^2} - \frac{np}{2m}$, quæ quidem etiam in octantibus circiter occurrit, quia majores termini $\frac{M^2}{A^2} \times (\frac{3yy}{r} - r) + \frac{4M^2 f}{A^2 r} \times \overline{\frac{3yy}{r} - r}$ evadunt $\frac{M^2 r}{2A^2} + \frac{M^2}{A^2}$ in octantibus, nam cùm y^2 illic sit $\frac{1}{2} r^2$ fiunt ii termini $\frac{M^2}{A^2} \times (\frac{3rr}{2r} - r) + \frac{4M^2 f}{A^2 r} \times \frac{3rr}{2r} - r = \frac{M^2 r}{2A^2} + \frac{2M^2 f}{A^2}$.

† Hisce motuum lunarium computationibus ostendere volui; quod motus lunares per theoriam gravitatis a causis suis computari possint. Per eandem theoriam inveni præterea quod æquatio annua medii motûs Lunæ oriatur a variâ dilatatione orbis Lunæ per vim Solis, juxta Corol. 6. Prop. LXVI. Lib. I. (h) Hæc vis in perigæo Solis major est, et orbem Lunæ dilatat; in apogæo ejus minor est, et orbem illum contrahi permittit. In orbe dilatato Luna tardiùs revolvitur, in contracto citiùs; et æquatio annua, per quam hæc inæqualitas compensatur, (i) in apogæo et perigæo Solis nulla est, (k) in mediocri Solis a Terrâ distantia ad 11′. 50″.

PROBL. II.

Variationis excentricitatis quantitatem maximam determinare.

Hoc Problema nonnisi per determinationem veræ curvæ, quam sequitur Luna, potest determinari, quâ non inventâ ad observationes recurrendum, ut fecisse videtur Newtonus, mediocrem excentricitatem esse partium 5505 quarum radius sit 100000 assumit, et maximum incrementum vel decrementum assumit $1172\frac{3}{4}$, tam ex observationibus quàm quod ille numerus ad concinnandam constructionem pro æquatione apogæi commodus esset, ut suo loco dicemus.

Illust. Cassinus mediocrem illam excentricitatem facit 5430 incrementum verò et decrementum 1086, nec malè hæc consentiunt cum quantitatibus Prob. I. inventis, si loco quantitatis indeterminatæ $\frac{n}{m}$ scribatur $\frac{1}{2}$; nam, id incrementum aut decrementum inventum fuerat

$$\frac{3\,M^2 r - \frac{2n}{m} A^2 p}{A^2},$$

sive accuratiùs sumptis quantitatibus quæ ad simplicitatem calculi omissæ fuerant cùm excentricitas inventa fuisset $f + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3 r^4 \times \overline{y^2 - z^2} + 12 r^3 f y^2}{r^5} + \frac{M^2}{A^2} \times 4f - \frac{2np}{m} \times \frac{y^2 - z^2}{r^2}$, hæc evadit (cum apsides sunt in syzygiis et $z = o$, $y = r$) $f + \frac{M^2}{A^2} \times (3r + 12f) + \frac{M^2}{A^2} \times (4f - p)$, et cùm sunt in quadraturis ubi $z = r$ et $y = o$, $f - \frac{M^2}{A^2} \times 3r + \frac{M^2}{A^2} \times (4f + p)$, unde mediocris excentricitas est $f + \frac{M^2}{A^2} \times 10f$, et incrementum vel decrementum, $\frac{M^2}{A^2} \times \overline{3r + 6f} - p$.

Cùm itaque sit $\frac{M^2}{A^2} = .0055$ ex priùs inventis, mediocris excentricitas $(1 + \frac{10 M^2}{A^2}) \times$ (quam Cassinus invenit 5430 et Newtonus 5505) est $1.055\,f$, hinc est $f = 5147$ secundùm Cassinum et 5218 secundùm Newtonum, quod utrumque ductum in .0055, prius efficit 1819.85 alterum 1822.2 cùmque p sit 719, id ex priore detractum relinquit 1100.85, ex posteriore 1103.2; qui numeri incidunt inter 1172 et 1086 quos pro excentricitatis variatione assignant Newtonus aut Halleius et Cassinus.

(†) * *Hisce motuum*, &c. Hæc est enim veritatis ejus theoriæ fortissima probatio, si ea quæ mathematicè deducuntur ex eâ theoriâ apprimè consentiant cum phænomenis in casu maximè composito.

(h) * *Hæc vis in perigæo Solis major est et orbem Lunæ dilatat;* vis Solis aliquando adjungitur vi Terræ ut Lunam versus Terram attrahat, aliquando idque sæpiùs et ubi fortiùs agit, vi Terræ est opposita, et Lunam a Terrâ distrahit, itaque toto effectu vis Solis simul considerato, Luna per eam vim a Terrâ distrahitur, et eò magis quò ea vis Solis major est, ideóque Luna magis a Terrâ distrahitur dum Terra versatur in suo perihelio quàm ubi versatur in aphelio: hinc primo casu orbita Lunæ magis est dilatata quàm hoc altero.

(i) * *In apogæo et perigæo Solis nulla est:* id omninò liquet ex Cor. 2. Probl. V. prioris calculi, nam ex iis quæ in eo Corollario statuuntur liquet quod ut habeatur æquatio quovis in loco, hæc proportio est instituenda, ut areæ ellipseos quam Terra describit dimidium ad aream descriptam a Terrâ ab aphelio (vel perihelio) usque ad eum locum propositum, ita semestris tardatio ad tardationem mediocri motui adscriptam, sed in hoc casu ea area a Terrâ descripta est ipsa semi-ellipsis, ergo etiam tardatio medio motui adscripta est ipsa semestris tardatio; tum verò sumitur ex Probl. IV. tardatio loco dato conveniens quæ ex tardatione mediocri tollitur, et differentia est æquatio quæsita; sed rursus ea tardatio aphelio aut perihelio conveniens est ipsa semestris tardatio, ergo, ex tardatione mediocri motui eo in loco adscriptâ, detractâ nullum est residuum, cùm planè sint æquales, ergo æquatio in apogæo ac perigæo nulla est.

(k) * *In mediocri Solis distantiâ*, &c. Videntur hæc verba statuere quid constet ex observationibus, nempe hanc æquationem esse 11′. 50″ ubi maxima est, et esse æquationi centri proportionalem, observavimus autem Ill. Cassinum

circiter ascendit, in aliis locis æquationi centri Solis proportionalis est; et additur medio motui Lunæ ubi Terra pergit ab aphelio suo ad perihelium, et in oppositâ orbis parte subducitur. Assumendo radium orbis magni 1000 et eccentricitatem Terræ $16\frac{7}{8}$, (l) hæc æquatio, ubi maxima est, per theoriam gravitatis prodiit 11′. 49″. Sed eccentricitas Terræ paulo major esse videtur, et auctâ eccentricitate hæc æquatio augeri debet in eâdem ratione. Sit eccentricitas $16\frac{11}{12}$, et æquatio maxima erit 11′. 51″.

(m) Inveni etiam quod in perihelio Terræ, propter majorem vim Solis, apogæum et nodi Lunæ velocius moventur quàm in aphelio ejus, idque in triplicatâ ratione distantiæ Terræ a Sole inversè. (n) Et inde oriuntur æquationes annuæ horum motuum æquationi centri Solis proportionales.

hanc æquationem ubi maxima est 9′. 44″. efficere.

(l) *Hæc æquatio ubi maxima est prodiit* 11′. 49″. Sumptâ orbitâ lunari ut circulari, per theoriam gravitatis prodiit 11′. 47″. imo minor, sive Newtonus aliâ viâ eum calculum instituerit quàm nos, sive alia elementa assumpserit, sive ex excentricitate orbitæ lunaris consideratione hanc quantitatem auxerit, cætera verò ad amussim quadrant.

Eam æquationem excentricitati Terræ esse proportionatam ex Cor. 1. Prob. V. pag. 72, prodit enim ejus valor per quantitates fixas ductas in excentricitatem quæ in calculo dicebatur e; et quamvis quantitas b quæ est $\sqrt{a^2 - e^2}$ in eo valore occurrat, idcircò non est censendum æquationis valorem multùm pendere ex illa dignitate e^2 siquidem in illo termino ea dignitas ferè evanescit respectu a^2.

Liquet etiam ex Cor. 2. ejusd. Probl. cæteras æquationes esse proportionatas æquationi centri Solis: addendas esse motui Lunæ dùm pergit ab aphelio ad perihelium, illic enim tardatio vera minor est quàm tardatio mediocris, ergo provectior est Luna quâm secundùm tardationem mediocrem, addi ergo debet ejus viæ iste tardationis defectus; ex perihelio pergendo res oppositâ ratione procedet.

(m) * *Inveni etiam*, &c. Id utique statuit Cor. 14. Prop. LXVI. Lib. I., illic ostendit vires Solis esse ut cubos distantiarum reciprocè, unde cùm sint causæ errorum apogæi et nodorum, illi errores sive motus qui suis causis sunt proportionales, debent esse ut cubi distantiarum reciprocè; hinc dicatur a mediocris distantia Terræ a Sole, distantia quævis alia dicatur $a \pm x$, motus medius diurnus apogæi in distantiâ a sit g, motus medius nodi in eâ distantiâ a sit n, in distantiâ x, motus apogæi erit $\frac{a^3}{\overline{a \pm x}^3}$ g et motus nodi erit $\frac{a^3}{\overline{a \pm x}^3}$ n aut formando seriem ex his quotientibus et omissis terminis in quibus altior dignitas quantitatis x occurrit, erit motus apogæi in quavis distantiâ, $g \mp \frac{3x}{a}g$, et motus nodi $n \mp \frac{3x}{a}n$.

(n) * *Et inde oriuntur æquationes annuæ æquationi centri Solis proportionales.* Cùm motus apogæi Lunæ et nodi uniformis non sit cùm Terra ad varias a Sole distantias transfertur, sed addatur aut detrahatur ex eorum motu medio quantitas variabilis $\frac{3x}{a}$ g, et $\frac{3x}{a}$ n, si quæratur progressus apogæi Lunæ aut nodi cùm Terra ab aphelio Solis certâ quantitate dierum discesserit, is progressus ex motu medio apogæi Lunæ aut nodi rectè non computabitur, quippe singulis diebus præter motum medium quantitate $\frac{3x}{a}$ g. $\frac{3x}{a}$ n processerunt aut recesserunt, summa ergo omnium harum quantitatum erit sumenda, quæ erunt correctiones seu æquationes quibus ex loco medio apogæi et nodi ad verum ejus locum deveniemus, illæ verò æquationes æquationibus centri Solis erunt proportionales, nam cùm motus Solis sit in duplicatâ ratione distantiæ inversè (ut exponetur in notâ (o) proximè sequenti) sit m motus medius diurnus Solis in mediocri distantiâ a, in distantiâ quavis $a \pm x$ is motus erit $\frac{a}{\overline{a \pm x}^2}$ m, seu in seriem resolvendo hanc expressionem erit $m \mp \frac{2x}{a}m$, hinc differentia inter motum medium et verum erit $\pm \frac{2x}{a}$ m, et ex summâ earum differentiarum conflabuntur æquationes centri Solis; cùm ergo æquationes apogæi et Lunæ ex summâ quantitatum $\pm \frac{3x}{a}g, \frac{3x}{a}n$ constent, erunt istæ æquationes ubivis in punctis correspondentibus seu in æqualibus ab aphelio Terræ distantiis in ratione constanti 3 g, et 3 n ad 2 m: ideóque erunt ubique proportionales æquationibus centri Solis.

(o) Motus autem Solis est in duplicatâ ratione distantiæ Terræ a Sole inversè (p) et maxima centri æquatio, quam hæc inæqualitas generat, est $1^{gr}. 56'. 20''$. prædictæ Solis eccentricitati $16\frac{11}{12}$ congruens. (q) Quod si motus Solis esset in triplicatâ ratione distantiæ inversè, hæc inæqualitas generaret æquationem maximam $2^{gr}. 54'. 30''$. (r) Et propterea æquationes maximæ, quas inæqualitates motuum apogæi et nodorum Lunæ generant, sunt ad $2^{gr}. 54'. 30''$. ut motus medius diurnus apogæi, et motus medius diurnus nodorum Lunæ sunt ad motum medium diurnum Solis. Unde prodit æquatio maxima medii motus apogæi $19'. 43''$. et æquatio maxima medii motûs nodorum $9'. 24''$. (s) Additur verò æquatio prior

(o) * *Motus Solis est in duplicatâ ratione distantiæ inversè* scilicet motus Solis angularis e Terrâ spectatus; nam cùm Sol describat semper areas tempori proportionales, arcus quos reverâ describit sunt semper inversè ut distantiæ, sed præterea magnitudines apparentes eorum arcuum e Terrâ spectatorum sunt etiam inversè ut eorum a Terrâ distantia, ergo arcus quos Sol singulis tempusculis æqualibus describere videtur e Terrâ, sunt in duplicatâ ratione distantiarum inversè.

(p) *Et maxima centri æquatio est* $1^{gr}. 56'. 20''$. Illam $1^{gr}. 55'. 50''$. facit Ill. Cassinus.

(q) * *Quod si motus Solis esset in triplicatâ ratione distantiæ inversè;* dicatur M motus Solis in distantiâ mediocri, quæ dicatur a, et distantia quævis alia sit $a \pm x$; si motus Solis esset in triplicatâ ratione distantiarum inversè, in distantiâ $a \pm x$ foret $\frac{a^3}{\overline{a \pm x}^3} M$ sive $\frac{a^3 M}{a^3 \pm 3a^2x + 3ax^2 \pm x^3}$ aut formando seriem, is motus in distantia $a \pm x$ erit $M \pm \frac{3x}{a} M$ omissis reliquis terminis ob exiguitatem fractionis $\frac{x}{a}$; ideóque differentia motus in distantiâ verâ et motus in distantiâ mediocri foret $\mp \frac{3x}{a} m$: in verâ autem hypothesi quòd Solis motus crescat in ratione subduplicatâ inversâ distantiarum, eodem ratiocinio invenitur quod in quovis loco motus Solis erit $\frac{a^2 M}{a^2 \mp 2ax + x^2}$ et divisione factâ erit is motus $M \mp \frac{2x}{a} M$, et differentia motûs veri et motûs medii erit $\mp \frac{2x}{a} M$, eritque ergo hæc differentia ad differentiam in priore hypothesi inventam ut 2 ad 3 in omnibus locis correspondentibus; sed æquationes conflantur ex summâ differentiarum motûs veri et medii sumptarum in omnibus locis ab aphelio usque ad locum eum ubi æquatio applicatur; cùm ergo in utrâque hypothesi singulæ differentiæ motûs veri et medii sint in omnibus punctis correspondentibus in ratione constanti 2 ad 3 erunt etiam summæ earum differentiarum in locis correspondentibus, ipsæ nempe æquationes in eâdem ratione, ergo maxima centri æquatio in hypothesi verâ motum Solis decrescere in duplicatâ ratione distantiarum est ad æquationem maximam in hypothesi fictitiâ motum Solis decrescere in triplicatâ ratione distantiarum ut 2 ad 3 cùm ergo æquatio maxima sit per observationes $1^{gr}. 56'. 20''$. hæc altera erit $\frac{3}{2} \times 1^{gr}. 56'. 20''$. sive $2^{gr}. 54'. 30''$. Q. e. d.

(r) * *Et propterea æquationes maximæ, quas inæqualitates motuum apogæi et nodorum Lunæ generant, sunt ad* $2^{gr}. 54'. 30''$. *ut motus medius apogæi et nodi ad motum medium Solis.* Nam statutum est motus horum esse in triplicatâ ratione distantiarum inversè, sit g motus medius apogæi in mediocri nempe distantiâ, n motus medius nodorum, et m motus medius Solis, decrescantque in triplicatâ ratione inversâ distantiarum, deprehenditur eodem modo ac in notâ præcedente quod in quolibet loco differentiæ inter motum verum et motum mediocrem erunt $\mp \frac{3x}{a} g$, $\mp \frac{3x}{a} n$, $\mp \frac{3x}{a} m$, æquationes maximæ sunt summa earum quantitatum sumptarum ab apogæo Solis usque ad mediocrem ejus a Terrâ distantiam, itaque illæ æquationes constituuntur per series omnium $\frac{3x}{a} g$, omnium $\frac{3x}{a} n$, et omnium $\frac{3x}{a} m$, qualescumque ergo sint illæ quantitates variabiles x, cùm eædem sint in tribus hisce seriebus summæ earum serierum sive æquationes maximæ, erunt inter se ut illæ quantitates g, n et m, per quas omnes partes singularum illarum serierum ducuntur, illæ verò quantitates sunt motus medii apogæi, nodi et Solis, ergo datâ unâ ex his æquationibus, v. gr. datâ æquatione maximâ Solis et motu medio apogæi, nodi et Solis, habentur cæteræ æquationes maximæ statuendo illas esse ad eam æquationem datam, ut ii motus medii dati.

Liquet verò ex ipsâ hac demonstratione, verum quidem Solis motum medium assumi debere, non autem veram ipsius æquationem, sed eam quæ prodit fingendo Solis motum in triplicatâ ratione distantiarum decrescere.

(s) * *Additur verò æquatio* apogæi Lunæ *et subducitur æquatio* nodi *ubi Terra pergit a peri-*

et subducitur posterior, ubi Terra pergit a perihelio suo ad aphelium: et contrarium fit in oppositâ orbis parte.

(t) Per theoriam gravitatis constitit etiam quod actio Solis in Lunam paulo major sit, ubi transversa diameter orbis lunaris transit per Solem, quàm ubi eadem ad rectos est angulos cum lineâ Terram et Solem jungente: et propterea orbis lunaris paulo major est in priore casu quàm in posteriore. (u) Et hinc oritur alia æquatio motûs medii lunaris, pendens a situ apogæi Lunæ ad Solem, quæ quidem maxima est cùm apogæum Lunæ versatur in octante cum Sole; et nulla cùm illud ad quadraturas vel syzygias pervenit: et motui medio additur in transitu apogæi Lunæ a Solis quadraturâ ad syzygiam, et subducitur in transitu apogæi a syzygiâ ad quadraturam. Hæc æquatio, quam semestrem vocabo, in octantibus apogæi, quando maxima est, ascendit ad 3′. 45″. circiter, (x) quantùm ex phænomenis colligere potui. Hæc est ejus quantitas in mediocri Solis

helio suo ad aphelium; motus apogæi Lunæ est progressivus, motus verò nodi est retrogradus; Terrâ autem a perihelio procedente uterque motus major fit motu medio, inde ergo plus procedit apogæum Lunæ, quàm per motum medium, plus recedit nodus, prior ergo æquatio addenda, posterior detrahenda.

(t) * *Per theoriam gravitatis constitit etiam quod actio Solis in Lunam paulo major sit, ubi transversa diameter orbis lunaris transit per Solem,* &c. Facile deducitur ex Cor. Theor. IV. calculi primi (pag. 66.) quod (existente x distantiâ Lunæ a Terrâ, r ejus distantiâ mediocri, et y sinu ejus distantiæ a quadraturâ, existente etiam F vis Solis in Terram in mediocri ejus distantiâ α) actio Solis Lunam trahentis secundum directionem radii orbitæ lunaris est $\frac{x}{r} \times \frac{F}{a} \times (\frac{3yy}{r} - r)$.

Unde ea vis, Lunâ in quadraturis existente, fit $\frac{x}{r} \times \frac{F}{a} \times - r$, est ergo negativa et Lunam ad Terram attrahit; cùm verò Luna est in syzygiis, ea actio Solis fit $\frac{x}{r} \times \frac{F}{a} \times 2r$, est itaque positiva et Lunam a Terrâ distrahit; in locis autem similibus hæ Solis actiones sunt ut distantiæ x Lunæ a Terrâ. Hinc si apsides sint in syzygiis, sit verò Luna in quadraturis, ubi per actionem Solis ad Terram trahitur, ambæ distantiæ x Lunæ in utrâque quadraturâ positæ sunt simul æquales lateri recto orbitæ lunaris; cùm verò Luna est in syzygiis ubi per actionem Solis a Terrâ distrahitur, ambæ distantiæ x Lunæ in conjunctione et oppositione positæ sunt simul æquales axi majori, qui semper superat latus rectum.

Si verò apsides sunt in quadraturis, et Luna etiam in quadraturis, ambæ distantiæ x Lunæ in utrâque quadraturâ positæ, simul sumptæ, sunt æquales axi majori, et cùm Luna est in syzygiis, ambæ distantiæ x Lunæ in conjunctione et oppositione positæ, sunt simul æquales lateri recto orbitæ lunaris.

Ergo cùm apsides sunt in syzygiis, actio Solis quæ Lunam ad Terram attrahit, est minor, et e contra actio quæ Lunam a Terrâ distrahit est major quàm cùm apsides sunt in quadraturis, ideóque orbis lunaris paulo major fieri debet in priore casu quàm in posteriore.

De punctis autem inter quadraturas et syzygias intermediis ab eo quod in his punctis extremis evenit, judicari potest, sed potissimum ex calculo quo æquatio ex hâc causâ nata determinatur.

(u) * *Et hinc oritur alia æquatio motus medii lunaris,* &c. Hujus æquationis calculum ejusque leges explicatas habes Probl. VI. calculi secundi (pag. 82.) ejusque Corollariis.

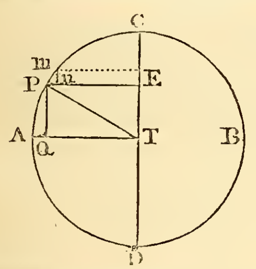
(x) * *Quantùm ex phænomenis colligere potui,* &c. Ex Coroll. 5. Probl. VI. (pag. 83.) æquatio hæc 3′. 56″. est reperta, quædam autem causæ sunt cur hæc quantitas pro verâ quantitate adhiberi nequeat, sed hæc æquatio ex phænomenis sit colligenda; primò, quantitas f sive excentricitas orbitæ lunaris satis certo non est cognita, ut constat ex iis quæ de excentricitate dicta sunt, hic autem mediocrem excentricitatem assumpsimus 5505 partium quarum radius orbitæ sit 100000 cum Newtono quam Cassinus facit tantùm 5430 partium, et forte minor assumi deberet si attendatur ad excentricitatem orbitæ lunaris, qualis ea foret citra Solis actionem, ex quibus considerationibus, liquet æquationem inventam minorem factum iri quàm 3′. 56″., sicque magis accessuram ad æquationem 3′. 45″. quæ ex phænomenis colligitur: secundò cùm varias hypotheses assumpserimus, vero quidem proximas, non tamen veras absolutè, ut liquet ex Cor. 1. Probl. I. (pag. 80.) ex iis erroribus ipsæ quan-

distantiâ a Terrâ. ([y]) Augetur verò ac diminuitur in triplicatâ ratione distantiæ Solis inversè; ideóque in maximâ Solis distantiâ est 3′. 34″. et in minima 3′. 56″. quamproximè: ubi verò apogæum Lunæ situm est extra octantes, evadit minor; ([z]) estque ad æquationem maximam, ut sinus duplæ distantiæ apogæi Lunæ a proximâ syzygiâ vel quadraturâ ad radium.

([a]) Per eandem gravitatis theoriam actio Solis in Lunam paulo major est ubi linea recta per nodos Lunæ ducta transit per Solem, quàm ubi linea illa ad rectos est angulos cum rectâ Solem ac Terram jungente.

titates absolutæ mutantur, sed manent earum proportiones ex quibus leges æquationum pendent, ita ut datâ aliquâ ex æquationibus per phænomena, reliquæ satis tuto exinde deduci queant.

([y]) * *Augetur verò ac diminuitur in triplicatâ ratione distantiæ Solis inversè.* Probl. VI. (pag. 82.) hæc æquatio inventa est $\frac{15 \text{ A} \times \text{F} q^9 f^2}{109.73 \times \text{S.V.} a r^8} \times -163.595.$ P Q T, in quâ expressione a repræsentat mediocrem Solis a Terrâ distantiam,



in aliâ itaque a Sole distantiâ loco a ponatur X, et loco F ponatur $\frac{a^2 \text{F}}{\text{X}^2}$ quia vis Solis F est inversè ut quadrata distantiarum, hac ergo substitutione factâ æquatio fit $\frac{15 \text{ A } a^2 \text{F} q^9 f^2}{109.73. \text{ S. V X}^2. \text{ X} r^8} \times -163.595$ P Q T tum loco $\frac{\text{F}}{\text{V}}$ substituatur $\frac{a \text{M}^2}{r \text{A}^2}$ (ut liquet ex Cor. Probl. I. calculi primi, pag. 70.) æquatio evadit $\frac{15 \text{ M}^2 a^3 q^9 f^2}{109.73 \text{ S. A. X}^3 r^9} \times -163\ 595$ P Q T, et quia in octantibus est P Q T $= \frac{1}{4} r^2$ æquatio est $-\frac{15 \times 163.595 \times \text{M}^2 a^3 q^9 f^2}{4 \times 109.73 + \text{S. A X}^3 r^7}$, in quâ cùm nulla sit variabilis quantitas præter X^3 in denominatore occurrente, liquet æquationem cùm apogæum est in octantibus, hoc est æquationem maximam esse ut X^3 inversè, hoc est *augeri ac diminui in triplicatâ ratione distantiæ Solis X inversè; ideóque*, &c.

Scilicet positâ excentricitate orbitæ Telluris $.016\frac{11}{12}$, distantia maxima est $1 + .016\frac{11}{12}$, distantia mediocris 1, et distantia minima $1 - .016\frac{11}{12}$, itaque sumendo rationem triplicatam mediocris et maximæ distantiæ fiat ut $1 + 3 \times .016\frac{11}{12} + 3 \times .000285\frac{1}{3}$, &c. (1.0516) ad 1, ita 3′. 45″. ad quartum qui erit 3′. 34″. et sumendo rationem triplicatam inversam mediocris et minimæ distantiæ fiat ut $1 - 3 \times .016\frac{11}{12} + 3 \times .000285\frac{1}{2}$, &c. (.950197) ad 1 ita 3′. 45″. ad quartum qui erit 3′. 56″.

([z]) * *Estque ad æquationem maximam.* Siquidem in quâcumque distantiâ Terræ a Sole, hæc æquatio est $\frac{15 \text{ M}^2 a^3 r^9 f^2}{109.73 \text{ S. A. X}^3 x^9} \times -163.595$ P Q T, liquet quod supponendo distantiam X non variari, hæc æquatio erit ubique ut P Q T; in octantibus autem P Q T est $\frac{1}{4} r^2$, hinc in quovis loco hæc æquatio est ad eam quæ in octantibus obtineretur, manente eâdem distantiâ Solis a Terrâ ut P Q T ad $\frac{1}{4} r^2$, sive quia P Q T est $\frac{1}{2}$ z y ut $\frac{1}{2}$ z y ad $\frac{1}{4} r^2$, et utrumque ducendo per $\frac{4}{r}$ ut $\frac{2 z y}{r}$ ad r, sed $\frac{2 z y}{r}$ est sinus duplæ distantiæ puncti P, hoc est apogæi a syzygiâ, aut a quadraturâ (perinde enim est ut ex trigonometriæ principiis liquet) hinc æquatio in quovis situ apogæi extra octantes est ad æquationem maximam quæ obtineretur in octantibus manente eâdem distantiâ Telluris a Sole, ut sinus duplæ distantiæ apogæi Lunæ a proximâ syzygiâ, ad radium.

([a]) * *Per eandem*, &c. Cùm linea recta per nodos ducta transit per Solem, tunc Sol versatur in plano ipsius orbitæ lunaris producto, ejus itaque actio non consumitur in dimovendâ Lunâ ab eo plano, sed tota impenditur ad eam vel a Terrâ distrahendam, vel ad Terram attrahendam, vel ad eam accelerandam aut retardandam in proprio suo plano; cùm autem linea nodorum est ad angulos rectos cum rectâ Solem ac Terram jungente, tunc Sol maxime discedit a plano orbitæ lunaris, hinc pars ejus actionis consumitur in admovendo plano orbitæ lunaris ad eclipticam, et per residuum duntaxat ejus actionis Lunæ errores *in longum* producit; hinc priori casu actio Solis in Lunam paulò major est quàm in posteriore, partem autem actionis Solis residuam sublatâ eâ ejus parte quæ in plano orbitæ lunaris dimovendo consumitur, ad calculum vocamus Probl. I. calculi tertii (pag. 84).

([b]) Et inde oritur alia medii motûs lunaris æquatio, quam semestrem secundam vocabo, quæque maxima est ubi nodi in Solis octantibus versantur, et evanescit ubi sunt in syzygiis vel quadraturis, et in aliis nodorum positionibus proportionalis est sinui duplæ distantiæ nodi alterutrius a proximâ syzygiâ aut quadraturâ: ([c]) additur verò medio motui Lunæ, si Sol distat a nodo sibi proximo in antecedentia, subducitur si in consequentia; et in octantibus, ubi maxima est, ascendit ad 47″. in mediocri Solis distantiâ a Terrâ, ([d]) uti ex theoriâ gravitatis colligo.

([b]) * *Et inde oritur alia medii motûs lunaris æquatio.* Hujus æquationis quantitatem et leges Probl. III. calculi tertii (pag. 85.) exposuimus, illamque $\frac{3\ A.\ F.\ l^2}{8\ S.\ V.\ a\ r} \times \frac{2\ n\ m}{r}$ invenimus, sumendo l pro sinu inclinationis orbitæ, et n et m pro sinu et cosinu distantiæ nodorum a syzygiâ. Hinc cùm $\frac{2\ n\ m}{r}$ sit sinus duplæ distantiæ nodi a syzygiâ, cæteri verò termini sint constantes, hæc æquatio est maxima *ubi nodi in Solis octantibus versantur*, et evanescit *ubi sunt in syzygiis vel quadraturis et in aliis nodorum positionibus proportionalis est sinui duplæ distantiæ nodi a syzygiâ*, &c.

([c]) * *Additur verò medio motui Lunæ, si Sol distat a nodo sibi proximo in antecedentia, subducitur si in consequentia.* Ex actione Solis in Lunam, Luna retardatur, ex diminutione verò ejus actionis propter obliquitatem plani orbitæ, lunaris, diminuitur hæc Lunæ retardatio, hoc est acceleratio quædam oritur respectu motûs, qui, omissâ hac consideratione, fuerat determinatus; mediocris acceleratio hinc nata, et quæ includitur in medio motu Solis est ubique $\frac{3\ A.\ F.\ l^2}{2\ S.\ V\ a\ r^2} \times \frac{r\ u}{2}$, vera autem acceleratio est $\frac{3\ A.\ F.\ l^2}{2\ S.\ V\ a\ r^2} \times$ ANQ. Unde æquatio est $\frac{3\ A.\ F.\ l^2}{2.\ S\ V\ a\ r^2} \times (\frac{r\ u}{2} - A\ N\ Q)$ per Probl. III. calculi tertii (pag. 85, et seq.) jam itaque si $\frac{r\ u}{2}$ sit major quàm A N Q quod evenit in toto quadrante A N C, acceleratio mediocris est major verâ, et Luna magis processisse censetur quàm revera processit, hinc ista differentia $\frac{3\ A.\ F.\ l^2}{2\ S.\ V.\ a\ r^2} \times (\frac{r\ u}{2} - A\ N\ Q)$ debet detrahi ex ejus loco invento ut verus locus habeatur, in hoc autem casu Sol qui puncto A respondere censetur, est in consequentia respectu nodi N.

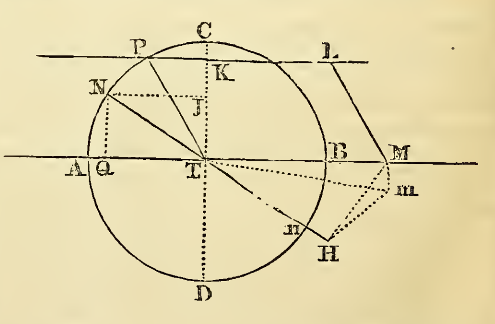
Dum verò N versatur inter C et B, et n inter A et D, tunc $\frac{r\ u}{2}$ est minor quàm A N Q, sic itaque acceleratio mediocris est minor quàm acceleratio vera, ideóque differentia $\frac{3\ A.\ F\ l^2}{2\ S.\ V.\ a\ r^2} \times (\frac{r\ u}{2} - A\ N\ Q)$ addi debet loco medio Lunæ, tunc autem Sol in A est in antecedentia respectu nodi proximi n.

3. Dum N versatur inter B et D et n in A et C $\frac{r\ u}{2}$ excedit A N Q; sive motus mediocris excedit verum; subduci itaque debet differentia, est verò in eo casu Sol in A in consequentia respectu nodi n.

Denique dum N est inter D et A, $\frac{r\ u}{2}$ minor est quàm A N Q, addi itaque debet æquatio loco medio Lunæ, et Sol est in antecedentia respectu nodi N.

Ergo æquatio subducitur ex medio motu Lunæ cùm Sol est in consequentia respectu nodi proximi, additur verò ei motui cùm Sol est in antecedentia.

([d]) * *Uti ex theoriâ colligo.* Calculus noster Coroll. Probl. III. contentus, æquationem maxi-



mam 45″,6 exhibet, qui numerus est adeo proximus numero 47″. quem ex theoriâ gravitatis collegit Newtonus, ut credere facile sit ipsum hunc numerum ex theoriâ gravitatis collegisse eâ proximè ratione quæ in calculo (pag. 83.) adhibetur, differentiola enim ista oriri potest ex eo quod, vel angulum inclinationis orbitæ, vel quantitatem M mensis periodici citra actionem Solis considerati, paulo majorem fecerit quàm nos.

(e) In aliis Solis distantiis hæc æquatio maxima in octantibus nodorum est reciprocè ut cubus distantiæ Solis a Terrâ, ideóque in perigæo Solis ad 49″. in apogæo ejus ad 45″. circiter ascendit.

(f) Per eandem gravitatis theoriam apogæum Lunæ progreditur quam maximè ubi vel cum Sole conjungitur vel eidem opponitur, et regreditur ubi cum Sole quadraturam facit. (g) Et eccentricitas fit maxima in priore casu et minima in posteriore, per Corol. 7, 8, et 9. Prop. LXVI. Lib. I. Et hæ inæqualitates per eadem Corollaria permagnæ sunt, et æquationem principalem apogæi generant, quam semestrem vocabo. (h) Et æquatio maxima semestris est 12^{gr}. 18′. circiter, quantùm ex observationibus colligere potui. Horroxius noster Lunam in ellipsi circum Terram, in ejus umbilico inferiore constitutam, revolvi primus statuit. Halleius centrum ellipseos in epicyclo locavit, cujus centrum uniformiter revolvitur circum Terram. (i) Et ex motu in epicyclo oriuntur inæqualitates jam dictæ in progressu et regressu apogæi et quantitate eccentricitatis. Dividi intelligatur distantia mediocris Lunæ a Terrâ in

(e) * *In aliis Solis distantiis.* Eadem plane est demonstratio ac in notâ (y) præcedente; cùm æquatio fit $\frac{3\,A\,F\,l^2}{8\,S\,V\,a\,r} \times \frac{2\,n\,m}{r}$ in diversâ Solis a Terrâ distantiâ X, loco a scribatur X, loco F, $\frac{a^2\,F}{X^2}$, loco $\frac{F}{V}$, $\frac{a\,M^2}{r\,A^2}$, æquatio evadit $\frac{3\,M^2\,a^3\,l^2}{8\,A.S.X^3 r^2} \times \frac{2\,n\,m}{r}$ et in octantibus quia $\frac{2\,n\,m}{r} = r$, æquatio est $\frac{3\,M^2\,a^3\,l^2}{8\,A.\,S\,X^3\,r}$, ideóque æquationes in octantibus in diversâ Solis a Terrâ distantiâ, sunt inter se inversè ut X^3, si fiat itaque ut cubus maximæ distantiæ Terræ a Sole qui est 1.0516, ad cubum 1 mediocris distantiæ, ita 47″. æquatio pro mediocri distantiâ inventa erit ad 45″. circiter, eaque erit æquatio in maximâ distantiâ Solis a Terrâ, et ut .950107 cubus minimæ distantiæ ad 1, ita 47″. ad 49″. circiter, quæ erit æquatio maxima cùm Sol erit in perigæo. Eâdem etiam ratione ac in notâ (z) ostendetur quomodo in quâvis Solis a Terrâ distantiâ, et in quâvis positione nodi respectu Solis æquatio obtineri debeat.

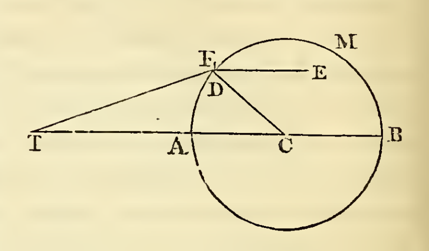
(f) * *Per eandem gravitatis theoriam apogæum Lunæ progreditur quam maximè,* &c. Per methodum ex ipsis Newtoni Principiis derivatam invenimus (pag. 86. et seq.) motum apsidis esse ut $3\,y\,y - r\,r$, sumendo y pro sinu distantiæ apsidis a quadraturâ; is ergo motus, juxta hunc calculum, evanescit cum $y \sqrt{3} = r$, cùm nempe y est sinus arcûs 35^{gr}. 15′, positivus verò est in syzygiis; illic enim fit $3\,y\,y - r\,r = 2\,r\,r$ negativus in quadraturis; illic enim est $3\,y\,y - r\,r = -\,r\,r$.

(g) * *Et eccentricitas fit maxima in priori casu,* cùm nempe apsides sunt in syzygiis, et minima in posteriore, cùm nempe *apsides sunt in quadraturis.* Id utique statuitur toto calculo de excentricitate orbitæ lunaris superius pag. 91. et seq. tradito.

(h) * *Et æquatio maxima semestris,* &c. Hanc ex observationibus determinandam liquet cùm non satis feliciter obtineatur absoluta quantitas motûs apogæi per calculos secundum Newtoniana Principia institutos; methodus autem a nobis indicata est admodum incompleta et rudis, et in eâ multa, quæ considerari debuissent, sunt omissa: hinc cùm in cæteris motibus Lunæ et æquationibus ad votum succedat theoria Newtoniana, in hoc casu aliquid adhuc desiderari, fatendum est.

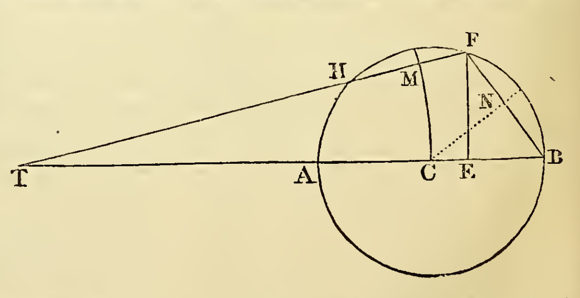
(i) * *Et ex motu in epicyclo.* Ingeniosè et feliciter conjunctas esse unicâ constructione geometricâ excentricitatis variationes, et motûs apogæi æquationes, ex iis quæ de excentricitate dicta sunt pag. 94. intelligi potest; illic enim ostenditur quod si T C sit excentricitas media f, C B maxima excentricitatis variatio ab excentricitate mediocri, B F arcus duplus distantiæ apsidis a syzygiâ, tunc linea T F est excentricitas, ostenditur verò, Probl. II. pag. 95. variationem maximam excentricitatis quæ est A B tam ex observationibus quàm consentiente calculo sumi posse 1172 partium quarum radius orbitæ lunaris est 100000 et excentricitas T C 5505, simul autem cùm constet ex observationibus æquationem semestrem apogæi 12^{gr}. 18′. esse, ejus anguli sinus est partium 1172 radio existente partium 5505, ut liquet si fiat ut radius 100000 ad sinum anguli 12^{gr}. 18′. qui est 21303 ita 5505 ad quartum qui est $1172\frac{3}{4}$; hinc illum numerum pro maximâ variatione excentricitatis selegit Halleius, quia non procul est ab iis quos et observationes et calculus indicant, simulque est

partes 100000, et referat T Terram et T C eccentricitatem mediocrem Lunæ partium 5505. Producatur T C ad B, ut sit C B sinus æquationis maximæ semestris 12gr. 18′. ad radium T C, et circulus B D A centro C, intervallo C B descriptus erit epicyclus ille in quo centrum orbis lunaris locatur et secundum ordinem literarum B D A revolvitur. Capiatur angulus B C D æqualis duplo argumento annuo, seu duplæ distantiæ veri loci Solis ab apogæo Lunæ semel æquato, et erit C T D æquatio semestris apogæi Lunæ et T D eccentricitas orbis ejus in apogæum secundo æquatum tendens. Habitis autem Lunæ motu medio et apogæo et eccentricitate, ut et orbis axe majore partium 200000; ex his eruetur verus Lunæ locus in orbe et distantia ejus a Terrâ, (k) idque per methodos notissimas.



(l) In perihelio Terræ, propter majorem vim Solis, centrum orbis Lunæ velociùs movetur circum centrum C quàm in aphelio, idque in triplicatâ ratione distantiæ Terræ a Sole inversè. (m) Ob æquationem centri Solis in argumento annuo comprehensam, centrum orbis Lunæ velociùs movetur in epicyclo B D A in duplicatâ ratione distantiæ Terræ

sinus anguli maximi quo discedunt apsides a loco medio: ergo quando B F est quadrans, ideóque apsides octante a syzygiâ distant, sinus anguli F T B est ipsa linea C B sive $1172\frac{3}{4}$ dum radius T F est æqualis T C sive 5505, ergo èo in casu angulus F T B est verus discessus lineæ apsidum a suo loco medio, et jacet T F in verâ positione lineæ apsidum, et cùm T F sit excentricitas eo in loco est F in ipsâ positione centri orbitæ lunaris; idem proximè eveniet in quovis alio loco F; nam cùm æquationes apogæi (pag. 91.) sint ut sinus arcus dupli distantiæ apsidis a Sole, et sit F B arcus duplus distantiæ apsidis a Sole et F E ejus sinus, æquatio maxima 12gr. 18′. debebit esse ad eam quæ huic loco F competit ut B C ad F E, sed in eâ proximè sunt ratione anguli omnes F T B, hinc itaque est quam proximè T F in verâ positione lineæ apsidum et F centrum orbitæ.



(k) * *Per methodos notissimas.* De iis agitur Lib. I. Prop. XXXI.

(l) * *In perihelio.* Si nulla esset vis Solis, quiescerent apsides orbitæ lunaris, nec mutaretur ejus excentricitas, motum itaque centri orbitæ lunaris F in circulo B F H A vi solari esse debitum liquet, omnes verò errores ex vi solari ortos, esse proximè in triplicatâ ratione distantiæ Terræ a Sole sæpius observatum est, hinc motus centri F orbitæ lunaris in circulo B F H A eâ proportione variari debet.

(m) * *Ob æquationem centri Solis in argumento annuo comprehensam*, &c. Arcus F B vel arcus B D in figurâ textûs est duplus distantiæ apsidis a syzygiâ, hoc est, duplus distantiæ apsidis a Sole, itaque punctum F invenitur locum Solis a loco apsidis tollendo, residui in consequentia duplum est arcus B F, et id residuum est argu-

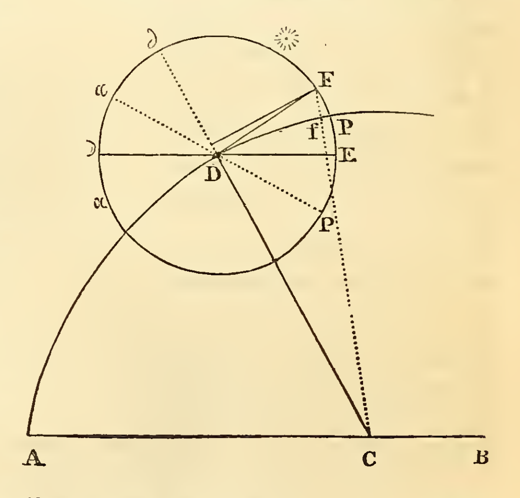
a Sole inversè. Ut idem adhuc velociùs moveatur in ratione simplici distantiæ inversè, ab orbis centro D agatur recta D E versus apogæum Lunæ seu rectæ T C parallela, et capiatur angulus E D F æqualis excessui argumenti annui prædicti supra distantiam apogæi Lunæ a perigæo Solis in consequentia; (n) vel quod perinde est, capiatur angulus C D F æqualis complemento anomaliæ veræ Solis ad gradus 360. Et sit D F ad D C ut dupla eccentricitas orbis magni ad distantiam mediocrem Solis a Terrâ, et motus medius diurnus Solis ab apogæo Lunæ ad motum medium diurnum Solis ab apogæo proprio conjunctim, id est, ut $33\frac{7}{8}$ ad 1000 et 52′. 27″. 16‴. ad 59′. 8″. 10‴. conjunctim, sive ut 3 ad 100. Et concipe centrum orbis Lunæ locari in puncto F, et in epicyclo, cujus centrum est D, et radium D F, interea revolvi dum punctum D progreditur in circumferentiâ circuli D A B D. (o) Hâc enim ratione

mentum annuum, fingatur apsidem immotam esse, Solem verò moveri, pendebit arcus B F ex motu Solis fietque major quo celerius Sol movebitur, sed motus Solis est inversè in ratione duplicatâ distantiarum Terræ a Sole (notâ o) ergo motus puncti F ex hac consideratione sequitur rationem inversam duplicatam distantiæ Terræ a Sole.

(n) * *Vel quod perinde est.* Si circa punctum D radio D F describatur circulus E F ☉ d α ☽ P; in quo fit E Lunæ apogæum e centro D spectatum; ☽ Lunæ perigæum, α apogæum Solis, P Solis perigæum, ☉ locus Solis, cùm ex constructione sit d D E = D C B, ideóque duplum argumenti annui, sive duplum distantiæ ☉ E, erit E D C æqualis semi-circulo dempto 2 ☉ E, sive erit $\frac{1}{2}$ c — 2 ☉ E; itaque si ei arcui E D C addatur E D F æqualis annuo argumento demptâ distantiâ apogæi Lunæ a perigæo Solis, sive ☉ E — P E, fiet C D F = $\frac{1}{2}$ c — ☉ E — P E, sed cùm $\frac{1}{2}$ c sit æqualis distantiæ perigæi Solis ab ejus apogæo, erit $\frac{1}{2}$ c = P E ☉ α, ex quo itaque detracto P E et E ☉, est C D F = ☉ α sive distantiæ Solis ab apogæo in antecedentia, aut quod idem est complemento ad 360^{gr}. arcus α ☽ P E F ☉, qui arcus est distantia Solis ab apogæo suo, in consequentia sumpta, quæ est Solis anomalia vera.

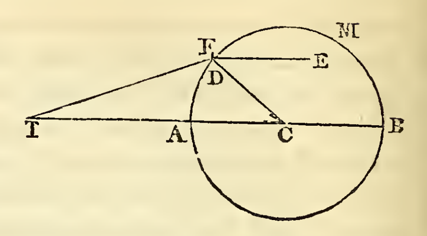
Si punctum P foret in consequentia respectu puncti E, tunc E D F faciendus esset æqualis argumento annuo additâ distantiâ perigæi Solis a Lunâ, sicque fieret C D F = $\frac{1}{2}$ c — ☉ + P E et quoniam in eo casu est $\frac{1}{2}$ c = P ☉ ☽ α, et — ☉ E + P E = — P ☉, erit C D F = ☉ ☽ α, sive erit distantia Solis ab apogæo in antecedentia posito, hoc est, complementum ad 360^{gr}. arcûs α ☽ P E F ☉, qui arcus est distantia Solis ab apogæo suo in consequentia sumpta, quæ est Solis anomalia vera.

(o) * *Hâc enim ratione.* Æquationem hujus motûs centri orbis lunaris quæ adhibenda est ut



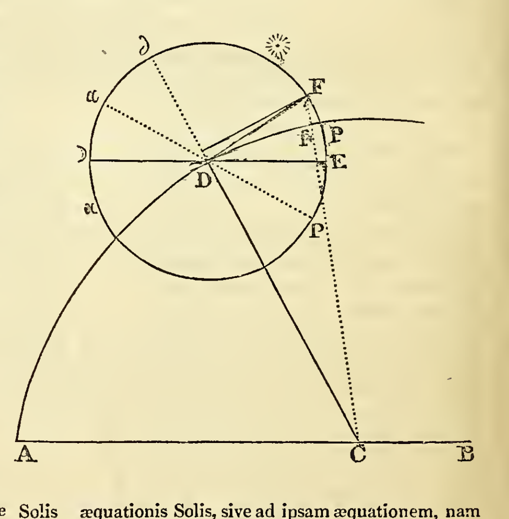
moveatur velocius quàm per primam constructionem, idque in simplici ratione distantiæ inversè esse proportionalem æquationi centri Solis, constat eadem demonstratione quâ in notis (m) et (n) pag. 96. de æquationibus annuis apogæi et nodi idem probatum fuit.

Dicatur a mediocris distantia Terræ a Sole, quævis alia distantia dicatur a ± x, motus medius centri orbis lunaris in distantia a fit o, et quia ille motus est in triplicatâ ratione distantiæ Solis a Terrâ inversè, in aliâ quavis distantiâ Terræ a Sole erit $\frac{a^3}{\overline{a \pm x}^3}$ o et formando seriem, erit o $\mp \frac{3x}{a}$ o, sed si fingeretur eum motum sequi proportionem inversam duplicatam distan-

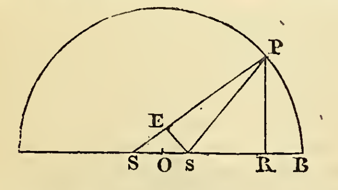


velocitas, quâ centrum orbis Lunæ in lineâ quâdam curvâ circum centrum C descriptâ movebitur, erit reciprocè ut cubus distantiæ Solis a Terrâ quamproximè, ut oportet.

Computatio motûs hujus difficilis est, sed facilior reddetur per approximationem sequentem. Si distantia mediocris Lunæ a Terrâ sit partium 100000, et eccentricitas T C sit partium 5505 ut supra: recta C B vel C D invenietur partium $1172\frac{3}{4}$ et recta D F partium $35\frac{1}{5}$. Et hæc recta ad distantiam T C subtendit angulum ad Terram quem translatio centri orbis a loco D ad locum F generat in motu centri hujus: et eadem



tiarum, inveniretur is motus singulis in locis o $\mp \frac{2x}{a}$ o, et ita assumptus fuerat in primâ constructione (vid. not. (m) præced.), ergo singulo in loco error commissus per hanc fictionem foret $\mp \frac{x}{a}$ o; pariter si Solis motus medius dicatur m ostensum est (not. (n) pag. 96, 97.) differentiam inter motum medium et verum esse $\mp \frac{2x}{a}$ m; ideóque cùm ratio $\mp \frac{x}{a}$ o ad $\mp \frac{2x}{a}$ m, sit in singulis punctis x eadem, æquatio ex errore $\mp \frac{x}{a}$ o orta erit proportionalis æquationi ex $\mp \frac{2x}{a}$ m ortæ, hoc est erit proportionalis æquationi centri Solis; sed æquatio centri Solis est quamproximè proportionalis sinui anomaliæ Solis not. 372. Lib. I. nam illic demonstratur quod si ex utroque foco S et s orbitæ Solis ducantur lineæ ad punctum P, erit B s P ano-



malia media, et B S P anomalia vera, ideóque angulus S P s erit æquatio, ducatur ergo ex s in S P perpendiculum s E et ex P perpendiculum P R, ob similitudinem triangulorum S s E et s P R erit, S P ad P R ut S s ad s E, sive sumendo S P pro radio constanti (quod est proximè verum) erit, ut radius ad sinum anomaliæ veræ, ita dupla excentricitas ad sinum æquationis Solis, sive ad ipsam æquationem, nam in parvis angulis, arcus pro sinubus sumi possunt. Hinc sinus anomaliæ veræ est ad æquationem centri Solis in ratione datâ radii nempe ad duplam excentricitatem; hinc itaque, æquatio orta ex errore $\mp \frac{x}{a}$ o, erit ut sinus anomaliæ Solis, sed angulus C D F est complementum ejus anomaliæ ad 360^{gr}. sinus autem arcûs alicujus et sinus ejus complementi ad 360^{gr}. sunt unum et idem, ergo æquatio ex errore $\mp \frac{x}{a}$ o nata est proportionalis sinui angulorum C D F, et si sumatur radius D F æqualis æquationi maximæ hinc natæ, cæteri omnes sinus angulorum C D F erunt ipsæ æquationes in datâ Solis anomaliâ, si itaque sumantur a puncto D arcus D f in circulo B D A æquales illis sinubus, erit f verus locus centri orbitæ lunaris, et quia ob exiguitatem horum sinuum respectu radii C D,

recta duplicata in situ parallelo ad distantiam superioris umbilici orbis Lunæ a Terrâ, subtendit eundem angulum, quem utique translatio illa generat in motu umbilici, et ad distantiam Lunæ a Terrâ (p) subtendit angulum quem eadem translatio generat in motu Lunæ, quique propterea æquatio centri secunda dici potest. Et hæc æquatio, in mediocri Lunæ distantiâ a Terrâ, est ut sinus anguli, quem recta illa D F cum rectâ a puncto F ad Lunam ducta continet quamproximè, et ubi maxima est, evadit 2′. 25″. (q) Angulus autem quem recta D F et recta a puncto F ad Lunam ducta comprehendunt, invenitur vel subducendo angulum E D F ab anomalia media Lunæ, vel addendo distantiam Lunæ a Sole ad distantiam apogæi Lunæ ab apogæo Solis. Et ut radius est ad sinum

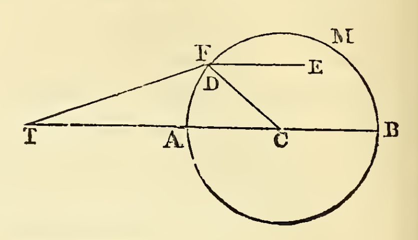
linea per C et f ducta cadit etiam in F, sumi potest F ut verus locus centri orbitæ lunaris.

Invenitur autem æquatio maxima orta ex errore $\mp \frac{x}{a}$ o; si attendatur quod Solis motus est ubique m $\mp \frac{2\,x}{a}$ m, sive m $\mp \frac{x}{a} \times 2$ m ideóque summam omnium errorum ex errore $\frac{x}{x}$ o fore ad summam omnium errorum in Solis motu genitorum ut o ad 2 m, sive æquationem quæsitam esse ad æquationem Solis ut est motus centri orbitæ lunaris per circulum B D A ad duplum motum medium Solis respectu sui apogæi, sed quoniam arcus B D sunt semper dupli distantiæ Solis ab apogæo Lunæ, motus diurnus centri orbis lunaris per circulum B D A est etiam duplus motûs Solis ab apogæo Lunæ, hinc æquatio quæsita est ad maximam æquationem Solis ut est radius D C ad distantiam mediocrem Solis a Terrâ et ut duplus motus diurnus Solis ab apogæo Lunæ ad duplum motum diurnum Solis ab apogæo suo conjunctim, maxima autem Solis æquatio est ipsa dupla excentricitas orbis magni, hinc æquatio quæsita sive radius D F est ad duplam excentricitatem ut D C ad distantiam mediocrem Solis a Terrâ, et ut motus diurnus Solis ab apogæo Lunæ ad motum diurnum Solis ab apogæo suo conjunctim, undè vicissim est etiam D F ad D C ut dupla excentricitas ducta per motum diurnum Solis ab apogæo Lunæ, ad distantiam mediocrem Solis a Terrâ ductam per motum diurnum Solis ab apogæo suo.

(p) * *Subtendit angulum quem eadem translatio generat in motu Lunæ.* Scilicet tota orbita Lunæ, ipsaque Luna per motum centri orbitæ ex D in F translatum ex proprio loco mota censeri debet in locum alium per lineam ipsius D F duplam ipsique parallelam; cùm itaque distantia mediocris sit partium 100.000, si hæc linea quæ duplicata est 70 .4, angulum rectum cum linea a Terrâ ducta efficiat, quo casu maximam æquationem facit, ipsa subtendet angulum 2′. 25″. siquidem sinus duorum minutorum est 58 .18 sinus trium 87 .27. In aliis autem hujus lineæ positionibus respectu lineæ a Terrâ ductæ, anguli quos subtendet erunt ad istum ut est sinus anguli quem facit cum lineis a Terrâ ductis ad radium; nam in triangulis in quibus duæ lineæ sunt constantes, sed earum angulus variabilis, si una ex iis lineis alterius respectu sit minima, tertia linea pro constante assumi potest, est verò ad minimam lineam, ut sinus anguli variabilis ad sinum anguli oppositi minimæ lineæ; hinc sinus anguli variabilis et sinus anguli minimi sunt in ratione datâ. Ergo ut sinus anguli recti sive radius ad 2′. 25″. ita sinus anguli quem facit linea a Terrâ ducta cum lineola parallela ad D F, ad angulum quo locus Lunæ mutatus cernitur.

(q) * *Angulus autem quem* facit linea a Terrâ ducta cum lineola parallela ad D F, et in ipso loco Lunæ posita, æqualis est illi quem facit recta D F et recta a puncto F ad Lunam ducta, saltem proximè quia F est centrum orbitæ lunaris a quo Terra non multum distat; fingatur, produci lineam D F et ex puncto F duci lineam parallelam lineæ D E, quæ ad apogæum Lunæ tendit, et ex eodem puncto F aliam duci lineam ad Lunam, angulus hujus lineæ cum lineâ D E erit anomalia media Lunæ; ergo angulus hujus lineæ cum lineâ D F producta erit differentia anguli E D F et anomaliæ mediæ Lunæ, sive quia erat E D F differentia argumenti annui, et distantiæ apogæi Lunæ a perigæo Solis si ex anomalia media Lunæ tollatur, argumentum annuum superest distantiæ Lunæ a Sole, cui addi debet distantia apogæi Lunæ et perigæi Solis, sive (quia semi-circuli additi vel detracti non mutant valores angulorum eorumque sinuum) distantia apogæi Lunæ et apogæi Solis: cætera facile patebunt ex figuræ descriptione; exemplum esto in conjunctione ubi est ☉ locus Solis et Lunæ, liquet enim quod quando punctum ☉ est in consequentia respectu puncti F, Luna quæ transfertur per lineam parallelam lineæ D F transfertur in antecedentia; dum e contrà, punctum ☉ est in antecedentia respectu puncti F, Luna transfertur in consequentia;

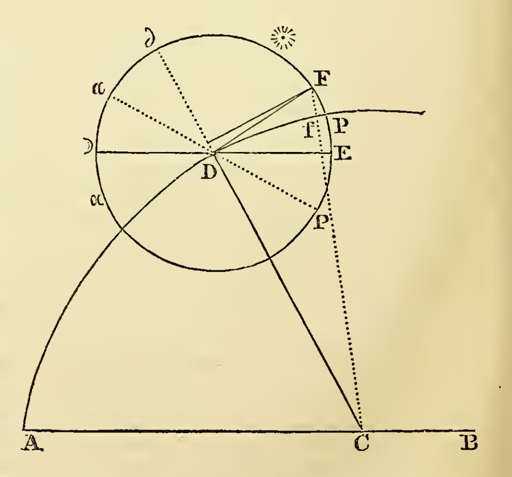
anguli sic inventi, ita 2′. 25″. sunt ad æquationem centri secundam, addendam, si summa illa sit minor semi-circulo, subducendam si major. Sic habebitur ejus longitudo in ipsis luminarium syzygiis.



Cùm atmosphæra Terræ ad usque altitudinem milliarium 35 vel 40 refringat lucem Solis, et refringendo spargat eandem in umbram Terræ, et spargendo lucem in confinio umbræ dilatet umbram: (r) ad diametrum umbræ, quæ per parallaxim prodit, addo minutum unum primum in eclipsibus Lunæ, vel minutum unum cum triente.

Theoria verò Lunæ primò in syzygiis, deinde in quadraturis, et ultimò in octantibus per phænomena examinari et stabiliri debet. Et opus hocce aggressurus motus medios Solis et Lunæ ad tempus meridianum in Observatorio Regio Grenovicensi, die ultimo mensis Decembris anni 1700. st. vet. non incommodè sequentes adhibebit: nempe motum medium Solis ♑ 20^{gr}. 43′. 40″. et apogæi ejus ♋ 7^{gr}. 44′. 30″., et motum medium Lunæ ♒ 15^{gr}. 21′. 00″., et apogæi ejus ♓ 8^{gr}. 20′. 00″., et nodi ascendentis ♌ 27^{gr}. 24′. 20″.; et differentiam meridianorum Observatorii hujus et Observatorii Regii Parisiensis 0^{h}. 9′. 20″. motus autem medii Lunæ et apogæi ejus nondum satis accuratè habentur.

est verò F ☉ = P E, cùm ergo A E est major semi-circulo, ut in figura, tunc P E sive F ☉ est minor semi-circulo, est ergo ☉ in consequentia respectu puncti F, hinc subducenda est ea æquatio; sit verò A E minor semi-circulo erit P E major semi-circulo ut et F ☉, ideóque est ☉ in antecedentia respectu F; promovetur itaque Luna propter hanc æquationem; cæterum non tantum in luminarium syzygiis, sed ad cæteros Lunæ adspectus hæc adaptari possunt, verùm commodius est astronomis, theoriam suam ex syzygiarum observationibus explorare et constituere.



(r) * *Ad diametrum umbræ.* Parallaxis est angulus qui subtenditur per semi-diametrum Terræ ex Lunâ spectatæ; jam verò propter atmosphæræ actionem in radios lucis idem evenit respectu umbræ ac si semi-diameter Terræ 35 vel 40 milliaribus augeretur, nam radii illàc pergentes rectam viam non sequuntur, sed introrsum in umbram conjiciuntur, hinc carent radiis solaribus loca quæ trans atmosphæram eos recipere deberent, fungitur ergo atmosphæra vice corporis opaci, et umbra eâ de causâ dilatari debet quasi semi-diameter Terræ in 35 vel 40 milliaribus foret aucta.

PHILOSOPHIÆ NATURALIS

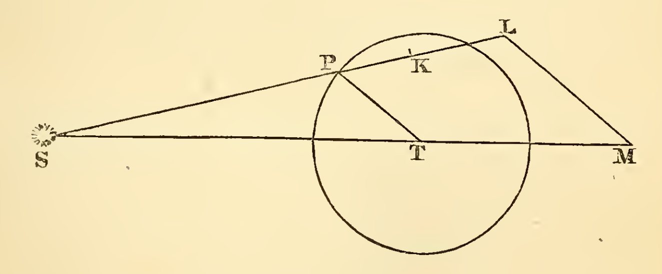
PRINCIPIA MATHEMATICA.

LIBRI TERTII CONTINUATIO.

PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA XVII.

Invenire vim Solis ad Mare movendum.

Solis vis M L seu P T, in quadraturis lunaribus, ad perturbandos motus lunares erat (per Prop. XXV. hujus) ad vim gravitatis apud nos, ut 1. ad 638092.6. Et vis T M — L M seu 2 P K in syzygiis lunaribus



est duplo major. Hæ autem vires, si descendatur ad superficiem Terræ, diminuuntur in ratione distantiarum a centro Terræ, id est, (x) in ratione $60\frac{1}{2}$ ad 1; ideóque vis prior in superficie Terræ est ad vim gravitatis ut 1 ad 38604600. Hac vi mare deprimitur in locis, quæ 90 gradibus distant a Sole. Vi alterâ, quæ duplo major est, mare elevatur et sub Sole et in

(x) * *In ratione* $60\frac{1}{2}$ *ad* 1. Quemadmodùm in Prop. XXV. demonstratum est eam partem vis centripetæ lunaris in Solem quâ motus ejus circà Terram perturbatur et quæ radio orbitæ lunaris erat proportionalis, esse ad vim centripetam Lunæ in Terram in duplicatâ ratione temporum periodicorum Terræ circà Solem et Lunæ circà Terram, simili planè modo probatur eam quoque partem vis centripetæ in Solem, quæ analoga est radio Terræ, esse ad vim centripetam Lunæ in Terram in ratione radii Terræ ad radium orbitæ lunaris directè et ratione duplicatâ temporis periodici Terræ circà Solem ad tempus periodicum Lunæ circà Terram inversè. Quarè vires Solis ad perturbandos motus corporum propè superficiem Terræ sunt ad vires Solis ad perturbandos motus Lunæ ut radius Terræ ad radium orbitæ lunaris, hoc est, ut 1 ad $60\frac{1}{2}$.

regione Soli oppositâ. (z) Summa virium est ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200. Et quoniam vis eadem eundem ciet motum, sive ea deprimat aquam in regionibus quæ 90 gradibus distant a Sole, sive elevet eandem in regionibus sub Sole et Soli oppositis, hæc summa erit tota Solis vis ad mare agitandum; et eundem habebit effectum, ac si tota in regionibus sub Sole et Soli oppositis mare elevaret, in regionibus autem quæ 90 gradibus distant a Sole, nil ageret.

Hæc est vis Solis ad mare ciendum in loco quovis dato, ubi Sol tam in vertice loci versatur quàm in mediocri suâ distantiâ a Terrâ. (a) In aliis Solis positionibus vis ad mare attollendum est ut sinus versus duplæ altitudinis Solis supra horizontem loci directè et cubus distantiæ Solis a Terrâ inversè.

Corol. Cùm vis centrifuga partium Terræ a diurno Terræ motu oriunda, quæ est ad vim gravitatis ut 1 ad 289, efficiat ut altitudo aquæ sub æquatore superet ejus altitudinem sub polis mensurâ pedum Parisiensium 85472, ut supra in Prop. XIX.; vis solaris de quâ egimus, cùm sit ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200, atque ideò ad vim illam centrifugam ut 289 ad 12868200 seu 1 ad 44527, (b) efficiet ut altitudo aquæ in regionibus sub Sole et Soli oppositis superet altitudinem ejus in locis, quæ 90 gradibus distant a Sole, mensurâ tantùm pedis unius Parisiensis et digitorum undecim cum tricesimâ parte digiti. Est enim hæc mensura ad mensuram pedum 85472 ut 1 ad 44527.

(z) * *Summa virium* est ad vim gravitatis ut 3 ad 38604600 sive ut 1 ad 12868200.

(a) * *In aliis Solis positionibus.* Hâc vi aqua maximè deprimitur ubi Sol versatur in horizonte, et maximè elevatur ubi Sol in vertice loci versatur. Depressio autem et elevatio aquarum magis ac magis decrescit quo altiùs Sol ascendit suprà horizontem, aut a vertice descendit. Præterea hæc depressio aut elevatio circa initium et finem lentiùs, circà medium verò celeriùs minuitur; sed hæc contingent successiva aquarum incrementa et decrementa si vis maxima Solis in vertice loci exprimatur per diametrum circuli, hoc est, per sinum versum 180°. seù duplæ altitudinis Solis, suprà horizontem; in aliis autem Solis positionibus vis eadem exhibeatur per sinus versos altitudinum duplicatarum; quare in variis Solis positionibus, vis ad mare attollendum sumi potest ut sinus versus duplæ altitudinis Solis suprà horizontem, seclusâ tamen perturbatione quæ ex variâ Solis a Tellure distantiâ oritur. At vis Solis augetur vel minuitur quò propiùs ad Terram accedit aut longiùs ab eâ recedit, idque in ratione triplicatâ distantiarum inversâ (Cor. 14. Prop. LXVI. Lib. I.) considerari itaque poterit vis Solis ad mare attollendum ut sinus versus duplæ altitudinis Solis suprà horizontem loci directè et cubus distantiæ Solis a Terrâ inversè. Cæterùm tota hæc Propositio eleganter admodùm calculo tractata legitur in tribus Dissertationibus quæ Vol. III. adjectæ sunt.

(b) * *Efficiet ut altitudo aquæ.* Quoniam ex variis pendulorum observationibus et nuperrimè institutis gradûs meridiani mensuris sub circulo polari, Terra altior est sub æquatore quàm ex theoriâ Newtonianâ prodiit (Prop. XIX. Lib. hujus) paulò augenda erit altitudo aquæ in hoc Corollario definita. Observandum autem est Corollarium illud rigorosè verum non esse; Newtonus enim ex differentiâ diametri æquatoris et axis Terræ per simplicem proportionem colligit altitudinem aquæ ex vi Solis oriundam; uterque tamen casus est longè diversus, primus siquidem pendet a quadraturâ circuli, alter verò refertur ad quadraturam hyperbolæ (ut patet ex Cor. 2. Prop. XC. Lib. I. et not. 106. Lib. hujus). Sed quam parùm a veritate discrepet præsens Corollarium, apparet ex computo inito in Dissertatione clariss. Maclaurin, Prop. V.

PROPOSITIO XXXVII. PROBLEMA XVIII.

Invenire vim Lunæ ad mare movendum.

(c) Vis Lunæ ad mare movendum colligenda est ex ejus proportione ad vim Solis, et hæc proportio colligenda est ex proportione motuum maris, qui ab his viribus oriuntur. Ante ostium fluvii Avonæ ad lapidem tertium infra Bristolium, tempore verno et autumnali totus aquæ ascensus in conjunctione et oppositione luminarium, observante Samuele Sturmio, est pedum plus minus 45, in quadraturis autem est pedum tantum 25. Altitudo prior ex summâ virium, posterior ex earundem differentiâ oritur. Solis igitur et Lunæ in æquatore versantium et mediocriter a Terrâ distantium sunto vires S et L, et erit L + S ad L — S ut 45 ad 25, seu 9 ad 5.

In portu Plymuthi æstus maris ex observatione Samuelis Colepressi ad pedes plus minus sexdecim altitudine mediocri attollitur, ac tempore verno et autumnali altitudo æstûs in syzygiis superare potest altitudinem ejus in quadraturis pedibus plus septem vel octo. Si maxima harum altitudinum differentia sit pedum novem, erit L + S ad L — S ut $20\frac{1}{2}$ ad $11\frac{1}{2}$ seu 41 ad 23. Quæ proportio satis congruit cum priore. Ob magnitudinem æstûs in portu Bristoliæ, observationibus Sturmii magis fidendum esse videtur, ideóque donec aliquid certius constiterit, proportionem 9 ad 5 usurpabimus.

Cæterum ob aquarum reciprocos motus, æstus maximi non incidunt in ipsas luminarium syzygias, sed sunt tertii a syzygiis ut dictum fuit, seu proximè sequuntur tertium Lunæ post syzygias appulsum ad meridianum loci, vel potius (ut a Sturmio notatur) sunt tertii post diem novilunii vel plenilunii, sed post horam a novilunio vel plenilunio plus minus duodecimam, ideóque incidunt in horam a novilunio vel plenilunio plus minus quadragesimam tertiam. Incidunt verò in hoc portu in horam septimam circiter ab appulsu Lunæ ad meridianum loci; ideóque proximè sequuntur appulsum Lunæ ad meridianum, ubi Luna distat a Sole vel ab oppositione Solis gradibus plus minus octodecim vel novemdecim in consequentia. Æstas et hyems maximè vigent, non in ipsis solstitiis, sed ubi Sol distat a solstitiis decimâ circiter parte totius circuitûs, seu gradibus plus minus 36 vel 37. Et similiter maximus æstus maris oritur ab appulsu Lunæ ad

(c) * *Vis Lunæ ad mare movendum.* Vid. Cap. VI. num. 10. in Dissertatione clariss. Bernoullii et Prop. IX. in Dissertatione clariss. Maclaurini.

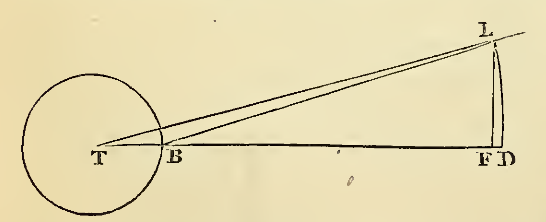
meridianum loci, ubi Luna distat a Sole decimâ circiter parte motûs totius ab æstu ad æstum. Sit distantia illa graduum plus minus $18\frac{1}{2}$. ([d]) Et vis Solis in hâc distantiâ Lunæ a syzygiis et quadraturis, minor erit ad augendum et ad minuendum motum maris a vi Lunæ oriundum, quàm in ipsis syzygiis et quadraturis, in ratione radii ad sinum complementi distantiæ hujus duplicatæ seu anguli graduum 37, hoc est, in ratione 10000000 ad 7986355. Ideóque in analogia superiore pro S scribi debet 0.7986355 S.

Sed et vis Lunæ in quadraturis, ob declinationem Lunæ ab æquatore, diminui debet. Nam Luna in quadraturis, vel potius in gradu $18\frac{1}{2}$ post quadraturas, in declinatione graduum plus minus 23. 13′. versatur. Et luminaris ab æquatore declinantis vis ad mare movendum diminuitur ([e]) in duplicatâ ratione sinus complementi declinationis quamproximè. Et propterea vis Lunæ in his quadraturis est tantùm 0.8570327 L. Est igitur L + 0.7986355 S ad 0.8570327 L — 0.7986355 S ut 9 ad 5.

([f]) Præterea diametri orbis, in quo Luna sine eccentricitate moveri deberet, sunt ad invicem ut 69 ad 70; ideóque distantia Lunæ a Terrâ in syzygiis est ad distantiam ejus in quadraturis ut 69 ad 70, cæteris paribus. Et distantiæ ejus in gradu $18\frac{1}{2}$ a syzygiis, ubi æstus maximus generatur, et in gradu $18\frac{1}{2}$ a quadraturis, ubi æstus minimus generatur, sunt ad mediocrem ejus distantiam ut 69.098747 et 69.897345 ad $69\frac{1}{2}$. ([g]) Vires autem Lunæ ad mare movendum sunt in triplicatâ ratione distantiarum inversè, ideóque vires in maximâ et minimâ harum distantiarum sunt ad vim in mediocri distantiâ ut 0.9830427 et 1.017522 ad 1. ([h]) Unde fit

([d]) * *Et vis Solis.* Hanc virium proportionem non multùm a vero differre patet ex iis quæ immediatè præcedunt.

([e]) 122. * *In duplicatâ ratione.* Sit T B D planum æquatoris, T centrum Telluris, sitque Luna in L, erit angulus L B D, mensura declinationis ab æquatore, seu ob exiguum angulum T L B, erit declinatio illa quamproximè æqualis angulo L T D, cujus anguli cosinus est T F, sumpto T L, pro radio. Jam vis quæ aquam in loco æquatoris B, directè trahit a centro T, ubi Luna versatur in plano æquatoris in D, est ad vim quæ eandem aquam directè a centro trahit, ubi Luna est in L, ut T L ad T F, hoc est, ut radius ad sinum complementi declinationis L T D, sepositâ vi aquæ centripetâ versus T. Sed auctâ vi illâ centripetâ, in eâdem ratione minuitur vis altera aquam a centro trahens; quarè, componendo, vis Lunæ in loco D, est ad vim ejus in L, ut quadratum sinûs totius T L, ad quadratum sinûs complementi T F, declinationis Lunæ L T D.



([f]) * *Præterea diametri orbis.* (Prop. XXVIII. Lib. hujus).

([g]) * *Vires autem Lunæ.* (Cor. 14. Prop. LXVI. Lib. I.).

([h]) * *Unde fit.* Ut ex hâc analogiâ vis L Lunæ colligi possit, ducenda sunt media et extrema, hæcque orietur æquatio 1.017522 L × 5 + 0.7986355 S × 5 = 0.9830427 × 9 × 0.857032 L — 0.7986355 S × 9; et transponendo hæc habetur proportio S : L = 0.9830427 × 0.8570327 × 9 —.017522 × 5 : 0.7986355 × 5 + 0.7986355 × 9.

1.017522 L + 0.7986355 S ad 0.9830427 × 0.8570327 L— 0.7986355 S ut 9 ad 5. Et S ad L ut 1 ad 4.4815. Itaque cùm vis Solis sit ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200, vis Lunæ erit ad vim gravitatis ut 1 ad 2871400.

Corol. 1. Cùm aqua vi Solis agitata ascendat ad altitudinem pedis unius et undecim digitorum cum tricesimâ parte digiti, eâdem vi Lunæ ascendet ad altitudinem octo pedum et digitorum $\frac{5}{22}$, et vi utrâque ad altitudinem pedum decem cum semisse, et ubi Luna est in perigæo, ad altitudinem pedum duodecim cum semisse et ultra, præsertim ubi æstus ventis spirantibus adjuvatur. Tanta autem vis ad omnes maris motus excitandos abundè sufficit, et quantitati motuum probè respondet. Nam in maribus quæ ab oriente in occidentem latè patent, uti in Mari Pacifico, et Maris Atlantici et Æthiopici partibus extra tropicos, aqua attolli solet ad altitudinem pedum sex, novem, duodecim vel quindecim. In Mari autem Pacifico, quod profundius est et latius patet, æstus dicuntur esse majores quàm in Atlantico et Æthiopico. Etenim (¹) ut plenus sit æstus, latitudo maris ab oriente in occidentem non minor esse debet quàm graduum nonaginta. In Mari Æthiopico ascensus aquæ intra tropicos minor est quàm in zonis temperatis, propter angustiam maris inter Africam et australem partem Americæ. In medio mari aqua nequit ascendere, nisi ad littus utrumque et orientale et occidentale simul descendat: cùm tamen vicibus alternis ad littora illa in maribus nostris angustis descendere debeat. Eâ de causâ fluxus et refluxus in insulis, quæ a littoribus longissime absunt, perexiguus esse solet. In portubus quibusdam, ubi aqua cum impetu magno per loca vadosa, ad sinus alternis vicibus implendos et evacuandos, influere et effluere cogitur, fluxus et refluxus debent esse solito majores, uti ad Plymuthum et pontem Chepstowæ in Anglia; ad montes S. Michaëlis et urbem Abrincatuorum (vulgo Avranches) in Normannia; ad Cambaiam et Pegu in India Orientali. His in locis mare, magnâ cum velocitate accedendo et recedendo, littora nunc inundat nunc arida relinquit ad multa milliaria. Neque impetus influendi et remeandi prius frangi potest, quàm aqua attollitur vel deprimitur ad pedes 30, 40, vel 50 et amplius. Et par est ratio fretorum oblongorum et vadosorum, uti Magellanici et ejus quo Anglia circundatur. Æstus in hujusmodi portubus et fretis per impetum cursus et recursus supra modum augetur. Ad littora verò quæ descensu præcipiti ad mare profundum et apertum

Jam verò sumptis horumce numerorum logarithmis, et quæsitis respondentibus numeris in vulgaribus logarithmorum tabulis, prodit S ad L ut 1 ad 4.4815 quamproximè.

(¹) * *Ut plenus sit æstus*. (109.)

spectant, ubi aqua sine impetu effluendi et remeandi attolli et subsidere potest, magnitudo æstûs respondet viribus Solis et Lunæ.

Corol. 2. Cùm vis Lunæ ad mare movendum sit ad vim gravitatis ut 1 ad 2871400, perspicuum est quod vis illa sit longè minor quàm quæ vel in experimentis pendulorum, vel in staticis aut hydrostaticis quibuscunque sentiri possit. ([k]) In æstu solo marino hæc vis sensibilem edit effectum.

Corol. 3. Quoniam vis Lunæ ad mare movendum est ad Solis vim consimilem ut 4.4815 ad 1, et vires illæ (per Corol. 14. Prop. LXIV. Lib. I.) sunt ut densitates corporum Lunæ et Solis et cubi diametrorum apparentium conjunctim; densitas Lunæ erit ad densitatem Solis ut 4.4815 ad 1 directè, et cubus diametri Lunæ ad cubum diametri Solis inversè: id est (cùm diametri mediocres apparentes Lunæ et Solis sint 31′. 16½″. et 32′. 12″.) ut 4891 ad 1000. ([l]) Densitas autem Solis erat ad densitatem Terræ ut 1000 ad 4000; et propterea densitas Lunæ est ad densitatem Terræ ut 4891 ad 4000 seu 11 ad 9. Est igitur corpus Lunæ densius et magis terrestre quàm Terra nostra.

Corol. 4. Et cùm vera diameter Lunæ ex observationibus astronomicis sit ad veram diametrum Terræ ut 100 ad 365; erit massa Lunæ ad massam Terræ ut 1 ad 39.788.

Corol. 5. ([m]) Et gravitas acceleratrix in superficie Lunæ erit quasi triplo minor quàm gravitas acceleratrix in superficie Terræ.

Corol. 6. ([n]) Et distantia centri Lunæ a centro Terræ erit ad distantiam centri Lunæ a communi gravitatis centro Terræ et Lunæ, ut 40.788 ad 39.788.

([o]) *Corol.* 7. Et mediocris distantia centri Lunæ a centro Terræ in octantibus Lunæ erit semi-diametrorum maximarum Terræ 60⅖ quamproximè. Nam Terræ semi-diameter maxima fuit pedum Parisiensium 19658600, et mediocris distantia centrorum Terræ et Lunæ, ex hujus modi diametris 60⅖ constans, æqualis est pedibus 1187379440. Et hæc

([k]) * *In æstu solo marino.* Hæ quidem vires ad movendum mare sufficiunt, sed alios effectus sensibiles producere non possunt. Etenim granum unum cum pondere granorum 4000 etiam accuratissimâ librâ comparatum sentiri vix potest, vis autem solaris est ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200, summaque virium Solis et Lunæ est ad eandem vim gravitatis ut 1 ad 2032890. Quare patet vires illas, licèt conjunctas, multò minores esse quàm ut pondus corporis cujusvis in librâ appensi sensibiliter augere vel minuere possint. Unde nec in experimentis pendulorum, barometrorum, vel in staticis aut hydrostaticis sensibiles edent effectus. Idem Corollarium eleganter demonstravit clariss. Eulerus num. 30. Dissertationis de Fluxu et Refluxu Maris.

([l]) * *Densitas autem Solis.* (Cor. 3. Prop. VIII. Lib. hujus.)

([m]) * *Et gravitas acceleratrix.* Nam gravitas acceleratrix est ut massa directè et quadratum distantiæ a centro, hoc est, semi-diametri inversè (Cor. 1. Prop. LXXV. Lib. I.) Ideóque gravitas acceleratrix in superficie Lunæ est ad gravitatem acceleratricem in superficie Terræ ut 1 × 13324. ad 39.788 × 1000, hoc est, ut 1 ad 3 circiter.

([n]) * *Et distantia centri Lunæ.* (61. Lib. I.)

([o]) * *Corol.* 7. Computum eodem planè modo initur ac in Prop. IV. Lib. hujus.

distantia (per Corollarium superius) est ad distantiam centri Lunæ a communi gravitatis centro Terræ et Lunæ, ut 40.788 ad 39.788: ideóque distantia posterior est pedum 1158268534. Et cùm Luna revolvatur, respectu fixarum, diebus 27, horis 7, et minutis primis $43\frac{4}{5}$; sinus versus anguli, quem Luna tempore minuti unius primi describit, est 12752341, existente radio 1000,000000,000000. Et ut radius est ad hunc sinum versum, ita sunt pedes 1158268534 ad pedes 14.7706353. Luna igitur vi illâ, quâ retinetur in orbe, cadendo in Terram, tempore minuti unius primi describet pedes 14.7706353. Et augendo hanc vim in ratione $178\frac{29}{40}$ ad $177\frac{29}{40}$, habebitur vis tota gravitatis in orbe Lunæ per Corol. Prop. III. Et hac vi Luna cadendo tempore minuti unius primi describet pedes 14.8538067. Et ad sexagesimam partem distantiæ Lunæ a centro Terræ, id est ad distantiam pedum 197896573 a centro Terræ, corpus grave tempore minuti unius secundi cadendo describet etiam pedes 14.8538067. Ideóque ad distantiam pedum 19615800, quæ sunt Terræ semi-diameter mediocris, grave cadendo describet pedes 15.11175, seu pedes 15, dig. 1, et lin. $4\frac{1}{11}$. Hic erit descensus corporum in latitudine graduum 45. Et per tabulam præcedentem in Prop. XX. descriptam, descensus erit paulo major in latitudine Lutetiæ Parisiorum existente excessu quasi $\frac{2}{3}$ partium lineæ. Gravia igitur per hoc computum in latitudine Lutetiæ cadendo in vacuo describent tempore unius secundi pedes Parisienses 15, dig. 1, et lin. $4\frac{25}{33}$ circiter. Et si gravitas minuatur auferendo vim centrifugam, quæ oritur a motu diurno Terræ in illa latitudine, gravia ibi cadendo describent tempore minuti unius secundi pedes 15, dig. 1, et lin. $1\frac{1}{2}$. Et hac velocitate gravia cadere in latitudine Lutetiæ supra ostensum est ad Prop. IV. et XIX.

Corol. 8. Distantia mediocris centrorum Terræ et Lunæ in syzygiis Lunæ est sexaginta semi-diametrorum maximarum Terræ, demptâ tricesimâ parte semi-diametri circiter. Et in quadraturis Lunæ distantia mediocris eorundem centrorum est $60\frac{5}{6}$ semi-diametrorum Terræ. Nam hæ duæ distantiæ sunt ad distantiam mediocrem Lunæ in octantibus ut 69 et 70 ad $69\frac{1}{2}$ per Prop. XXVIII.

Corol. 9. Distantia mediocris centrorum Terræ et Lunæ in syzygiis Lunæ est sexaginta semi-diametrorum mediocrium Terræ cum decimâ parte semi-diametri. Et in quadraturis Lunæ distantia mediocris eorundem centrorum est sexaginta et unius semi-diametrorum mediocrium Terræ, demptâ tricesimâ parte semi-diametri.

Corol. 10. In syzygiis Lunæ ([p]) parallaxis ejus horizontalis mediocris in latitudinibus graduum 0, 30, 38, 45, 52, 60, 90, est 57′. 20″, 57′. 16″, 57′. 14″, 57′. 12″, 57′. 10″, 57′. 8″, 57′. 4″. respectivè.

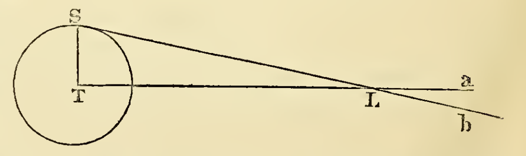
In his computationibus attractionem magneticam Terræ non consideravi, cujus utique quantitas perparva est et ignoratur. Si quando verò hæc attractio investigari poterit, et mensuræ graduum in meridiano, ac longitudines pendulorum isochronorum in diversis parallelis, legesque motuum maris, et parallaxis Lunæ cum diametris apparentibus Solis et Lunæ ex phænomenis accuratiùs determinatæ fuerint: ([q]) licebit calculum hunc omnem accuratiùs repetere.

PROPOSITIO XXXVIII. PROBLEMA XIX.

Invenire figuram corporis Lunæ.

Si corpus lunare fluidum esset ad instar maris nostri, vis Terræ ad fluidum illud in partibus et citimis et ultimis elevandum esset ad vim Lunæ, quâ mare nostrum in partibus et sub Lunâ et Lunæ oppositis attollitur, ([r]) ut gravitas acceleratrix Lunæ in Terram ad gravitatem

([p]) 123. * *Parallaxis* Lunæ horizontalis in diversis latitudinibus seu distantiis ab æquatore determinari potest. Parallaxis Lunæ horizontalis est differentia locorum in quibus Luna in horizonte posita, ex centro et superficie Terræ observata inter stellas fixas conspicitur. Hæc autem locorum distantia æqualis est angulo sub quo videretur semi-diameter Terræ ex loco Lunæ observata. Sit Luna in horizonte constituta in L; observator in superficiei terrestris loco S, Lunam inter stellas referet in b, sed idem observator in centro Terræ T positus Lunam referet in a. Est igitur differentia locorum æqualis a L b, qui æquatur angulo S L T, sub quo semi-diameter Terræ è loco Lunæ L spectatur. Sed quoniam Terra est figuræ sphæroidicæ, semi-diametri ejus in diversis latitudinibus inter se differunt, et est semi-diameter maxima secundum æquatorem ad minimam secundum polos, sive in latitudine 90°. ut 19658600 ad 19573000 circiter, estque earum differentia 85472 (Prop. XIX. Lib. huj.) in aliis latitudinibus differentia inter diametrum maximam et quamvis aliam est ad differentiam priorem in ratione duplicatâ sinûs totius ad sinum cujusvis latitudinis quamproximè (Prop. XX. Lib. huj.) hinc in syzygiis Lunæ parallaxis ejus horizontalis mediocris, hoc est, ubi distantia centrorum Lunæ et Terræ est semi-diametrorum maximarum Terræ 59.566 circiter (Cor. 8.) sub æquatore invenitur dicendo, ut est distantia Lunæ a Terrâ L S = 59.566, ad semi-diametrum maximam T S = 1, ità sinus totus ad sinum anguli T L S, qui est 57′. 20″. In aliis Lunæ locis minuitur parallaxis in eâdem ferè ratione ac semi-diametri Terræ, et hinc prodeunt parallaxes in latitudinibus graduum 0. 30. 38. 45. 52. 60. 90. quales a Newtono determinantur.



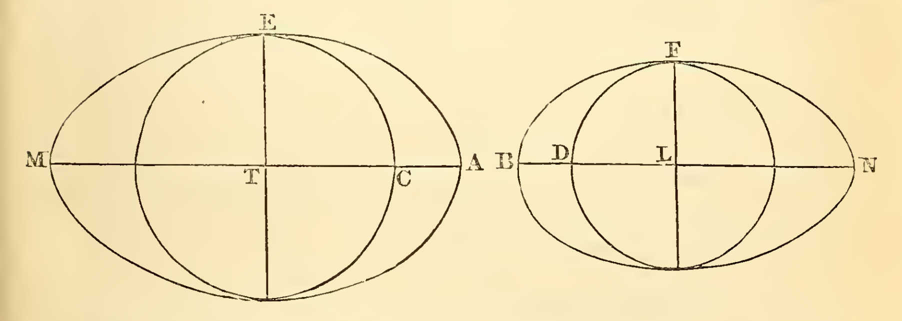
([q]) * *Licebit calculum hunc omnem accuratiùs repetere.* Theoriæ Newtoni de Fluxu et Refluxu Maris plurima hic potuissemus adjungere, quorum ope calculos accuratiùs repetere licuisset. Verùm materiam exhauriunt elegantissimæ Dissertationes quas Vol. III. addidimus.

([r]) * *Ut gravitas acceleratrix.* Sit T, globus Terræ fluido satis profundo E A, co-opertus, sitque L, globus Lunæ co-opertus fluido F B. Si gravitas acceleratrix Terræ in Lunam æqualis esset gravitati acceleratrici Lunæ in Terram, hoc est si æqualis esset materiæ quantitas in Lunâ et in Terrâ, globi duo T, L, sese componerent in figuras sphæroidicas similes quarum axes M A, B N, jacerent in directum (106). Cùm enim omnia hinc inde ponantur æqualia præter ipsam molem, nulla est ratio cur figuræ illæ non sint

acceleratricem Terræ in Lunam, et diameter Lunæ ad diametrum Terræ conjunctim; id est, ut 39. 788 ad 1 et 100 ad 365 conjunctim, seu 1081 ad 100. Unde cùm mare nostrum vi Lunæ attollatur ad pedes $8\frac{3}{5}$, fluidum lunare vi Terræ attolli deberet ad pedes 93. Eâque de causâ figura Lunæ sphærois esset, cujus maxima diameter producta transiret per centrum Terræ, et superaret diametros perpendiculares excessu pedum 186. Talem igitur figuram Luna affectat, eamque sub initio induere debuit. Q. e. i.

Corol. (s) Inde verò fit ut eadem semper Lunæ facies in Terram obvertatur. In alio enim situ corpus lunare quiescere non potest, sed ad hunc

inter se similes, alteraque in acutiorem sphæroidem desinat. Quare in casu præsenti, erit B L ad L F, ut T A ad T E, et vicissim B D ad A C sicut L F ad T E, hoc est, si æqualis esset gra-



vitas acceleratrix Terræ in Lunam atque Lunæ in Terram, altitudo fluidi lunaris in partibus proximis et remotissimis suprà globum Lunæ, esset ad altitudinem fluidi terrestris analogam suprà globum Terræ ut diameter Lunæ ad diametrum Terræ. Rursùs, si Terra et Luna æquales habeant diametros, erunt altitudines fluidi suprà globos ut gravitates acceleratrices respectivè (Prop. LXXIV. Lib. I.) Quarè si neque gravitas acceleratrix in Lunam æqualis sit gravitatis acceleratrici Lunæ in Terram, nec diameter Lunæ diametro Terræ æqualis, vis Terræ ad elevandum fluidum in partibus citimis et ultimis erit ad vim ipsam Lunæ quæ mare nostrum in partibus et sub Lunâ et Lunæ oppositis attollitur, ut gravitas acceleratrix Lunæ in Terram ad gravitatem acceleratricem Terræ in Lunam, et diameter Lunæ ad diametrum Terræ conjunctim, sive ut massa Lunæ quæ gravitati acceleratrici est proportionalis ad massam Terræ quæ itidem gravitati ejus acceleratrici est proportionalis, et ut diameter Lunæ ad diametrum Terræ conjunctim. De figurâ corporis Lunæ nova quàm plurima atque eximia habentur in Dissertationibus de Fluxu et Refluxu Maris.

(s) * *Inde verò fit.* Quoniam maxima diameter Lunæ versùs centrum Terræ dirigitur (ex dem.) hinc fit ut eadem semper Lunæ facies in Terram obvertatur. Positâ autem sphæroidicâ Lunæ figurâ, inter varias Lunæ partes non dabitur æquilibrium, nisi sphærois Lunæ axem suum Telluri obvertat (109); quare in alio situ corpus lunare quiescere non potest, sed ad hunc situm oscillando semper redibit. Attamen oscillationes, ob parvitatem virium in minimo scilicet axis majoris suprà minorem excessu, essent longè tardissimæ, adeò ut non turbetur lunaris motûs circà axem æquabilitas, ideóque (per not. in Prop. XVII.) facies illa quæ Terram semper respicere deberet, possit alterum orbis lunaris umbilicum respicere, neque statim abinde retrahi et in Terram converti.

124. Clariss. D. de Mairan in elegantissimâ Dissertatione de Motu Diurno Telluris circa Axem, quæ legitur in Monum. Paris. an. 1729. exponit admodum ingeniosè prout semper facit, cur eadem Lunæ facies in Terram continuò obvertatur, variasque explicat inæqualitates librationis lunaris in longitudinem. Conjecturam facit vir doctissimus, homogeneam non esse Lunæ materiam, sed hemispherium inferius superiori gravius supponit; quo posito facile demonstrat Lunam respectu Telluris in situ constanti manere. Observat deinde fieri non posse ut constans maneat Lunæ positio, nisi constans quoque sit velocitas fluidi in quo Lunam ipsam deferri assumit. Sed in omni orbitâ ellipticâ

situm oscillando semper redibit. Attamen oscillationes, ob parvitatem virium agitantium essent longè tardissimæ: adeò ut facies illa, quæ Terram semper respicere deberet, possit alterum orbis lunaris umbilicum (ob rationem in Prop. XVII. allatam) respicere, neque statim abinde retrahi et in Terram converti.

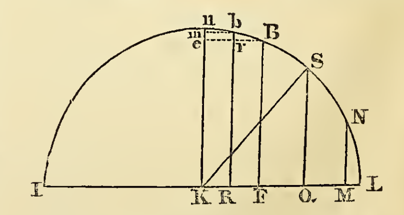
LEMMA I.

Si A P E P p *Terram designet uniformiter densam, centroque* C *et polis* P, p *et æquatore* A E *delineatam; et si centro* C *radio* C P *describi intelligatur sphæra* P a p e; *sit autem* Q R *planum, cui recta a centro Solis ad centrum Terræ ducta normaliter insistit; et Terræ totius exterioris* P a p A P e p E, *quæ sphæra modò descriptâ altior est, particulæ singulæ conentur recedere hinc inde a plano* Q R, *sitque conatus particulæ cujusque ut ejusdem distantia a plano: dico primò, quod tota particularum omnium in æquatoris circulo* A E, *extra globum uniformiter per totum circuitum in morem annuli dispositarum, vis et efficacia ad Terram circum centrum ejus rotandam, sit ad totam particularum totidem in æquatoris puncto* A, *quod a plano* Q R *maximè distat, consistentium vim et efficaciam, ad Terram consimili motu circulari circum centrum ejus movendam, ut unum ad duo. Et motus iste circularis circum axem, in communi sectione æquatoris et plani* Q R *jacentem, peragetur.*

Nam centro K diametro I L describatur semi-circulus I N L. Dividi intelligatur semi-circumferentia I N L in partes innumeras æquales, et a partibus singulis N ad diametrum I L demittantur sinus N M. ([t]) Et

vel excentricâ qualis est orbita Lunæ, variabiles sunt hujusce fluidi velocitates, quarè Luna in eodem situ consistere non potest, sed oscillationes quasdam in longitudinem patitur; ex quibus fiet ut modò nobis detegatur aliqua pars hemispherii quod occultum esse solet, modò autem nobis abscondatur aliqua pars hemispherii quod solet esse conspicuum, idque magis vel minus contingere debet pro majori vel minori inæqualitate velocitatum fluidi. Hâc ratione explicari poterit cur lunaris librationis quantitas in longitudinem major aliquando ab astronomis observatur quàm ex Prop. XVII. Lib. hujus, prodire debet. Verùm tota hæc explicatio ad rem nostram et Newtonianum systema accommodabitur, si vorticum loco substituatur attractio, quemadmodum a clariss. Daniele Bernoullio factum est, cujus eximiam Dissertationem de Fluxu et Refluxu Maris Cap. III. consulat lector.

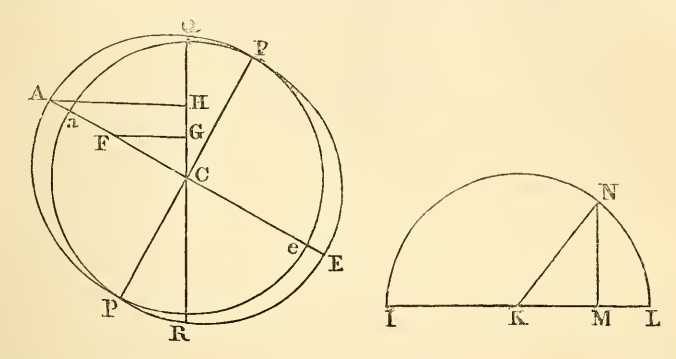
([t]) 125. * *Et summa quadratorum.* Divisa intelligatur semi-circumferentia I N L, in particulas æquales innumeras n b, N L, N S, b B, &c. erectisque sinibus b R, N M, &c. erit sinus b m, seu K R, æqualis sinui N M, et ità de cæteris (Prop. XXVI. Lib. III. Elem.). Quarè sinus omnes ut K R, K F, æquales erunt sinibus ut N M, S Q, ac proindè summa quadratorum ex sinibus omnibus N M, æqualis erit



summæ quadratorum ex sinibus omnibus K M. Præterea quadratum semi-diametri K N. æquale est quadratis sinuum K M, M N. Quarè (ob summam quadratorum K M, æqualem summæ quadratorum N M,) summa quadratorum ex omnibus semi-diametris K N, dupla est summæ

summa quadratorum ex sinibus omnibus N M æqualis erit summæ quadratorum ex sinibus K M, et summa utraque æqualis erit summæ quadratorum ex totidem semi-diametris K N; ideóque summa quadratorum ex omnibus N M erit duplo minor quàm summa quadratorum ex totidem semi-diametris K N.

Jam dividatur perimeter circuli A E in particulas totidem æquales, et ab earum unaquaque F ad planum Q R demittatur perpendiculum F G,



ut et a puncto A perpendiculum A H. Et vis, quâ particula F recedit a plano Q R, erit ut perpendiculum illud F G per hypothesin, et hæc vis ducta in distantiam C G (u) erit efficacia particulæ F ad Terram circum centrum ejus convertendam. Ideóque efficacia particulæ in loco F, erit ad efficaciam particulæ in loco A, ut F G × G C ad A H × H C, (x) hoc est, ut F C q ad A C q; et propterea efficacia tota particularum omnium in locis suis F erit ad efficaciam particularum totidem in loco A, ut summa omnium F C q ad summam totidem A C q, hoc est (per (y) jam demonstrata) ut unum ad duo. Q. e. d.

Et quoniam particulæ agunt recedendo perpendiculariter a plano Q R, idque æqualiter ab utrâque parte hujus plani: eædem convertent circumferentiam circuli æquatoris, eique inhærentem Terram, circum axem tam in plano illo Q R quàm in plano æquatoris jacentem.

LEMMA II.

Iisdem positis: dico secundò quod vis et efficacia tota particularum omnium extra globum undique sitarum, ad Terram circum axem eundem rotandam, sit ad vim totam particularum totidem, in æquatoris circulo A E unifor-

quadratorum ex omnibus sinibus N M, ideóque summa quadratorum ex omnibus N M, erit duplo minor quàm summa quadratorum ex totidem semi-diametris K N.

(u) * *Erit efficacia.* (47. Lib. I.)

(x) * *Hoc est,* ob triangula A C H, F C G, similia.

(y) * *Per jam demonstrata.* (150.)

miter per totum circuitum in morem annuli dispositarum, ad Terram consimili motu circulari movendam, ut duo ad quinque.

Sit enim I K circulus quilibet minor æquatori A E parallelus; sintque L, l particulæ duæ quævis æquales in hoc circulo extra globum P a p e sitæ. Et si in planum Q R, (z) quod radio in Solem ducto perpendiculare est, demittantur perpendicula L M, l m: vires totæ, quibus particulæ illæ fugiunt planum Q R, (a) proportionales erunt perpendiculis illis L M, l m. Sit autem recta L l plano P a p e parallela et bisecetur eadem in X, et per punctum X agatur N n, quæ parallela sit plano Q R et perpendiculis L M, l m occurrat in N ac n, et in planum Q R demittatur perpendiculum X Y. (b) Et particularum L et l vires contrariæ, ad Terram in contrarias partes rotandam, sunt ut L M × M C et l m × m C, hoc est, ut L N × M C + N M × M C et l n × m C — n m × m C; seu L N × M C + N M × M C (c) et L N × m C — N M × m C: et harum differentia L N × M m — N M × $\overline{\text{M C} + \text{m C}}$ est vis particularum ambarum simul sumptarum ad Terram rotandam. Hujus differentiæ pars affirmativa L N × M m (d) seu 2 L N × N X est ad particularum duarum ejusdem magnitudinis in A consistentium vim 2 A H × H C, (e) ut L X q ad A C q. Et pars negativa N M × $\overline{\text{M C} + \text{m C}}$ seu 2 X Y × C Y ad particularum earumdem in A consistentium vim 2 A H × H C, ut C X q ad A C q. Ac proinde partium differentia, id est, particularum duarum L et l simul sumptarum vis ad Terram rotandam est ad vim particularum duarum iisdem æqualium et in loco A consistentium ad Terram itidem rotandam, ut L X q — C X q ad A C q. Sed si circuli I K circumferentia I K dividatur in particulas innumeras æquales L, erunt omnes L X q ad totidem I X q ut 1 ad 2 (per Lem. I.) atque ad totidem A C q, ut I X q ad 2 A C q; et totidem C X q ad totidem A C q ut 2 C X q ad 2 A C q. Quare vires conjunctæ particularum omnium in circuitu circuli I K sunt ad vires conjunctas particularum totidem in loco A,

(z) * *Quod radio in Solem ducto.* (Per hyp. Lem. I.)

(a) * *Proportionales erunt.* (Per hypothes. ejusdem Lem.)

(b) * *Et particularum L et l.* (Ex dem. in Lem præced.)

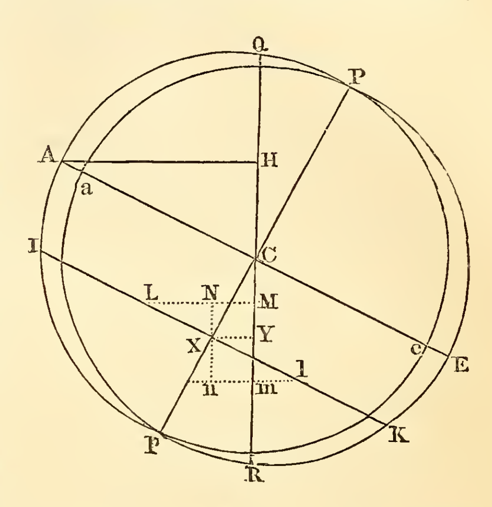
(c) * *Et L N × m C — N M × m C.* Nam ob similitudinem triangulorum L N : N M = l n : n m, sed est N M = n m; quare L N = l n, ideóque l n × m C — n m × m C = L N × m C — N M × m C et ob m C = m M + M C, erit virium illarum differentia = L N × M m — N M × $\overline{\text{M C} + \text{m C}}$.

(d) * *Seu 2 L N × N X.* Nam, ob similitudinem triangulorum, est N X = n X, ideóque N n seu M m = 2 N X, ac proinde L N × M m = 2 L N × N X.

(e) * *Ut L X q ad A C q.* Est enim L N : A H = L X : A C et N X : H C = L X : A C, ideóque per compositionem rationum L N × N X : A H × H C = L X q : A C q. Simili argumento patet partem negativam esse ad vim particularum earumdem in A consistentium ut C X q ad A C q.

ut I X q — 2 C X q ad 2 A C q: et propterea (per Lem. I.) ad vires conjunctas particularum totidem in circuitu circuli A E, ut I X q — 2 C X q ad A C q.

Jam verò si sphæræ diameter P p dividatur in partes innumeras æquales, quibus insistant circuli totidem I K; (f) materia in perimetro circuli cujusque I K erit ut I X q: ideóque vis materiæ illius ad Terram rotandam, erit ut I X q in I X q — 2 C X q. Et vis materiæ ejusdem, si in circuli A E perimetro consisteret, esset ut I X q in A C q. Et propterea vis particularum omnium materiæ totius, extra globum in perimetris circulorum omnium consistentis, est ad vim particularum totidem in perimetro circuli maximi A E consistentis, ut omnia I X q in I X q — 2 C X q ad totidem I X q in A C q, (g) hoc est, ut omnia A C q — C X q in A C q — 3 C X q ad totidem A C q — C X q in A C q, id est, ut omnia A C q q — 4 A C q × C X q + 3 C X q q ad totidem A C q q — A C q × C X q, hoc est, ut tota quantitas fluens, cujus fluxio est A C q q — 4 A C q × C X q + 3 C X q q, ad totam quantitatem fluentem, cujus fluxio est A C q q — A C q × C X q; (h) ac proinde per methodum fluxionum, ut A C q q × C X — $\frac{4}{3}$ A C q × C X cub. + $\frac{3}{5}$ C X q c ad A C q q × C X — $\frac{1}{3}$ A C q × C X cub. id est, si pro C X scribatur tota C p vel A C, ut $\frac{4}{15}$ A C q c ad $\frac{2}{3}$ A C q c, hoc est, ut duo ad quinque. Q. e. d.



(f) * *Materia in perimetro circuli.* Sunt enim zonæ sphæricæ similes ut quadrata radiorum.

(g) *Hoc est, ut omnia, &c.* Nam ex centro C, ad punctum I, ducta intelligatur recta C I, erit I X ^{2} = C I ^{2} — C X ^{2}: sed est C I = A C, quare I X ^{2} = A C ^{2} — C X ^{2}, ac proinde I X q in (I X q — 2 C X q) = A C q — C X q in A C q — 3 C X q.

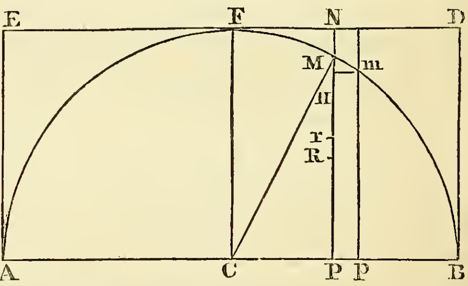
(h) * *Ac proindè per methodum fluxionum.* Quantitates A C q q — 4 A C q × C X q + 3 C X q q et A C q q — A C q × C X q, concipiantur multiplicatæ per fluxionem rectæ C X, sumptisque fluentibus, erit fluens prioris quantitatis A C q q × C X — $\frac{4}{3}$ A C q × C X cub. + $\frac{3}{5}$ C X q cub. fluens autem posterioris quantitatis fiet A C q q × C X — $\frac{1}{3}$ A C q × C X cub. et ut habeatur efficacia tota, pro C X scribatur C p vel A C, erit fluens prior ad posteriorem ut $\frac{4}{15}$ A C q. cub. ad $\frac{2}{3}$ A C q. cub.

(i) LEMMA III.

Iisdem positis: dico tertiò quod motus Terræ totius circum axem jam ante descriptum, ex motibus particularum omnium compositus, erit ad motum annuli prædicti circum axem eundem in ratione, quæ componitur ex ratione materiæ in Terrâ ad materiam in annulo, et ratione trium quadratorum ex arcu quadrantali circuli cujuscunque ad duo quadrata ex diametro; id est, in ratione materiæ ad materiam et numeri 925275 *ad numerum* 1000000.

Est enim motus cylindri circum axem suum immotum revolventis ad motum sphæræ inscriptæ et simul revolventis, ut quælibet quatuor æqualia

(i) 126. * *Lemma* demonstratur. Revolutione semi-circuli A F B, et rectanguli eidem circumscripti A E D B, describantur sphæra et cylindrus circumscriptus. Sit radius C B = 1, peripheria circuli hoc ratio descripti = n, abscissa C P = x, ordinata P M = y, quælibet ipsius pars P R = v, R r = d v; peripheria circuli radio P R, descripti = n v, annulus circularis ex revolutione lineolæ R r = n v d v, velocitas puncti R = v, motus annuli prædicti = $n v^2 d v$, motus totius circuli radio P R, descripti = $\frac{1}{3} n v^3$, motus circuli radio P M, descripti = $\frac{1}{3} n y^3$, motus circuli radio P N descripti = $\frac{1}{3}$ n, motus cylindri totius = $\frac{2}{3}$ n.



Sit P p = d x motus annuli solidi revolutione figuræ P M m p descripti = $\frac{1}{3} n y^3 d x = \frac{1}{3} n\, d x \times (1 - x x)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} n\, d x \times (1 - x x)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} n x^2 d x \times (1 - x x)^{\frac{1}{2}}$. Undè motus solidi revolutione figuræ C F M P, descripti = $\frac{1}{4} n \int d x\, (1 - x x)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{12} n x (1 - x x)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{14} n \times$ C F M B $= \frac{1}{32}$ n n, adeóque motus sphæræ totius = $\frac{1}{16}$ n n. Est igitur motus cylindri ad motum sphæræ ut $\frac{2}{3}$ n ad 16 n n, seu ut 16 ad $\frac{3}{2}$ n, hoc est, ut quælibet quatuor æqualia quadrata ad tres ex circulis sibi inscriptis; nam quadratum diametri 2 est 4 et 4 × 4 = 16, circulus verò cujus diameter 2, et peripheria n, est $\frac{1}{2}$ n et tres hujusmodi circuli sunt $\frac{3}{2}$ n.

Materia annuli tenuissimi sphæram et cylindrum ad communem eorum contactum F ambientis sit m, et velocitas erit ut C F, sive ut 1; adeóque motus = m, et proindè motus cylindri ad motum annuli illius est $\frac{2}{3}$ n ad m, sive ut 2 n ad 3 m, hoc est, ut duplum materiæ in cylindro ad triplum materiæ in annulo; basis enim cylindri est circulus $\frac{1}{2}$ n et altitudo diameter A F = 2, ideóque cylindrus = n. Prædicti annuli materia sit a a n, ideóque motus ipsius circà axem cylindri = a a n. Revolvatur jam idem annulus circà proprium axem quem exhibeat diameter A B; et particula materiæ annuli respondens arcui infinitesimo M m, erit $a^2 \times$ M m et hujus motus $a^2 y \times$ M m $= a^2 d x$, ob proportionem M m : m H (d x) = C M (1) : P M (y). Quarè motus partis F M, annuli est $a^2 x$, et factâ x = 1, motus quadrantis annuli = a^2 est motus totius annuli circà proprium axem = $4 a^2$. Est igitur motus annuli circà axem cylindri ad ejusdem motum circà axem proprium ut a a n, ad 4 a a, seu ut n ad 4, hoc est, ut circumferentia circuli n, ad duplum diametri 4. Quamobrem motus cylindri est ad

motum sphæræ ut - - - 16 ad $\frac{3}{2}$ n
motus annuli circà axem cylindri est ad motum cylindri ut - m ad $\frac{2}{3}$ n
et motus annuli circà axem proprium est ad ejus motum circà axem cylindri ut - - 4 ad n.

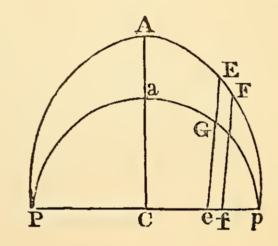
quadrata ad tres ex circulis sibi inscriptis: et motus cylindri ad motum annuli tenuissimi, sphæram et cylindrum ad communem eorum contactum ambientis, ut duplum materiæ in cylindro ad triplum materiæ in annulo; et annuli motus iste circum axem cylindri uniformiter continuatus, ad ejusdem motum uniformem circum diametrum propriam, eodem tempore periodico factum, ut circumferentia circuli ad duplum diametri.

HYPOTHESIS II.

Si annulus prædictus Terrâ omni reliquâ sublatâ, solus in orbe Terræ, motu annuo circa Solem ferretur, et interea circa axem suum ad planum eclipticæ in angulo gradium $23\frac{1}{2}$ inclinatum, motu diurno revolveretur: idem foret motus punctorum æquinoctialium, sive annulus iste fluidus esset, sive is ex materiâ rigidâ et firmâ constaret.

Quarè, per compositionem rationum et ex æquo, motus sphæræ circà axem proprium est ad motum annuli ut n^3 ad $64\,m$. Est autem n^3 ad $64\,m$ ut $\frac{2n}{3} \times \frac{3n^2}{16}$ ad $8 \times m$, sed $\frac{2n}{3}$, est quantitas materiæ in Terrâ; m, quantitas materiæ in annulo $\frac{3n^2}{16}$ est summa trium quadratorum ex arcu quadrantali circuli A F B, et 8 est summa duorum quadratorum ex diametro A B. Quare motus Terræ totius circum axem jam ante descriptum, ex motibus particularum omnium compositus, erit ad motum annuli prædicti circum axem eundem, in ratione quæ componitur ex ratione materiæ in Terrâ ad materiam in annulo, et ratione trium quadratorum ex arcu quadrantali circuli cujuscumque ad duo quadrata ex diametro, id est, in ratione materiæ ad materiam et numeri 925275 ad numerum 1000000, positâ ratione diametri ad peripheriam ut 1 ad 3.141 quamproximè. Q. e. d.

127. *Lemma.* Semi-axe majori C A et minori C P, describatur semi-ellipsis P A p, atque radio C P, describatur semi-circulus P a p, circà axem P p revolvi concipiantur tum semi-circulus tum semi-ellipsis, erit sphæra motu semi-circuli genita ad sphæroidem semi-ellipseos revolutione descriptam ut $C\,a^2$ ad $C\,A^2$. Sit $p\,e = x$, $G\,e = y$, $C\,p = r$, $C\,A = a$, exprimatque $\frac{r}{p}$ rationem radii ad peripheriam, erit $\frac{p\,y}{r}$, peripheria circuli radio G e descripti. Prætereà (ex naturâ ellipseos 248. Lib. I.) C a (r) : C A (a) = G e (y) : E e, ideóque $E\,e = \frac{a\,y}{r}$, hinc peripheria circuli radio E e descripti $= \frac{p\,a\,y}{r\,r}$, ejusdemque circuli area $= \frac{p\,a^2\,y^2}{2\,r^3}$; area autem circuli radio G e descripti est $\frac{p\,y^2}{2\,r}$. Quarè fluxio sphæroidis fit $\frac{p\,a^2\,y^2\,d\,x}{2\,r^3}$, et fluxio sphæræ est $\frac{p\,y^2\,d\,x}{2\,r}$. Sed (ex naturâ circuli) $y^2 = 2\,r\,x - x\,x$; hinc fluxio sphæroidis est $\frac{2\,p\,a^2\,r\,x\,d\,x - p\,a^2\,x^2\,d\,x}{2\,r^3}$, et fluxio sphæræ $\frac{2\,p\,r\,x\,d\,x - p\,x\,x\,d\,x}{2\,r}$, sumptisque fluentibus, erit fluens prima ad alteram ut $\frac{p\,a^2\,r\,x^2}{r^3} - \frac{p\,a^2\,x^3}{6\,r^3}$ ad $\frac{p\,r\,x^2}{2\,r} - \frac{p\,x^3}{6\,r}$. Jam loco x, substituatur 2 r, erit sphærois tota, ad totam sphæram ut $\frac{4\,p\,a^2\,r^3}{r^3} - \frac{8\,p\,a^2\,r^3}{6\,r^3}$ ad $\frac{2\,p\,r^3}{r} - \frac{8\,p\,r^3}{6\,r}$, hoc est, ut a^2, ad r^2, sivè in ratione



duplicatâ $C\,A^2$ ad $C\,a^2$. Simili argumento patet sphæram ellipseos semi-axe majori tanquam radio descriptam esse ad ellipsoidem in ratione duplicatâ semi-axis majoris ad minorem.

PROPOSITIO XXXIX. PROBLEMA XX.

Invenire præcessionem æquinoctiorum.

Motus mediocris horarius nodorum Lunæ in orbe circulari, ubi nodi sunt in quadraturis, erit $16''. 35'''. 16^{iv}. 36^{v}$. et hujus dimidium $8''. 17'''. 38^{iv}. 18^{v}$. (ob rationes supra explicatas) est motus medius horarius nodorum in tali orbe; fitque anno toto sidereo $20^{gr}. 11'. 46''$. Quoniam igitur nodi Lunæ in tali orbe conficerent annuatim $20^{gr}. 11 . 46''$. in antecedentia; et si plures essent Lunæ motus, nodorum cujusque (per Corol. 16. Prop. LXVI. Lib. I.) forent ut tempora periodica; si Luna spatio diei siderei juxta superficiem Terræ revolveretur, motus annuus nodorum foret ad $20^{gr}. 11'. 46''$. ut dies sidereus horarum 23. 56'. ad tempus periodicum Lunæ dierum 27.7 hor. 43'; id est, ut 1436 ad 39343. Et par est ratio nodorum annuli Lunarum Terram ambientis; sive Lunæ illæ se mutuo non contingant, sive liquescant et in annulum continuum formentur, sive denique annulus ille rigescat et inflexibilis reddatur.

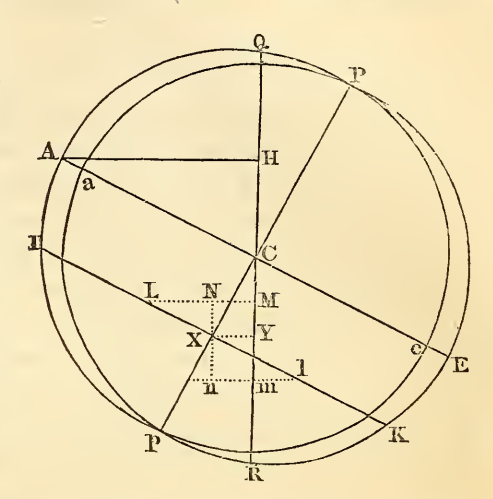
Fingamus igitur quod annulus iste, quoad quantitatem materiæ, æqualis sit Terræ omni P a p A P e p E quæ globo P a p e superior est; et quoniam globus iste ad Terram illam superiorem (k) ut a C qu. ad A C qu. — a C qu. id est (cùm Terræ semi-diameter minor P C vel a C sit ad semi-diametrum majorem A C ut 229 ad 230) ut 52441 ad 459; si annulus iste Terram secundùm æquatorem cingeret et uterque simul circa diametrum annuli revolveretur, motus annuli esset ad motum globi interioris (per hujus Lem. III.) ut 459 ad 52441 et 1000000 ad 925275 conjunctim, hoc est, ut 4590 ad 485223, ideóque motus annuli esset ad summam motuum annuli ac globi, ut 4590 ad 489813. Unde si annulus globo adhæreat, et motum suum, quo ipsius nodi seu puncta æquinoctialia regrediuntur, cum globo communicet: (l) motus qui restabit in annulo erit ad ipsius motum priorem, ut 4590 ad 489813; et propterea motus punctorum æquinoctialium diminuetur in eâdem ratione. Erit igitur motus annuus punctorum æquinoctialium corporis ex annulo et globo compositi ad motum $20^{gr}. 11'. 46''$. ut 1436 ad 39343 et 4590 ad 489813 conjunctim, id est, ut 100 ad 292369. Vires autem quibus nodi Lunarum (ut supra explicui) (m) atque ideò quibus puncta æquinoctialia annuli regredi-

(k) * *Ut a C qu. ad A C qu. — a C qu.* Globus iste est ad Terram totam ut a C^2 ad A C^2 (Lem. præced.) ideóque annulus materiæ inter globum et Terram interceptus, hoc est, excessus materiæ in Terrâ suprà materiam in globo est ut A C qu. — a C qu.

(l) * *Motus qui restabit in annulo.* (52. Lib. I.)

(m) * *Atquè ideò.* (Vid. not. 101. Lib. hujus.)

untur (id est vires 3 I T in fig. p. 22. et 24.) sunt in singulis particulis ut distantiæ particularum a plano Q R, et his viribus particulæ illæ planum fugiunt; et propterea (per Lem. II.) si materia annuli per totam globi superficiem in morem figuræ P a p A P e p E ad superiorem illam Terræ partem constituendam spargeretur, vis et efficacia tota particularum omnium ad Terram circa quamvis æquatoris diametrum rotandam, atque ideò ad movenda puncta æquinoctialia, evaderet minor quàm prius in ratione 2 ad 5. Ideoque annuus æquinoctiorum regressus jam esset ad 20gr. 11′. 46″. ut 10 ad 73092: ac proinde fieret 9″. 56‴. 50iv.



Cæterum hic motus (n) ob inclinationem æquatoris ad planum eclipticæ minuendus, idque in ratione sinûs 91706 (qui sinus est complementi graduum $23\frac{1}{2}$.) ad radium 100000. Quâ ratione motus iste jam fiet 9″. 7‴. 20iv. Hæc est annua præcessio æquinoctiorum a vi Solis oriunda.

Vis autem Lunæ ad mare movendum erat ad vim Solis, ut 4.4815 ad 1 circiter. (o) Et vis Lunæ ad æquinoctia movenda est ad vim Solis in eâdem proportione. Indeque prodit annua æquinoctiorum præcessio a vi Lunæ oriunda 40″. 52‴. 52iv. ac tota præcessio annua a vi utrâque oriunda 50″. 00‴. 12iv. Et hic motus cum phænomenis congruit. Nam præcessio æquinoctiorum ex observationibus astronomicis est annuatim minutorum secundorum plus minus quinquaginta.

(p) Si altitudo Terræ ad æquatorem superet altitudinem ejus ad polos, milliaribus pluribus quàm $17\frac{1}{6}$, materia ejus rarior erit ad circumferentiam quàm ad centrum: et præcessio æquinoctiorum ob altitudinem illam augeri, ob raritatem diminui debet.

(n) * *Ob inclinationem.* Pro majori vel minori inclinatione plani æquatoris ad planum eclipticæ minorem esse vel majorem regressum æquinoctiorum patet ex not. 101. Lib. hujus. Illud autem decrementum obtinetur, si minuatur motus in ratione sinûs complementi inclinationis ad radium. Sed planum æquatoris inclinatur ad planum eclipticæ gradibus $23\frac{1}{2}$ circiter, quarè cùm motus æquinoctiorum fit tardissimus, satis accurate minuitur motus ille in ratione sinûs 91706. qui sinus est complementi graduum $23\frac{1}{2}$ ad radium 100000.

(o) * *Et vis Lunæ.* (Cor. 18. 19. Lib. I.)

(p) * *Si altitudo Terræ.* Quò enim altior erit materia ad æquatorem, eò levior sit oportet ut materiam quæ est versus polos in æquilibrio possit sustinere. Cæterum quia in tribus non satis laudandis Dissertationibus Vol. III. adjunctis,

Descripsimus jam systema Solis, Terræ, Lunæ, et planetarum: superest ut de cometis nonnulla adjiciantur.

LEMMA IV.

Cometas esse Lunâ superiores et in regione planetarum versari.

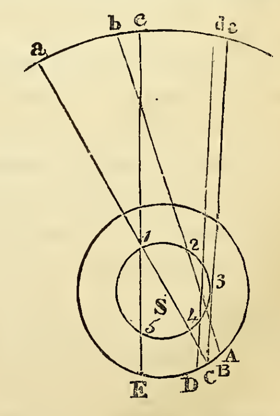
(q) Ut defectus parallaxeos diurnæ extulit cometas supra regiones sublunares, (r) sic ex parallaxi annuâ convincitur eorum descensus in regiones planetarum. Nam cometæ, qui progrediuntur secundum ordinem signorum, sunt omnes sub exitu apparitionis aut solito tardiores aut retrogradi, si Terra est inter ipsos et Solem; at justo celeriores si Terra vergit ad oppositionem. Et contra, qui pergunt contra ordinem signorum sunt justo celeriores in fine apparitionis, si Terra versatur inter ipsos et Solem; et justo tardiores vel retrogradi, si Terra sita est ad contrarias partes. (s) Contingit hoc maximè ex motu Terræ in vario ipsius situ, perinde ut fit in planetis, qui pro motu Terræ vel conspirante vel contrario nunc retrogradi sunt, nunc tardiùs progredi videntur, nunc verò celeriùs. Si Terra pergit ad eandem pârtem cum cometa, et motu angulari circa Solem tantò celeriùs fertur, ut recta per Terram et cometam perpetuo ducta convergat ad partes ultra cometam, cometa e Terrâ spectatus ob motum suum tardiorem apparet esse retrogradus; sin Terra tardius fertur, motus cometæ (detracto motu Terræ) fit saltem tardior. At si Terra pergit in

nova occurrunt quamplurima de figurâ Telluris, de viribus Solis et Lunæ, præcessionem æquinoctiorum, eâdem quâ hactenus factum est, methodo, accuratiùs licebit computare.

(q) * *Ut defectus parallaxeos diurnæ.* Parallaxis diurna cometæ est differentia locorum in quibus cometa ex centro Terræ, vel ex eo superficiei Terræ loco ad quem cometa verticalis est, et ex quovis alio loco superficiei Terræ observatus inter stellas fixas refertur. Hæc parallaxis diurna, maxima est in Lunâ, ubi ea in horizonte constituitur, inde verò magis magisque decrescit quò altius Luna suprà horizontem elevatur. Quia verò hæc parallaxis non observatur in cometis, patet eos esse Lunâ superiores (30.).

(r) * *Sic ex parallaxi annuâ.* Parallaxis annua ex motu circâ Solem oritur, hæcque respicit longitudinem cometæ, hoc est, distantiam ejus in eclipticâ a primo Arietis puncto. Quomodò ex hâc parallaxi Newtonus colligat cometas descendere in regiones planetarum, explicabitur in decursu.

(s) 128. * *Continget hoc maximè.* Sit S, Sol, A B E, orbita Telluris et a b c, sphæra fixarum ad quam planetæ referantur, exhibeatque, 1, 2, 3, 4, planetæ alicujus inferioris orbitam. Moveatur Terra ex A, per B, in C, et intereà planeta ex 1, per 2, in 3, hic planeta ex a, per b, in c, secundum ordinem signorum progredi videbitur. At si Terra moveatur ex C, per D, in E et pla-

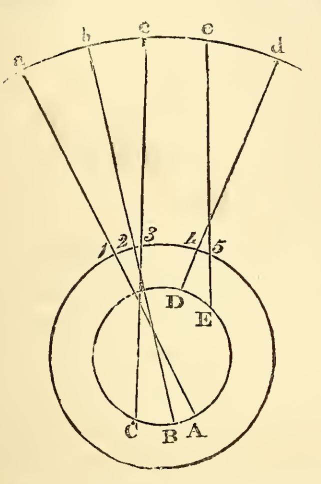


neta ex 3, per 4 in 5, idem planeta per d, in e, retrogredi videbitur.

Jam verò repræsentet 1, 2, 3 orbem planetæ

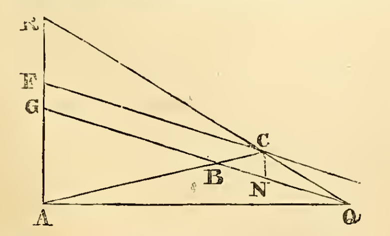
contrarias partes, cometa exinde velocior apparet. Ex acceleratione autem vel retardatione vel motu retrogrado distantia cometæ in hunc modum

superioris, sitque A B C, orbis Terræ. Moveatur Terra ex A, per B, et C in D, planeta



autem superior ex 1 per 2 et 3 in 4, hic planeta secundum ordinem signorum progredi videbitur. At si Terra moveatur ex D in E, planeta verò ex 4 in 5, idem planeta ex loco d in e, retrogredi apparebit. Quia verò planetæ modò in consequentia, modò in antecedentia ferri videntur, necessum est ut modò tardiores, modò celeriores appareant, atque in ipso veluti motuum æquilibrio, neque in consequentia neque in antecedentia sensibiliter pergant, sed quasi stationarii videantur. Hæc itaque planetarum phænomena ex motu Terræ maximè contingunt, oriri tamen possunt etiam aliquantulum ex inæquali planetarum motu.

129. *Lemma.* Datis positione tribus rectis Q A, Q B, Q C, ex eodem puncto Q ductis et in eodem plano jacentibus, ducere rectam A C,

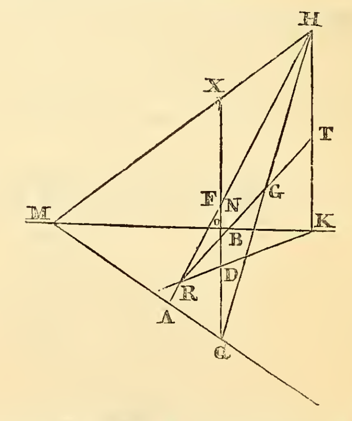


ex puncto quolibet A, ità ut partes A B, C B, sint in datâ ratione m, ad n.

Ex A ducatur utcumque recta A R, rectis Q C, Q B, productis occurrens in G, R, capianturque G F, A G, in datâ ratione m ad n (Prop. XII. Lib. VI. Elem.). Per F, agatur F C parallela rectæ G Q, ipsique Q R occurrens in C, erit juncta A C, recta quæsita. Nam ob parallelas F C, G Q, est A B : B C = A G : G F, sed (per constr.) G F, A G, sunt in datâ ratione m ad n. Quarè eandem inter se rationem habent partes interceptæ A B, B C.

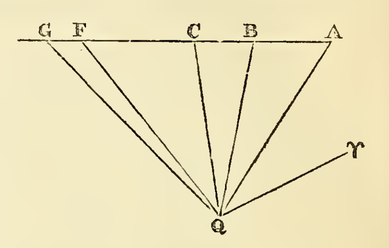
Idem fit trigonometricè. Nam in triangulo A Q G, datur latus A G, et præterea noti sunt anguli A Q G, Q A G, ideóque dabitur A G, ac proindè innotescit etiam G F, datam habens rationem ad A G (per constr.) quare dabitur recta C N æqualis et parallela rectæ G F. Rursus in triangulo Q N C, cognitis angulo C Q N, et angulo C N Q, qui æqualis est angulo F G N, hoc est, anguli priùs inventi A G Q, complemento ad duos rectos, atque insuper dato latere C N, innotescet C Q, tandem in triangulo A C Q, datis lateribus Q A, Q C, et angulo intercepto A Q C, invenientur latus C A atque anguli Q A C, Q C A, id est, magnitudo et positio rectæ A C.

130. *Lemma.* Datis positione quatuor rectis Q A, Q B, R B, R D, in eodem plano jacen-



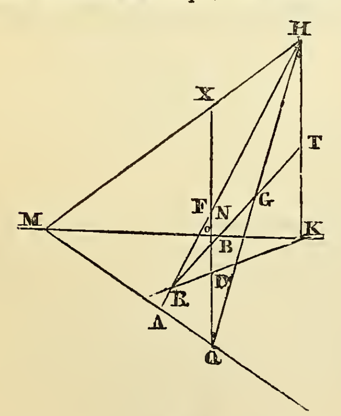
tibus ducere rectam M K, ità ut M O, sit ad O N ut m ad n, et O N ad N K ut n ad r. Capiatur B G, ad B A, sicut n + r ad m. Item capiatur F B ad B D ut m + n ad r. Junctæ rectæ Q G, R F, producantur donec concurrant. Per punctum concursus H, ducatur H K parallela rectæ B D; itemque H M, parallela rectæ R B, erit M K recta quæsita. Nam propter parallelas H M, T N (per constr.) erit K N ad N M, ut K T ad T H. Sed quia H K parallela est rectæ F D, K T est ad T H ut D B ad B F, hoc est, (per constr.) ut r ad m + n, ac proindè K N est ad N M ut r ad m + n. Rursus ob parallelas H K, O X, erit M O ad O K ut M X ad X H, sed quia H M, parallela est rectæ A G, erit M X ad X H ut A B ad B G, id est, (per constr.) ut m ad

colligitur. Sunto ♈ Q A, ♈ Q B, ♈ Q C observatæ tres longitudines cometæ sub initio motûs, sitque ♈ Q F longitudo ultimò observata, ubi cometa videri desinit. ([a]) Agatur recta A B C, cujus partes A B, B C rectis Q A et Q B, Q B et Q C interjectæ, sint ad invicem ut tempora inter observationes tres primas. Producatur A C ad G, ut sit A G ad A B ut tempus inter observationem primam et ultimam ad tempus inter observationem primam et secundam, et jungatur Q G. Et si cometa moveretur uniformiter in



lineâ rectâ, atque Terra vel quiesceret, vel etiam in lineâ rectâ uniformi cum motu progrederetur, foret angulus ♈ Q G longitudo cometæ tempore observationis ultimæ. Angulus igitur F Q G, qui longitudinum differentia est, oritur ab inæqualitate motuum cometæ ac Terræ. Hic autem angulus, si Terra et cometa in contrarias partes moventur, additur angulo ♈ Q G, et sic motum apparentem cometæ velociorem reddit: sin cometa pergit in easdem partes cum Terrâ, eidem subducitur, motumque cometæ vel tardiorem reddit, vel forte retrogradum; ([b]) uti modò exposui. Oritur igitur hic angulus præcipuè ex motu Terræ, et idcirco pro parallaxi cometæ meritò habendus est, neglecto videlicet ejus incremento

n + r. Est igitur M O ad O K ut r ad m + n. Quare, dividendo et ex æquo, tres rectæ M O,

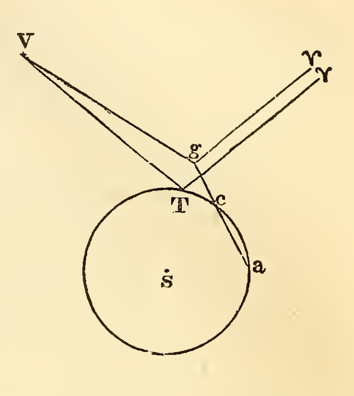


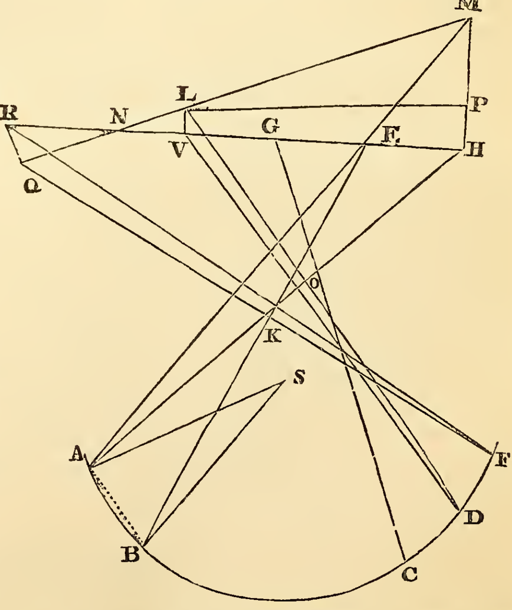
O N, N K, sunt in eâdem ratione cum tribus quantitatibus m, n, r. Idem fit trigonometricè. Nam rectarum quatuor datarum Q A, Q B, R B, R D, dantur intersectiones omnes ac proindè rectæ Q B, D B, R B, B A, R D, sunt magnitudine datæ. Prætereà dantur etiam B F et B G, utpotè habentes datam rationem ad B D et R A. Jam verò in triangulo R B F, datis lateribus B R, B F, cum angulo intercepto R B F, dantur latus R F et angulus R F B ac proindè etiam datur angulus Q F H. Similiter in triangulo Q B G, datis lateribus Q B, B G, et angulo Q B G, dabitur angulus B Q G; quarè in triangulo Q F H, datis duobus angulis Q F H, F Q H, cum latere Q F, quod est summa vel differentia rectarum datarum Q B, Q F innotescet latus Q H. Tandem in triangulo Q H M, dato angulo H Q M qui est summa vel differentia notorum angulorum B Q A, H Q B, datoque angulo Q M H qui æqualis est angulo dato Q A B, simulque noto latere Q H, innotescent latera H M, Q M. Simili prorsus modo invenientur latera R K, H K, in triangulo R K H. Igitur in triangulo M H K, notis lateribus H M, H K, et angulo intercepto M H K, qui æqualis est angulo dato A B Q, innotescent anguli H M K, H K M et basis M K. Datis autem angulis H M Q, H M K, dabitur horum summa vel differentia Q M K, hoc est positio rectæ M K, ob rectam Q M, positione datam. Simili modo rectæ Q O, R N, R K et anguli quos M K cum his rectis efficit, trigonometrice inveniuntur.

([a]) * *Agatur recta A B C.* (129.)

([b]) * *Uti modò exposui.* (128.)

vel decremento nonnullo, quod a cometæ motu inæquabili in orbe proprio oriri possit. Distantia verò cometæ ex hâc parallaxi sic colligitur. Designet S Solem, a c T orbem magnum, a locum Terræ in observatione primâ, c locum Terræ in observatione tertiâ, T locum Terræ in observatione ultimâ, et T ♈ lineam rectam versus principium Arietis ductam. Sumatur angulus ♈ T V æqualis angulo ♈ Q F, hoc est, æqualis longitudini cometæ ubi Terra versatur in T. Jungatur a c, et producatur ea ad g, ut sit a g ad a c ut A G ad A C, et erit g locus quem Terra tempore observationis ultimæ, motu in rectâ a c uniformiter continuato, attingeret. Ideóque si ducatur g ♈ ipsi T ♈ parallela, et capiatur angulus ♈ g V angulo ♈ Q G æqualis, erit hic angulus ♈ g V æqualis longitudini cometæ e loco g spectati; et angulus T V g parallaxis erit, quæ oritur a translatione Terræ de loco g in locum T: ac proinde V locus erit cometæ in plano eclipticæ. (c) Hic autem locus V orbe Jovis inferior esse solet.





(c) 131. * *Hic autem locus V.* Recta H V, referat vestigium cometæ in plano eclipticæ, sintque V, G, E, H, quatuor cometæ loca in plano eclipticæ præcedenti methodo inventa. Sit S, Sol, A B C D, orbis magnus, sintque A, B, C, D, quatuor Terræ loca ad tempora observationum nota. In triangulo A S B, dantur latera S A, S B, daturque angulus A S B, differentia scilicet locorum Terræ e Sole visorum; quarè dabuntur anguli S A B, S B A, notaque erit in partibus semi-diametri orbis magni recta A B, chorda nempè arcûs a Tellure interim percursi. Rursus in triangulo K A B, dantur omnes anguli, nam datur angulus K A B, qui est summa vel differentia notorum angulorum S B A, S B K. Quarè datur ratio laterum A K, A B, sed data est ratio rectarum S A, A B, dabitur itaque ratio S A ad K A. At (131.) nota est ratio inter K O et K H, innotescet igitur ratio inter S A et K H; quarè datur A H, distantia cometæ a Terrâ in partibus semi-diametri orbis magni. Simili plane modo invenientur aliorum locorum distantiæ a Terrâ E, G, V, hic autem locus V, ubi, cometa videri desinit, ex datis observationibus inito computo per methodum expositam, orbe Jovis inferior esse solet.

132. Cometæ vestigium in plano eclipticæ

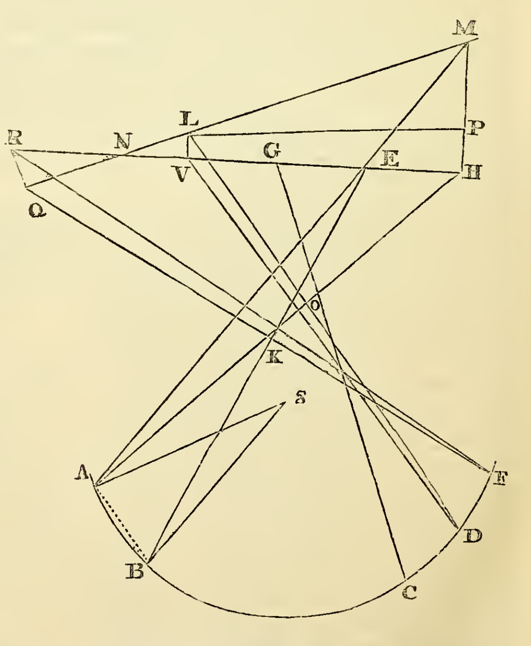
Idem colligitur ex curvaturâ viæ cometarum. ([d]) Pergunt hæc corpora propemodum in circulis maximis quamdiu moventur celerius; at in

jam determinavimus; ut autem veram obtineamus cometæ trajectoriam, ex loco H, ad planum eclipticæ erecta intelligatur normalis H M, tangens anguli latitudinis cometæ ad datum observationis tempus posito A H, radio, eritque M, locus verus cometæ ad tempus datum; est enim positio rectæ A H, ejus longitudo et angulus M A H, latitudo. Similiter in loco V, ad idem eclipticæ planum erigatur normalis V L, æqualis tangenti latitudinis ad idem tempus observatæ, sumpto D V, pro radio, erit L, locus verus cometæ, ideóque juncta recta L M, est ipsa trajectoria quæsita. Patet autem distantiam loci M, ab A, sivè rectam A M, esse ad rectam A H, ut secans latitudinis in H, ad radium, et ità porrò de aliis cometæ locis.

133. Cætera quæ ad motum cometæ pertinent facilè definientur. Invenitur L M, recta scilicet percursa a cometa, dum Tellus ab A ad D movetur. Ducatur enim L P ipsi V H parallela cum rectâ M E concurrens in P. In triangulo P L M, præter angulum rectum in P, datur latus L P, æquale lateri V H, atque etiam datur latus P M, æquale differentiæ rectarum datarum M H, L V, quarè dabitur L M. Producatur M L, donec cum H V, concurrat in N, erit N nodus. Præterea N V erit ad V L, ut V H ad P M, itemque L N ad L V ut L M ad M P, et ideò dabuntur L N, L V; capiatur tempus quod sit ad tempus inter observationem in M, et observationem in L, ut N L ad L M, habebitur tempus inter observationem in L, et appulsum cometæ ad nodum; cùm enim cometa in lineâ rectâ uniformiter moveri supponatur, tempora sunt ut spatia. Dabitur quoque locus cometæ in nodo versantis; cùm enim detur punctum N, et propter tempus cognitum inter observationem in L, et appulsum cometæ ad nodum, detur quoque locus Terræ pro hoc momento, dabitur positio rectæ hæc puncta jungentis, hoc est longitudo cometæ in nodo existentis. Tandem ob datam distantiam nodi a loco V datamque latitudinem cometæ in eodem loco, dantur in triangulo sphærico rectangulo latera duo circà angulum rectum, ac proindè innotescit inclinatio hypothenusæ, id est, semitæ ipsius cometæ ad eclipticam.

134. Ex dictis colligitur quâ ratione ad tempus quodlibet propositum definiri possint locus cometæ e Terrâ visus, illiusque distantia a Terrâ. Determinentur ut suprà vestigium orbitæ in plano eclipticæ H E V R, ipsaque vera cometæ orbita M L N Q. Capiatur H R ad H V, ut spatium inter observationem primam tempusque datum ad spatium inter observationem primam et quartam. Dato Terræ loco ad tempus propositum, putà F, datur positio rectæ F R, ac proindè datur longitudo cometæ quæsita (132). Præterea fiat R Q ad R N, sicut M H ad H N, patet dari latitudinem cometæ ad tempus datum (loc. cit.). His autem datis, obtineri potest distantia cometæ a Terrâ (ibid.) in hâc ergò hypothesi quod cometæ in lineis rectis uniformiter moveantur, determinari possunt præcipua motûs cometarum elementa. Hâc de re consulat lector Opusculum clariss. viri Dominici Cassini de Cometâ an. 1664; Davidis Gregorii Astronomiam Physicam, et Cassini filii Theoriam Cometarum in Monumentis Paris. an. 1727.

([d]) * *Pergunt hæc corpora.* Est et alia parallaxis proveniens ex motu Terræ circà Solem. Hæc latitudinem cometarum respicit, hoc est, distantiam eorum ab eclipticâ versus



boream aut austrum, undè fit ut cometæ in sphærâ fixarum a cursu circulari deflectere et lineam admodum irregularem videantur describere. Cùm enim planum in quo cometa movetur, cum plano eclipticæ in quo Terra fertur, non coincidat, cometa modò suprà eclipticam in septentrionem ascendit, modò infrà eclipticam in

fine cursûs, ubi motûs apparentis pars illa, quæ a parallaxi oritur, majorem habet proportionem ad motum totum apparentem, deflectere solent ab his circulis, et quoties Terra movetur in unam partem, abire in partem contrariam. Oritur hæc deflexio maximè ex parallaxi, propterea quod respondet motui Terræ; et insignis ejus quantitas, meo computo, collocavit disparentes cometas satis longe infra Jovem. Unde consequens est quod in perigæis et periheliis, ubi propiùs adsunt, descendunt sæpius infra orbes Martis et inferiorum planetarum.

Confirmatur etiam propinquitas cometarum (e) ex luce capitum. Nam corporis cœlestis a Sole illustrati et in regiones longinquas abeuntis, diminuitur splendor in quadruplicatâ ratione distantiæ: in duplicatâ ratione videlicet ob auctam corporis distantiam a Sole, et in aliâ duplicatâ ratione ob diminutam diametrum apparentem. Unde si detur et lucis quantitas et apparens diameter cometæ, dabitur distantia, dicendo quod distantia sit ad distantiam planetæ, in ratione diametri ad diametrum directè et ratione duplicatâ lucis ad lucem inversè. Sic minima capillitii cometæ anni 1682 diameter, per tubum opticum sexdecim pedum a Flamstedio observata et micrometro mensurata, æquabat 2'. 0"; nucleus autem seu stella in medio capitis vix decimam partem latitudinis hujus occupabat, ideóque lata erat tantum 11". vel 12". Luce verò et claritate capitis superabat caput cometæ anni 1680, stellasque primæ vel secundæ magnitudinis æmulabatur. Ponamus Saturnum cum annulo suo quasi quadruplo lucidiorem fuisse: et quoniam lux annuli propemodum æquabat lucem globi intermedii, et diameter apparens globi sit quasi 21". ideóque lux globi et an-

austrum descendit. Quia tamen in eodem plano semper incedit, orbem circularem, Tellure quiescente, videretur describere, sed quoniam Tellus ipsa movetur in plano eclipticæ, cometa pro diversis Terræ locis observatus, modò versùs boream altius ascendere, modò versùs austrum inferius descendere apparebit. Observationibus compertum est cometas propèmodum in circulis maximis pergere, quandiu moventur celerius, at in fine cursûs deflectere solent ab his circulis; hæc autem deflexio pendet ex ipsâ trajectoriæ cometarum curvaturâ de quâ infra. Quarè deinceps trademus normam computi quo Newtonus disparentes cometas satis longè infrà Jovem collocavit, nonnullaque afferemus exempla cometarum qui infrà orbes Martis et inferiorum planetarum descenderunt.

(e) 135. * *Ex luce capitum.* Intelligantur duæ superficies sphæricæ concentricæ, minor una, major altera, et in centro utriusque constitutum fingatur corpus aliquod lucidum. Quoniam corpus illud radios suos per omnem circuitum diffundit, evidens est eandem radiorum quantitatem in concavâ superficie utriusque sphæræ contineri, ideóque densitates radiorum erunt in ratione superficierum sphæricarum inversè, hoc est, in ratione duplicatâ semi-diametrorum sive distantiarum a corpore lucido inversè (14. Lib. I.). Quare nullâ distantiarum habitâ ratione, sensatio quæ a radiis nervos opticos percutientibus excitatur, est ut quadratum distantiæ inversè. Sed quò remotius est lucidum, eo pauciores radii ad oculum perveniunt, idque in duplicatâ ratione distantiarum (loco suprà cit.) hoc est, in duplicatâ ratione diametri apparentis diminutæ. Quarè, componendo, corporis cœlestis a Sole illustrati et in regiones longinquas abeuntis diminuitur splendor in ratione quadruplicatâ distantiæ. Erit itaque quadratum distantiæ cometæ a Sole ad quadratum distantiæ planetæ ab eodem in ratione compositâ ex duplicatâ ratione diametri apparentis cometæ ad diametrum apparentem planetæ et ratione lucis planetæ ad lucem cometæ. Undè distantia cometæ a Sole est ad distantiam planetæ ab eodem in ratione compositâ ex ratione diametri apparentis cometæ ad diametrum apparentem planetæ et ratione subduplicatâ lucis planetæ ad lucem cometæ.

nuli conjunctim æquaret lucem globi, cujus diameter esset 30″: erit distantia cometæ ad distantiam Saturni ut 1 ad $\surd$ 4 inversè, et 12″. ad 30″. directè, id est, ut 24 ad 30 seu 4 ad 5. Rursus cometa anni 1665 mense Aprili, ut auctor est Hevelius, claritate suâ pene fixas omnes superabat, quinetiam ipsum Saturnum ratione coloris videlicet longè vividioris. Quippe lucidior erat hic cometa altero illo, qui in fine anni præcedentis apparuerat, et cum stellis primæ magnitudinis conferebatur. Latitudo capillitii erat quasi 6′. at nucleus cum planetis ope tubi optici collatus plane minor erat Jove, et nunc minor corpore intermedio Saturni, nunc ipsi æqualis judicabatur. Porrò cùm diameter capillitii cometarum raro superet 8′. vel 12′, diameter verò nuclei, seu stellæ centralis sit quasi decima vel forte decima quinta pars diametri capillitii, patet stellas hasce ut plurimùm ejusdem esse apparentis magnitudinis cum planetis. Unde cùm lux earum cum luce Saturni non raro conferri possit, eamque aliquando superet, manifestum est, quod cometæ omnes in periheliis vel infrà Saturnum collocandi sint, vel non longè suprà. Errant igitur toto cœlo, qui cometas in regionem fixarum prope ablegant: quâ certe ratione non magis illustrari deberent a Sole nostro, quàm planetæ, qui hic sunt, illustrantur a stellis fixis.

Hæc disputavimus non considerando obscurationem cometarum per fumum illum maximè copiosum et crassum, quo caput circundatur, quasi per nubem obtusè semper lucens. Nam quanto obscurius redditur corpus per hunc fumum, tantò propius ad Solem accedat necesse est, ut copia lucis a se reflexæ planetas æmuletur. Inde verisimile fit cometas longè infra sphæram Saturni descendere, uti ex parallaxi probavimus. Idem verò quam maximè confirmatur ex caudis. ([f]) Hæ vel ex reflexione fumi sparsi per æthera, vel ex luce capitis oriuntur. Priore casu minuenda est distantia cometarum, ne fumus a capite semper ortus per spatia nimis ampla incredibili cum velocitate et expansione propagetur. In posteriore referenda est lux omnis tam caudæ quàm capillitii ad nucleum capitis. Igitur si concipiamus lucem hanc omnem congregari et intra discum nuclei coarctari, nucleus ille jam certe, quoties caudam maximam et fulgentissimam emittit, ([g]) Jovem ipsum splendore suo multùm

([f]) * *Hæ vel ex reflexione fumi sparsi,* ut posteà probabitur.

([g]) * *Jovem ipsum splendore suo.* Id variis observationibus confirmat Newtonus in Opusculo de Mundi Systemate. Cometa anni 1679. Decembris 12. et 15. stilo veteri, quo tempore caudam clarissimam emittebat et luci multorum Jovium per tantum spatium diffusæ ac dilatatæ non imparem, magnitudine nuclei, ut observabat Flamstedius, cedebat Jovi, adeóque Soli longè vicinior, quin imò minor erat Mercurio. Nam die 17. mensis hujus, ubi Terræ propior erat, apparuit Cassino per telescopium ped. 35. paulò minor globo Saturni. Die 8. mensis hujus, tempore matutino, vidit Halleius caudam perbrevem et latam, et quasi ex corpore Solis jamjam orituri exeuntem, ad instar nubis insolito more fulgentis, nec priùs disparentem quàm Sol ipse

superabit. Minore igitur cum diametro apparente plus lucis emittens, multò magis illustrabitur a Sole, ideóque erit Soli multò propior. Quinetiam capita sub Sole delitescentia, et caudas cùm maximas tum fulgentissimas instar trabium ignitarum nonnunquam emittentia, eodem argumento infra orbem Veneris collocari debent. Nam lux illa omnis si in stellam congregari supponatur, ipsam Venerem ne dicam Veneres plures conjunctas quandoque superaret.

Idem denique colligitur ex luce capitum crescente in recessu cometarum a Terrâ Solem versùs, ac decrescente in eorum recessu a Sole versùs Terram. Sic enim cometa posterior anni 1665. (observante Hevelio) ex quo conspici cœpit, remittebat semper de motu suo apparente, ideóque præterierat perigæum; splendor verò capitis nihilominus indies crescebat, usque dum cometa radiis solaribus obtectus desiit apparere. Cometa anni 1683. (observante eodem Hevelio) in fine mensis Julii, ubi primum conspectus est, tardissime movebatur, minuta prima 40 vel 45 circiter singulis diebus in orbe suo conficiens. Ex eo tempore motus ejus diurnus perpetuò augebatur usque ad Sept. 4. quando evasit graduum quasi quinque. Igitur toto hoc tempore cometa ad Terram appropinquabat. Id quod etiam ex diametro capitis micrometro mensuratâ colligitur: quippe quam Hevelius reperit Aug. 6. esse tantum 6′. 5″. inclusa coma, at Sept. 2. esse 9′. 7″. Caput igitur initio longe minus apparuit quàm in fine motus, at initio tamen in viciniâ Solis longe lucidius extitit quàm circa finem, ut refert idem Hevelius. Proinde toto hoc tempore, ob recessum ipsius a Sole, quoad lumen decrevit, non obstante accessu ad Terram. Cometa anni 1618. circa medium mensis Decembris, et iste anni 1680. circa finem ejusdem mensis, celerrimè movebantur, ideóque tunc erant in perigæis. Verùm splendor maximus capitum contigit ante duas fere septimanas, ubi modo exierant de radiis solaribus; et splendor maximus caudarum paulo ante, in majore vicinitate Solis. Caput cometæ prioris, juxta observationes Cysati, Decemb. 1. majus videbatur stellis primæ magnitudinis, et Decemb. 16. (jam in perigæo existens) magnitudine parum, splendore seu claritate luminis plurimum defecerat. Jan. 7. Keplerus de capite incertus finem fecit observandi. Die 12 men-

inciperet suprà horizontem conspici. Superabat igitur hic splendor lucem nubium usque ad ortum Solis, et immediato Solis splendori solùm cedendo vincebat longè lucem omnium stellarum conjunctim. Non Mercurius, non Venus, non ipsa Luna in tantâ Solis orientis vicinitate cerni solet. Fingamus lucem hancce dilatatam coarctari et in orbem nuclei cometici Mercurio minorem coarctari et splendore longè fortiori jam reddita magis conspicua, Mercurium longè superabit, adeóque erit Soli vicinior. Diebus 12. et 15. ejusdem mensis, cauda hæc per spatium longè majus diffusa apparuit rarior, et luce tamen adeò forti ut stellis fixis vixdum apparentibus cerneretur, et mox trabis mirum in modum fulgentis speciem exhibuit.

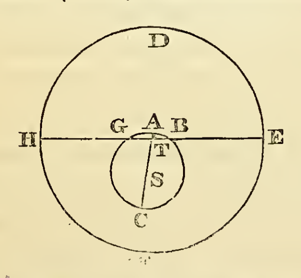
sis Decemb. conspectum et a Flamstedio observatum est caput cometæ posterioris in distantia novem graduum a Sole; id quod stellæ tertiæ magnitudinis vix concessum fuisset. Decemb. 15. et 17. apparuit idem ut stella tertiæ magnitudinis, diminutum utique splendore nubium juxta Solem occidentem. Decembr. 26. velocissimè motus, inque perigæo propemodum existens, cedebat ori Pegasi, stellæ tertiæ magnitudinis. Jan. 3. apparebat ut stella quartæ, Jan. 9. ut stella quintæ, Jan. 13. ob splendorem Lunæ crescentis disparuit. Jan. 25. vix æquabat stellas magnitudinis septimæ. Si sumantur æqualia a perigæo hinc inde tempora, capita quæ temporibus illis in longinquis regionibus posita, ob æquales a Terrâ distantias, æqualiter lucere debuissent, in plagâ Solis maximè splenduêre, ex alterâ perigæi parte evanuêre. Igitur ex magnâ lucis in utroque situ differentia, concluditur magna Solis et cometæ vicinitas in situ priore. Nam lux cometarum regularis esse solet, et maxima apparere ubi capita velocissimè moventur, atque ideo sunt in perigæis; nisi quâtenus ea major est in vicinia Solis.

Corol. 1. Splendent igitur cometæ (h) luce Solis a se reflexâ.

Corol. 2. (i) Ex dictis etiam intelligitur cur cometæ tantoperè frequentant regionem Solis. Si cernerentur in regionibus longè ultra Saturnum, deberent sæpiùs apparere in partibus Soli oppositis. Forent enim Terræ

(h) * *Luce Solis a se reflexâ.* Nam a Terrâ recedentibus cometis et ad Solem accedentibus, augetur eorum splendor, decrescente licet diametro, ut ex præcedentibus observationibus patet.

(i) * *Ex dictis etiam intelligitur.* Referat S Solem, T, Terram, circulus D E F H, sphæram fixarum. Quoniam cometæ splendent luce Solis a se reflexâ, (Cor. 1.) ii non videbuntur, nisi a



Sole ità illustrentur ut oculi nostri hâc luce moveri possint. Prætereà cometæ per caudas suas maximè fiunt conspicui, has autem caudas non emittunt priusquam ad Solem aliquantulum incaluerint, quare patet cometas sese conspicuos non præbere nisi ad definitam quandam a Sole distantiam accedant. Ponatur itaque sphæra A B C G, Soli concentrica ad talem distantiam descripta ut nullus cometa propter illustrationis defectum, detegi possit, priusquam ad sphæræ hujus superficiem pervenerit, juncta recta S T, producatur utrinque donec superficiei huic occurrat in A, et C. Per T, ductum intelligatur planum H E, cui normalis est recta A C, planum illud sphæram dividet in duo hemispheria quorum unum H F E, est versus Solem; alterum verò H D E, Soli opponitur. Cometæ omnes in sphæræ segmento B C G, existentes, videbuntur in hemisphærio versus Solem, omnes autem qui versantur in segmento B A G videbuntur in hemisphærio quod Soli opponitur. Quarè si segmentum B C G, majus sit segmento B A G, plures cometæ videbuntur in hemisphærio versus Solem quàm in opposito. Jam verò cometæ nudis oculis se priùs detegendos non exhibent quàm sint Jove propiores; ponatur itaque S A, circiter $\frac{1}{2}$ distantiæ Martis a Sole, hoc est S A sit circiter dupla ipsius S T, erit segmentum B G C plusquam quadruplo majus segmento B A G, ideóque quadruplo vel quintuplo plures cometæ detegentur in hemispherio versus Solem quàm in hemispherio opposito. At si cometæ cernerentur in regionibus longè ultrà Saturnum, foret S A, longè major quàm S T, et ideò cometæ sæpiùs deberent apparere in partibus Soli oppositis, forent enim Terræ viciniores qui in segmento B A G, versantur, cæteros verò in segmento B C G, Sol interpositus obscuraret. Ex his intelligitur cur cometæ tantoperè frequentant regionem Solis.

viciniores, qui in his partibus versarentur; et Sol interpositus obscuraret cæteros. Verùm percurrendo historias cometarum, reperi quod quadruplo vel quintuplo plures detecti sunt in hemisphærio Solem versus, quàm in hemisphærio opposito, præter alios proculdubio non paucos, quos lux solaris obtexit. Nimirum in descensu ad regiones nostras neque caudas emittunt, neque adeò illustrantur a Sole, ut nudis oculis se prius detegendos exhibeant, quàm sint ipso Jove propiores. Spatii autem tantillo intervallo circa Solem descripti pars longè major sita est a latere Terræ, quod Solem respicit; inque parte illâ majore cometæ, Soli ut plurimum viciniores, magis illuminari solent.

Corol. 3. (k) Hinc etiam manifestum est, quod cœli resistentiâ destituuntur. Nam cometæ vias obliquas et nonnunquam cursui planetarum contrarias secuti, moventur omnifariam liberrimè, et motus suos, etiam contra cursum planetarum diutissimè conservant. (l) Fallor ni genus planetarum sint, et motu perpetuo in orbem redeant. Nam quod scriptores aliqui meteora esse volunt, argumentum a capitum perpetuis mutationibus ducentes, fundamento carere videtur. (m) Capita cometarum atmosphæris ingentibus cinguntur; et atmosphæræ infernè densiores esse debent. Unde nubes sunt, non ipsa cometarum corpora, in quibus mutationes illæ visuntur. Sic Terra si e planetis spectaretur, luce nubium suarum proculdubio splenderet, et corpus firmum sub nubibus propè delitesceret. Sic cingula Jovis in nubibus planetæ illius formata sunt, quæ situm mutant inter se, et firmum Jovis corpus per nubes illas difficilius cernitur. Et multo magis corpora cometarum sub atmosphæris et profundioribus et crassioribus abscondi debent.

(k) * *Hinc etiam manifestum est.* Clariss. Cassinus in Mon. Paris. an. 1731. retrogrados cometarum motus ad directos ingeniosè reduxit. Observatos plurimorum cometarum motus retrogrados meras esse apparentias conjectatur, non secus ac directus planetarum circumsolarium motus apparet aliquandò retrogradus. Sed quamvis celeberrimi hujusce astronomi judicium maximè veneremur, nonnullos tamen cometas motu verè retrogrado contrà seriem signorum cursum tenuisse conabimur ostendere, ubi hâc de re plura dicendi locus dabitur, postquam scilicet tradiderimus motuum cometarum elementa. Obliquas esse nonnunquam cometarum vias et cursui planetarum contrarias fateri non dubitarunt quidam Cartesiani. Verùm quâ ratione diversi illi cometarum motus cum vorticibus conciliari possint, difficilè intelligitur, cùm enim cometæ in regiones planetarum descendant, necesse videtur ut rapidissimo vorticum torrente contrarii cometarum motus maximè perturbentur, citóque destruantur, ac tandem cometæ hujusce torrentis vi rapiantur. At summè regulares esse cometarum motus, et contrà cursum planetarum diutissimè conservari, nonnullis cometarum exemplis deinceps patebit.

(l) * *Fallor, ni genus planetarum sint.* Quàm gravibus fundamentis nitatur hæc sententia manifestum erit posteà ex variis cometarum phænomenis.

(m) * *Capita cometarum* atmosphæris ingentibus cingi variis argumentis imposterum confirmat Newtonus. Cæterum in ipsis cometarum corporibus non fieri perpetuas mutationes illas in decursu constabit independenter omninò ab illâ opinione quæ cometis ingentes atmosphæras tribuit.

PROPOSITIO XL. THEOREMA XX.

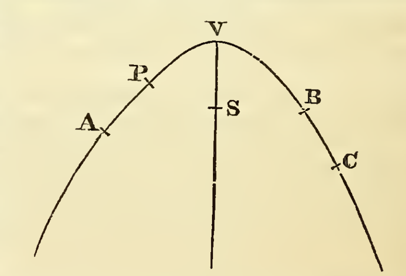
Cometas in sectionibus conicis umbilicos in centro Solis habentibus moveri, et radiis ad Solem ductis areas temporibus proportionales describere.

(n) Patet per Corol. 1. Prop. XIII. Libri Primi, collatum cum Prop. VIII. XII. et XIII. Libri Tertii.

Corol. 1. Hinc si cometæ in orbem redeunt, orbes erunt ellipses, et tempora periodica erunt ad tempora periodica planetarum (o) in axium principalium ratione sesquiplicatâ. (p) Ideóque cometæ maximâ ex parte supra planetas versantes, et eo nomine orbes axibus majoribus describentes,

(n) * *Patet.* Quoniam cometæ motu suo lineas curvas circà Solem describunt, ut ex observationibus constat, vi aliquâ a motu rectilineo detorquentur (per leg. I.). Quoniam autem hæc vis quæ planetas a lineis rectis detorquet maximè tendit versus Solem ut potè corpus cætera omnia systematis solaris corpora longè superans, eadem quoquè vis in cometas Solem maximè debet respicere. Sed vis acceleratrix in planetis est in duplicatâ ratione distantiarum a Sole inversâ (Prop. VIII. Lib. III.). Quarè eandem quoque legem observare debent cometæ quæ sunt corpora planetis similia, ac proinde (Cor. Prop. XIII. Lib. I. et Prop. XIII. Lib. III.) cometæ non secus ac planetæ in sectionibus conicis umbilicos in centro Solis habentibus moventur et radiis ad Solem ductis areas temporibus proportionales describunt. Hæc itâ se habent, si Sol e loco suo nullatenus moveatur; sed quamvis Sol per attractionem planetarum perpetuo motu agitetur, non tamen longè recedit a communi gravitatis centro planetarum omnium, ideóque etiam cometæ qui in regionibus a Sole maximè dissitis commorantur, non magnopere hujus centri situm turbare possunt. Quarè orbitarum suarum umbilicus non longè distabit a centro Solis, ac proindè propositio hæc vera est quamproximè. Quantum accuratè observatis cometarum motibus congruat, patebit deinceps.

136. Keplerus aliique post eum astronomi non pauci, cometas in lineis rectis moveri posuerunt, et indè cometarum quorumdam loca observationibus satis congrua calculo investigarunt. Res itâ succedere potest, si observetur cometa in eâ tantùm orbitæ suæ parte quæ a rectâ non multum differat. Sit A P V B C, sectio conica admodùm excentrica in cujus umbilico altero S collocatum sit Solis centrum. Ponamus cometam observari, dum orbitæ suæ partem A P, describit; fieri potest ut reliquo tempore, dum scilicet a loco P, per V, B, ad locum C promovetur, in regiones remotissimas abiens oculis se subducat et sub radiis solaribus delitescat respectu observatoris in Tellure circà Solem S motâ, vel etiam accidere potest ut, motu Telluris itâ exigente, cometa percurrens orbitæ partem A P V B, sub solaribus radiis abscondatur et tunc primùm observetur cùm ad locum B pervenerit, lineam B C descripturus. In hoc utroque casu via cometæ a lineâ rectâ parum differet. In primo casu, cometæ a Sole absorpti credentur, quia ad Solem accedentes, pro destructis habebuntur. In altero casu, e Sole videbuntur emergere quia tunc primum sese conspicuos præbuerunt, dum a Sole in remotas regiones discedebant. Porrò dum cometa versus Solem



descendit, putà dum A P percurrit posteà ad Solem accedens sub ejus radiis latet, putà dum P V B describit, tandemque dum ad alteras Solis partes subitò emergit, usurpatur sæpè pro novo cometa a priori in A P diverso, et duæ rectæ A P, B C pro duabus trajectoriis habentur. Ex his patet cur trajectoriæ rectilineæ, observatis cometarum motibus plerumque respondeant. Id fit scilicet eò quod aliqua duntaxat portio trajectoriæ pro integrâ trajectoriâ habeatur. At si tota simul consideretur tam in ascensu versus Solem quàm in descensu, aliam nullam præter sectionem conicam satisfacere constabit.

(o) * *In axium principalium ratione sesquiplicatâ.* (Prop. XV. Lib. I.)

(p) * *Ideóque cometæ maximâ ex parte suprà planetas versantes,* quo tempore scilicet oculos nostros fugiunt, et eo nomine orbes axibus majoribus quam planetæ describentes tardius revolventur.

tardius revolventur. Ut si axis orbis cometæ sit quadruplo majore axe orbis Saturni, tempus revolutionis cometæ erit ad tempus revolutionis Saturni, id est, ad annos 30. ut 4 √ 4 (seu 8) ad 1. ideóque erit annorum 240.

Corol. 2. (p) Orbes autem erunt parabolis adeo finitimi, ut eorum vice parabolæ sine erroribus sensibilibus adhiberi possint.

Corol. 3. Et propterea (per Corol. 7. Prop. XVI. Lib. I.) velocitas cometæ omnis, erit semper (q) ad velocitatem planetæ cujusvis circa Solem in circulo revolventis, in subduplicatâ ratione duplæ distantiæ planetæ a centro Solis, ad distantiam cometæ a centro Solis quamproximè. Ponamus radium orbis magni, seu ellipseos in quâ Terra revolvitur, semi-diametrum maximam esse partium 100000000: (r) et Terra motu suo diurno mediocri describet partes 1720212, et motu horario partes $71675\frac{1}{2}$. Ideóque cometa in eâdem Telluris a Sole distantiâ mediocri, eâ cum velocitate quæ sit ad velocitatem Telluris ut √ 2 ad 1, describet motu suo diurno partes 2432747, et motu horario partes $101364\frac{1}{2}$. (s) In majoribus autem vel minoribus distantiis, motus tum diurnus tum horarius erit ad hunc motum diurnum et horarium in subduplicatâ ratione distantiarum reciprocè, ideóque datur.

Corol. 4. (t) Unde si latus rectum parabolæ quadruplo majus sit radio

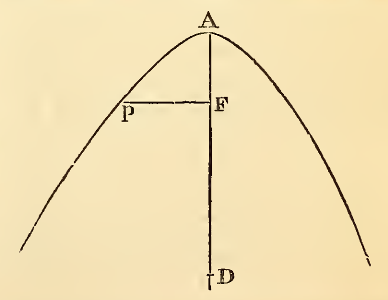
(p) * *Orbes autem erunt parabolis adeò finitimi.* Orbes cometarum sunt admodum excentrici, ut ex observationibus colligitur, et valdè exigua est portio orbis quem toto apparitionis tempore describunt, exiguo enim temporis spatio sese conspicuos præbent. Verùm si in ellipsi centrum ad infinitam ab umbilico distantiam removeatur, portio ellipsis cujus abscissa finita est, abit in parabolam. Quarè elliptici orbes cometarum erunt parabolis valdè finitimi.

(q) * *Ad velocitatem planetæ cujusvis circà Solem in circulo revolventis;* hoc est, ad velocitatem ejus mediocrem.

(r) * *Et Terra.* Fiat hæc analogia: ut est tempus periodicum Terræ circà Solem ad totam peripheriam circuli 3.141, ità dies una vel hora una ad partem peripheriæ unâ die vel horâ unâ descriptam.

(s) * *In majoribus autem vel minoribus.* (Cor. 6. Prop. IV. et Prop. XV. Lib. I. vel per Cor. 6. Prop. XVI. ejusdem Libri.)

(t) * *Undè si latus rectum.* Ex umbilico parabolæ F, ducatur ad axem A D, ordinata P F, erit area A P F, ad aream circuli quartâ parte lateris recti seu radio A F descripti (Theor. II. de parabolâ, Lib. I.) ut $\frac{4}{3}$ ad 3.14159. Nam si radius circuli sumatur æqualis unitati, erit area circuli ad quadratum diametri, ut 3.14159 ad 4. Sed rectangulum sub ordinatâ P F et abscissâ F A, est dimidium hujus quadrati, hoc est 2, et area parabolica A P F, hujus rectanguli duæ tertiæ partes, hoc est $\frac{4}{3}$ (per Theor. IV. de parab. Lib. I.). Quarè area parabolica A P F, est ad aream circuli radio A F descripti ut $\frac{4}{3}$ ad 3.14159. Si igitur velo-



citas cometæ revolventis in parabolâ eadem esset cum velocitate planetæ gyrantis in circulo, in eâdem quoque ratione foret tempus quo cometa describit arcum parabolæ A P, ad tempus periodicum planetæ. Sed velocitas cometæ est ad velocitatem planetæ in eâdem distantiâ a Sole ut √ 2 ad 1, in hâc igitur ratione diminuenda est prior ratio. Undè tempus quo cometa de-

orbis magni, et quadratum radii illius ponatur esse partium 100000000: area quam cometa radio ad Solem ducto singulis diebus describit, erit partium $1216373\frac{1}{2}$, et singulis horis area illa erit partium $50682\frac{1}{4}$. (u) Sin latus rectum majus sit vel minus in ratione quâvis, erit area diurna et horaria major vel minor in eâdem ratione subduplicatâ.

(x) LEMMA V.

Invenire lineam curvam generis parabolici, quæ per data quotcunque puncta transibit.

Sunto puncta illa A, B, C, D, E, F, &c. et ab iisdem ad rectam quamvis positione datam H N demitte perpendicula quotcunque A H, B I, C K, D L, E M, F N.

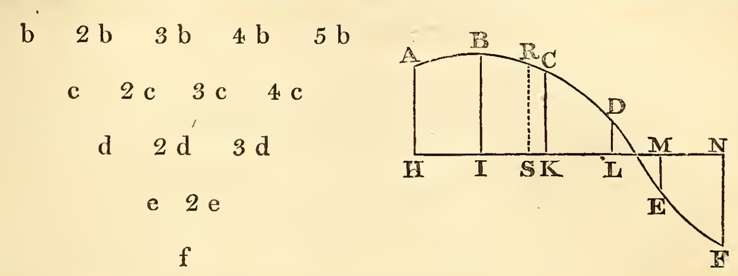
Cas. 1. Si punctorum H, I, K, L, M, N æqualia sunt intervalla H I, I K, K L, &c. collige perpendiculorum A H, B I, C K, &c. differentias primas b, 2 b, 3 b, 4 b, 5 b, &c. secundas c, 2 c, 3 c, 4 c, &c. tertias d, 2 d, 3 d, &c. id est, ita ut sit A H — B I = b, B I — C K = 2 b, C K — D L = 3 b, D L + E M = 4 b, — E M + F N = 5 b, dein b — 2 b = c, &c. et sic pergatur ad differentiam ultimam, quæ hic est f. Deinde erecta quacunque perpendiculari R S, quæ fuerit ordinatim applicata ad curvam quæsitam: ut inveniatur hujus longitudo, pone

scribit arcum parabolicum A P, erit ad tempus periodicum planetæ ut $\frac{4}{3 \times \sqrt{2}}$ ad $\frac{3.14159}{1}$. Sivè ut $\sqrt{\frac{16}{9 \times 2}}$, hoc est, ut $\sqrt{\frac{8}{9}}$ ad 3.14159. Jam tempus periodicum Terræ circà Solem sit 365.2565 dier. et cometa in perihelio ad distantiam æqualem distantiæ Terræ a Sole supponatur, tempus quo cometa describet arcum parabolicum A P, per hanc analogiam invenitur: ut est 3.14159 ad $\sqrt{\frac{8}{9}}$, ità 365.2565 ad tempus quæsitum quod erit 109. dier. 14. hor. 46′. Si quadratum radii ponatur esse partium 100000000. erit area parabolica harum partium 133333333, quas cometa radiis ad Solem ductis describit diebus 109. hor. 14. 46′. Quarè area quam cometa singulis diebus describit, erit partium $1216373\frac{1}{2}$ et singulis horis area illa erit partium $50682\frac{1}{4}$.

(u) * *Sin latus rectum.* Tempora quibus cometa in distantiis inæqualibus areas parabolicas similes describeret, sunt ut revolutiones in circulis, ideóque in ratione distantiarum sesquiplicatâ (Cor. 6. Prop. IV. Lib. I.), id est, majus temporis intervallum requiritur ut cometa in majori parabolâ aream similem describat, minus autem in minori, ac proindè cometa tempore æquali minorem partem parabolæ majoris et majorem parabolæ minoris describeret, idque in ratione sesquiplicatâ distantiarum inversâ, hoc est, positâ ratione distantiarum $\frac{d}{e}$, erit ratio arearum æquali tempore descriptarum ut $\frac{1}{d\sqrt{d}}$ ad $\frac{1}{e\sqrt{e}}$. Sed areæ similes parabolarum inæqualium sunt in ratione duplicatâ laterum rectorum (112. Lib. I.). Sive distantiarum quæ sunt laterum rectorum pars quarta (Cor. 2. Theor. I. de parab. Lib. I.). Quarè ratio prior in hâc ratione duplicatâ augenda est, totaque ratio composita erit ut $\frac{dd}{d\sqrt{d}}$ ad $\frac{ee}{e\sqrt{e}}$, hoc est, ut $\sqrt{d}$ ad $\sqrt{e}$, quæ est ratio subduplicata distantiarum sive laterum rectorum. Patet aream minorem fieri in eâdem ratione subduplicatâ, si ratio sesquiplicata distantiarum minuatur in ratione duplicatâ laterum rectorum seu distantiarum.

(x) * *Lemma.* Totum illud Lemma exponitur num. 76. Lib. II.

intervalla H I, I K, K L, L M, &c. unitates esse, et dic A H = a, — H S = p, $\frac{1}{2}$ p in — I S = q, $\frac{1}{3}$ q in + S K = r, $\frac{1}{4}$ r in + S L = s, $\frac{1}{5}$ s in + S M = t; pergendo videlicet ad usque penultimum perpen-



diculum M E, et præponendo signa negativa terminis H S, I S, &c. qui jacent ad partes puncti S versus A, et signa affirmativa terminis S K, S L, &c. qui jacent ad alteras partes puncti S. Et signis probe observatis, erit R S = a + b p + c q + d r + e s + f t, &c.

Cas. 2. Quod si punctorum H, I, K, L, &c. inæqualia sint intervalla H I, I K, &c. collige perpendiculorum A H, B I, C K, &c. differentias primas per intervalla perpendiculorum divisas b, 2 b, 3 b, 4 b, 5 b; secundas per intervalla bina divisa c, 2 c, 3 c, 4 c, &c. tertias per intervalla terna divisas d, 2 d, 3 d, &c. quartas per intervalla quaterna divisas e, 2 e, &c. et sic deinceps; id est, ita ut sit $b = \frac{AH - BI}{HI}$, $2b = \frac{BI - CK}{IK}$, $3b = \frac{CK - DL}{KL}$, &c. dein $c = \frac{b - 2b}{HK}$, $2c = \frac{2b - 3b}{IL}$, $3c = \frac{3b - 4b}{KM}$, &c. postea $d = \frac{c - 2c}{HL}$, $2d = \frac{2c - 3c}{IM}$, &c. Inventis differentiis, dic A H = a, — H S = p, p in — I S = q, q in + S K = r, r in + S L = s, s in + S M = t; pergendo scilicet ad usque perpendiculum penultimum M E, et erit ordinatim applicata R S = a + b p + c q + d r + e s + f t, &c.

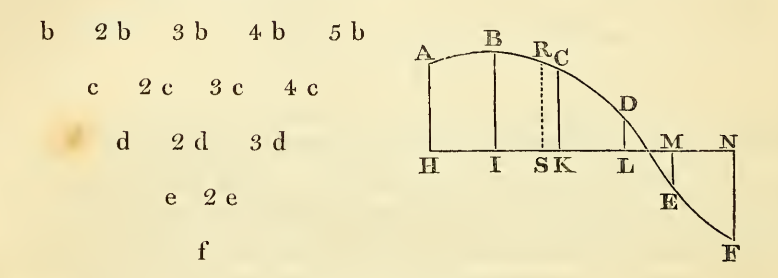
Corol. Hinc areæ curvarum omnium inveniri possunt quamproximè. Nam si curvæ cujusvis quadrandæ inveniantur puncta aliquot, et parabola per eadem duci intelligatur: erit area parabolæ hujus eadem quamproximè cum areâ curvæ illius quadrandæ. (y) Potest autem parabola per methodos notissimas semper quadrari geometricè.

(y) *Potest autem parabola, per methodos notissimas* (165. Lib. I.) *semper quadrari geometricè.* Inveniatur itaque æquatio definiens curvam parabolicam quæ transibit per curvæ quadrandæ puncta quotlibet, erit area parabolæ hujus eadem quamproximè cum areâ curvæ illius quadrandæ. Quò plura sunt puncta curvæ propositæ per quæ transit curva parabolica, eò propiùs area hujus accedit ad aream illius.

LEMMA VI.

Ex observatis aliquot locis cometæ invenire locum ejus ad tempus quodvis intermedium datum.

Designent H I, I K, K L, L M tempora inter observationes H A, I B, K C, L D, M E observatas quinque longitudines cometæ, H S



tempus datum inter observationem primam et longitudinem quæsitam. Et si per puncta A, B, C, D, E duci intelligatur curva regularis A B C D E; et per Lemma superius inveniatur ejus ordinatim applicata R S, erit R S longitudo quæsita.

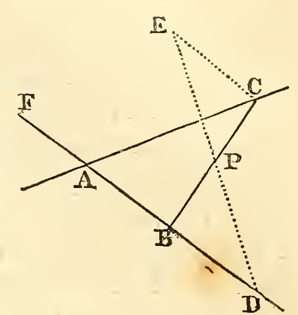
Eâdem methodo ex observatis quinque latitudinibus invenitur latitudo ad tempus datum.

(z) Si longitudinum observatarum parvæ sint differentiæ, putà graduum tantum 4 vel 5; suffecerint observationes tres vel quatuor ad inveniendam longitudinem et latitudinem novam. Sin majores sint differentiæ, putà graduum 10 vel 20, debebunt observationes quinque adhiberi.

(z) 137. * *Si longitudinum observatarum*, (patet per not. in Cor. præced.). Methodus Lemmatis præcedentis, quæ methodus interpolationum dici solet, in rebus astronomicis usus habere potest eximios. Hanc methodum adhibuit clariss. Meierus Tom. II. Comment. Acad. Petropol. ad Investiganda Solstitiorum Momenta. Circà tempus solstitii observentur aliquæ Solis altitudines meridianæ, illasque Solis altitudines repræsentent quædam ordinatæ, et tempora inter observationes elapsa ordinatarum intervallis exhibeantur. Deinde transeat parabola per extremitates ordinatarum, abscissa quæ correspondet minimæ ordinatæ, tempus solstitii determinabit. Cæterum definiri potest tempus solstitii per plures observationes et parabolam plurium dimensionum, vel per tres observationes duntaxat et parabolam conicam, uti fecit Halleius. Verùm in quocumque casu adhibeatur interpolationum methodus, oportet differentias observatas sensibiliter majores esse erroribus qui in ipsâ observatione committi possunt, hâc autem adhibitâ curâ, satis accurate determinari poterunt plurima astronomiæ phænomena quæ aliâ quidem viâ forent determinatu difficillima. Elegantissimum ejusdem methodi exemplum dedit eximius geometra D. Clairaut in Mon. Paris. an. 1736, ubi determinandæ Telluri figuræ modum exponit ex mensurâ plurium meridiani arcuum in diversis latitudinibus captâ.

LEMMA VII.

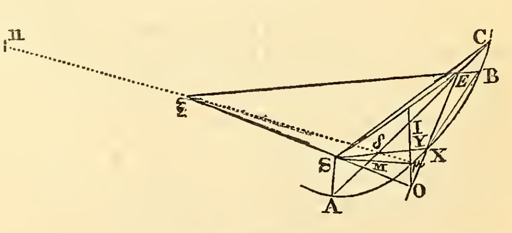
Per datum punctum P *ducere rectam lineam* B C, *cujus partes* P B, P C, *rectis duabus positione datis* A B, A C, *abscissæ, datam habeant rationem ad invicem.*



A puncto illo P ad rectarum alterutram A B ducatur recta quævis P D, et producatur eadem versus rectam alteram A C usque ad E, ut sit P E ad P D in datâ illâ ratione. Ipsi A D parallela sit E C; et si agatur C P B, erit P C ad P B ut P E ad P D. Q. e. f.

LEMMA VIII.

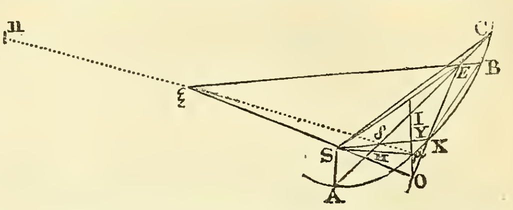
Sit A B C *parabola umbilicum habens* S. *Chorda* A C *bisecta in* I *abscindatur segmentum* A B C I, *cujus diameter sit* I μ *et vertex* μ. *In* I μ *producta capiatur* μ O *æqualis dimidio ipsius* I μ. *Jungatur* O S, *et producatur ea ad* ξ, *ut sit* S ξ *æqualis* 2 S O. *Et si cometa* B *moveatur in arcu* C B A, *et agatur* ξ B *secans* A C *in* E: *dico quod punctum* E *abscindet de chordâ* A C *segmentum* A E *tempori proportionale quamproximè.*



Jungatur enim E O secans arcum parabolicum A B C in Y, et agatur μ X, quæ tangat eundem arcum in vertice μ, et actæ E O occurrat in X; ([a]) et erit area curvilinea A E X μ A ad aream curvilineam A C Y μ A ut A E ad A C. Ideóque cùm triangulum A S E sit ad

([a]) * *Et erit area.* Quoniam chorda A C bisecta est in I, erit semi-segmentum A μ I æquale semi-segmento μ I C. Item quia μ X tangit parabolam in μ, erit μ X, parallela chordæ A C (per Lem. IV. de conic. Lib. I.) ac proindè triangulum O I E simile est triangulo O μ X, ideóque ob I O triplam ipsius μ O, erit triangulum I O E trianguli μ O X, noncuplum et triangulum I O E trapezii I μ X E, sesquioctavum. Præterea triangulum I A O, est trianguli I A μ, sesquialterum (omittuntur in figurâ aliquæ lineæ ad vitandam confusionem) cùm idem sit trianguli utriusque vertex A, sitque basis O I sesquialtera basis μ I, triangulum verò A μ I, subsesquitertium est semi-segmenti A μ I (Prop. XXIV. Archimed. de parab. vel Theor. IV. de parab. Lib. I.). Quare triangulum A O I est sesquioctavum semi-segmenti A μ I, hoc est, in ratione compositâ ex rationibus sesquialterâ et subsesquitertiâ ac proindè triangulum A O I, est ad semi-segmentum A μ I sicut tri angulum I O E, ad trapezium μ X I E, et

triangulum A S C in eâdem ratione, erit area tota A S E X μ A ad aream totam A S C Y μ A ut A E ad A C. Cùm autem ξ O sit ad S O ut 3 ad 1, et E O ad X O in eâdem ratione, erit S X ipsi E B parallela; et propterea si jungatur B X, erit triangulum S E B triangulo X E B æquale.



Unde si ad aream A S E X μ A addatur triangulum E X B, et de summâ auferatur triangulum S E B; manebit area A S B X μ A areæ A S E X μ A æqualis: atque ideò ad aream A S C Y μ A ut A E ad A C. Sed areæ A S B X μ A æqualis est area A S B Y μ A (b) quamproximè, et hæc area A S B Y μ A est ad aream A S C Y μ A, (c) ut tempus descripti arcûs A B ad tempus arcûs totius A C. Ideóque A E est ad A C in ratione temporum quamproximè. Q. e. d.

Corol. Ubi punctum B incidit in parabolæ verticem μ, est A E ad A C in ratione temporum (d) accuratè.

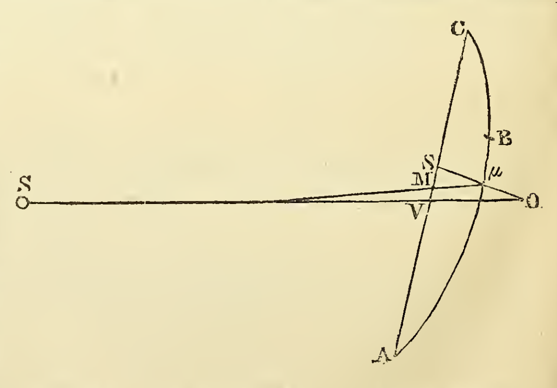
vicissim trapezium μ X I E est ad semi-segmentum A μ I ut I E ad A I, ac proinde, componendo area curvilinea A μ X E, est ad semi-segmentum A μ I, ut A E, ad A I, ideóque area curvilinea A μ X E est ad segmentum totum A μ C ut A E ad A C.

(b) * *Quamproximè.* Ob viciniam punctorum μ, X (ex hyp.).

(c) * *Ut tempus descripti arcûs.* (Prop. I. Lib. I.)

(d) * *Accuratè.* Ideò enim in casu Lemmatis hujus A E non est ad A C in ratione temporum accuratè, quia area A S B X μ A, sumpta est æqualis areæ A S B Y μ A, quod verum est duntaxat quamproximè. Sed coincidentibus punctis B, μ, areæ illæ æquales fiunt accuratè, quare in hoc casu A E est ad A C, in ratione temporum accuratè.

138. Quoniam coincidentibus punctis B, μ, chorda A C dividitur in E in ratione temporum accuratè, iisdem verò punctis non coincidentibus, hæc chorda dividitur in ratione temporum quamproximè tantùm, quò propius erit punctum B, vertici parabolæ μ, eò magis accuratè dividetur chorda A C in duo segmenta quæ temporum rationem habeant. Observandum est chordam A C magis accuratè dividi in ratione temporum, si B distet a vertice μ versus C quàm si ab eodem vertice μ, versus A, æquali intervallo distet. Quoniam enim parabolæ portio μ A vertici principali propior est, ea fit curvior et a tangente μ X, magis deflectit quàm portio μ C, a vertice μ, remotior. Quare si investiganda sint tria temporis momenta quibus cometa in parabolæ locis tribus A, B, C, versatur, ità ut A E sit ad A C, ut temporum intervalla accuratè, sumenda sunt prædicta tempora ferè æqualia. Nam ob exiguas trajectoriæ parabolicæ portiones astronomicis observationibus subjectas, punctum E, non multum distat a chordæ medio puncto I. Oportet autem intervallum illud, ubi cometa tardior est, paulò majus esse altero; cometâ enim existente



in μ, ubi chorda A C, dividitur accurate in ratione temporum; erit recta E C, major quàm A E, hoc est, tempus quo cometa tunc tardior (Cor. 3. Prop. XL. Lib. huj.) describit arcum

Scholium.

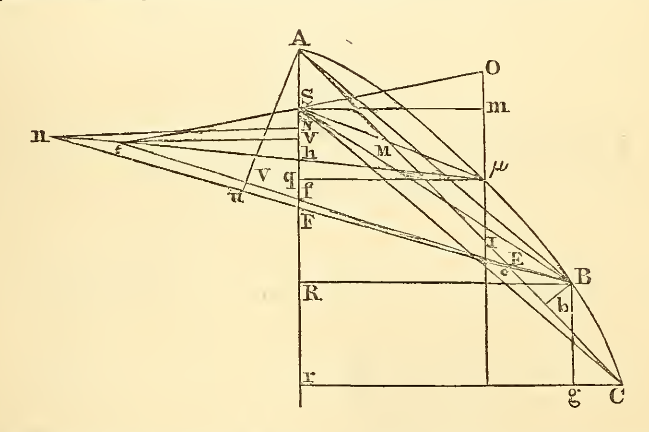
Si jungatur $\mu\,\xi$ secans A C in δ, et in ea capiatur ξ n, quæ sit ad μ B ut 27 M I ad 16 M μ: acta B n secabit chordam A C in ratione temporum (e) magis accuratè quàm priùs. Jaceat autem punctum n ultra

B C, majus est tempore quo idem cometa factus velocior describit arcum B A. Accuratius itaque eligentur tempora parum inæqualia ut punctum E potius abeat versus C, quàm versus A, ob rationem modò allatam.

139. Si vertex μ, segmenti parabolici A μ C parum distet a vertice principali, sitque punctum B proximum puncto μ, recta S μ, ex parabolæ umbilico S, ad verticem μ, ducta dividet chordam A C, in M, ferè in ratione temporum, ut ex præcedentibus patet.

140. Si fuerit recta S μ admodum magna respectu abscissæ μ I, erit S V, tripla ipsius M V. Quoniam enim rectæ S V O, S M μ; in hoc casu pro parallelis haberi possunt, erit I V ad V M ut I O ad μ O, hoc est, (per constr. Lem. VIII.) ut 3 ad 1.

141. Iisdem positis, erit $V\xi = 3\,VS + 3\,I\mu$; quoniam enim (per constr.) $S\xi = 2\,SO$, erit $O\xi = 3\,SO = 3\,SV + 3\,VO$. Jam utrinque auferatur V O, fiet $V\xi = 3\,SV + 2\,VO$. Sed ob rectas V O, M μ parallelas, V O est ad M μ, ut I O ad I μ, hoc est, ut 3 ad 2, ideóque $2\,VO = 3\,M\mu$. Prætereà rectæ S μ, I μ, æquales constituunt angulos cum rectâ tangente parabolam in μ, quæ est chordæ A C parallela (per Theor. III. de parab. et Lem. IV. de conic.). Quarè æquales sunt anguli M I μ, I M μ, ac proindè recta $M\mu = I\mu$; undè fit $3\,I\mu = 2\,VO$, et $V\xi = 3\,VS + 3\,I\mu$.



(e) 142.* *Magis accuratè quam priùs.* Sit A vertex principalis parabolæ, S umbilicus, A S = f, ideóque latus rectum principale = 4 f. Ponatur R B = y, r C = x, erit area A S B C $= \frac{x^3 + 12f^2x}{24f}$, et area A S B A $= \frac{y^3 + 12f^2y}{24f}$ (Theor. IV. de parab.); ac proinde area ASBC, est ad aream A S B A, ut $\frac{x^3 + 12f^2x}{24f}$ ad $\frac{y^3 + 12f^2y}{24f}$, seu ut $x^3 + 12f^2x$ ad $y^3 + 12f^2y$, id est, in ratione temporum accuratè. Prætereà est A C $= \sqrt{Ar^2 + rC^2} = \frac{\sqrt{x^4 + 16f^2x^2}}{4f}$; quarè si fiat $x^3 + 12f^2x$ ad $y^3 + 12f^2y$ ut $\frac{\sqrt{x^4 + 16f^2x^2}}{4f}$ ad

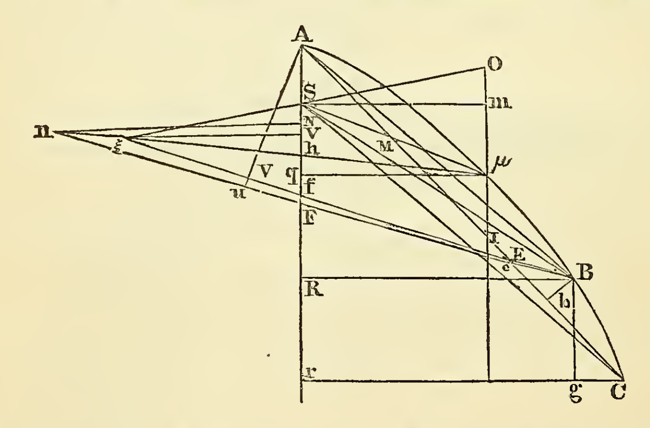
$$AE = \frac{(y^3 + 12f^2y)\sqrt{x^4 + 16f^2x^2}}{4f(x^3 + 12f^2x)},$$

erit quoque recta A C ad hanc rectam A E, in ratione temporum accuratè.

Jam verò investigandus est valor rectæ A E, qui prodit ex constructione Lemmatis præcedentis. Ex umbilico S, erigatur ad μ O perpendicularis S m, hæc erit æqualis ordinatæ q μ. Deinde (Theor. I. de parab.) q μ, dimidia est ipsius r C seu $\frac{1}{2}x$, et $\mu m = qS = \frac{xx - 16ff}{16f}$. Prætereà est $\mu I = 2\,\mu O$ (per constr.) et $\mu I = \frac{AI^2}{4S\mu}$ (165 et Theor. II. de parab.) Sed est $AI^2 = \frac{x^4 + 16f^2x^2}{64f^2}$, et $S\mu^2 = \left(\frac{x^2 - 16f^2}{16f}\right)^2 + \frac{1}{4}xx$, quare est μ O seu

punctum ξ, si punctum B magis distat a vertice principali parabolæ quàm punctum μ; et citra, si minus distat ab eodem vertice.

$\frac{AI^2}{8S\mu} = \frac{x^4 + 16f^2x^2}{32fx^2 + 512f^2x}$, ac proindè $mO = \mu O - m\mu = \frac{x^4 + 16f^2x^2}{32fx^2 + 512f^2x} + \frac{16ff - xx}{16f}$, ideóque $SO = \sqrt{\left\{\frac{1}{4}xx + \left(\frac{x^4+16f^2x^2}{32fx^2+512f^2x} + \frac{16ff-xx}{16f}\right)^2\right\}}$ et $\xi O = 3\sqrt{\left\{\frac{1}{4}xx + \left(\frac{x^4+16f^2x^2}{32fx^2+512f^2x} + \frac{16ff-xx}{16f}\right)^2\right\}}$. Insuper ex puncto ξ, ad abscissam A R erectâ perpendiculari ξV, ob similitudinem triangulorum S m O, S ξ V, fit $SO : q\mu = \xi S : \xi V$, ideóque $\xi V = x$. Præterea $SO : mO = S\xi : SV$, ac proinde $SV = 2mO$, hincque prodit $AV = AS + 2mO$, et $VR = AR - AS - 2mO$. Sed ob triangulorum simi-



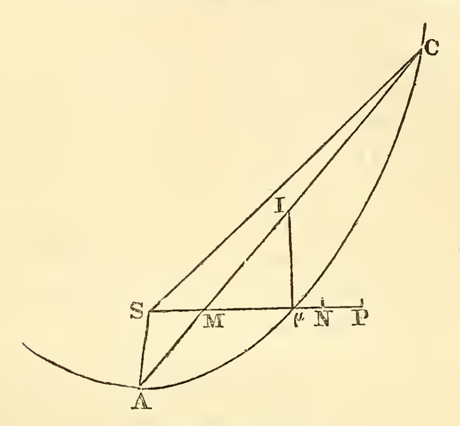
litudinem $\xi V (x) : BR (y) = Vf : Rf$, et componendo, $\xi V + BR : BR = Vf + Rf : Rf$, quare $Rf = \frac{VR + BR}{\xi V + BR}$, datur itaque R f, per x et y. Præterea $fB^2 = RB^2 + Rf^2$, sed $RB : Bf = \xi V : \xi f = \frac{\xi V \times Bf}{RB} = \frac{x \times \sqrt{RB^2 + Rf^2}}{y}$, et hinc $\xi B = \sqrt{RB^2 + Rf^2} + \frac{x \times \sqrt{RB^2+Rf^2}}{y}$. Deinde in triangulo A B C, dantur latera A B, A C, et præterea datur latus B C; ductâ enim B g perpendiculari ad r C, erit $BC = \sqrt{Bg^2 + gC^2} = \sqrt{Rr^2 + (RB - rC)^2}$; datur itaque perpendicularis $Bb = \sqrt{\frac{3}{4}BC^2}$. Insuper ducatur A V perpendicularis ad A B, ob similitudinem triangulorum A V f, B R f, erit $Af : AV = Rf : RB$, ideóque $AV = \frac{RB \times Af}{Rf}$. Denique ductâ B b, perpendiculari ad A C, similia erunt triangula E A V, B b e, ac proinde $Bb : bE = AV : AE$, et invertendo $Bb : AV = bE : AE$, atque, componendo $Bb + AV : AV = bE + AE : AE$, hinc $AE = \frac{Ab \times AV}{Bb + AV}$. Jam loco A b, B b, A V, substitutis eorum valoribus modò inventis prodit A E, paulò minor quàm $\frac{(y^3 + 12f^2y)\sqrt{x^4 + 16f^2x^2}}{4f(x^3 + 12f^2x)}$.

Investigandus superest valor rectæ A e, qui prodit ex constructione scholii hujus. Quoniam similia sunt triangula ξ S h, ξ O μ, erit $\xi S : Sh = \xi O : O\mu$, hinc $Sh = \frac{\xi S \times O\mu}{\xi O}$; sed inventa est suprà recta S q, invenietur itaque q h, ac proindè etiam $h\mu = \sqrt{qh^2 + q\mu^2}$. Præterea $\xi S : SO = \xi h : h\mu$; quare $\xi h = \frac{S\xi \times \sqrt{qh^2 + q\mu^2}}{SO}$, ac proindè tota recta $\xi\mu = \sqrt{qh^2 + q\mu^2} + S\xi \times \frac{\sqrt{qh^2+q\mu^2}}{SO}$. Deindè (per constr.) fit $\xi n = \frac{27 MI \times \mu B}{16 M\mu}$. Sed $AM : MI = AS : I\mu$, ac proindè, componendo $AM + MI : MI = AS + I\mu : I\mu$, invenietur itaque M I, ideóque tota recta $n\mu$. Insuper $h\mu : qh = hr : hM$, invenietur itaque h N, ac proindè et N n, ob triangulum h r N, rectangulum. Præterea (ex præced.) inventa est h R, ideóque etiam datur n R. Jam fiat $rN : NF = BR : RF$, et invertendo $NF : RF = rN : BR$, atque componendo $NF + RF : RF = rN + BR : BR$, hinc

([f]) LEMMA IX.

Rectæ I μ *et* μ M *et longitudo* $\frac{\text{A I q}}{4\ \text{S}\ \mu}$ *æquantur inter se.*

Nam 4 S μ est latus rectum parabolæ pertinens ad verticem μ.



LEMMA X.

Si producatur S μ *ad* N *et* P, *ut* μ N *sit pars tertia ipsius* μ I, *et* S P *sit ad* S N *ut* S N *ad* S μ. *Cometa, quo tempore describit arcum* A μ C, *si*

$\text{R F} = \frac{\text{B R} \times \text{N R}}{\text{r N} + \text{B R}}$, ideóque datur $\text{B F} = \sqrt{\text{B R}^2 + \text{R F}^2}$. Deinde B F : B R = r F : F N, et inde $\text{r F} = \frac{\text{B F} \times \text{F N}}{\text{B R}}$, atque recta tota $\text{r B} = \frac{\text{B F} \times \text{F N}}{\text{B R}} + \sqrt{\text{B R}^2 + \text{R F}^2}$. Ducatur recta A u, perpendicularis ad A B, erit ob triangulorum A u F, R B F, similitudinem A F : A u = R F : R B, ideóque $\text{A u} = \frac{\text{R B} \times \text{A F}}{\text{R F}}$, et hinc prorsus ut suprà habetur $\text{A e} = \frac{\text{A b} \times \text{A u}}{\text{B b} + \text{A u}}$. Ex hactenus dictis patet dari rectas A E, A e, per x, y, et quantitates constantes. Jam loco A b, B b, A u, substitutis eorum valoribus analyticis, fit A e, paulò major quàm A E, et paulò minor quàm $\frac{(y^3 + 12 f^2 y) \sqrt{x^4 + 16 f^2 x^2}}{4 f (x^3 + 12 f^2 x)}$.

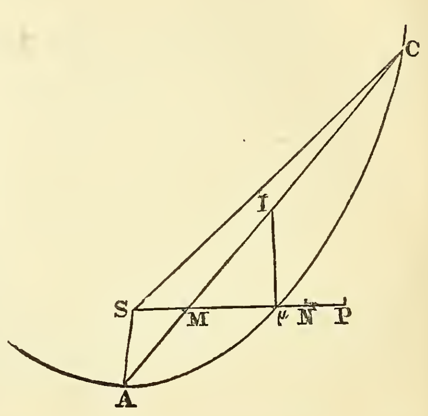
Quarè recta B n, secabit chordam A C, in e, in ratione temporum magis accuratè quàm recta ξ B.

Idem scholium faciliùs demonstrari potest hoc modo. Quoniam $\text{A e} = \frac{\text{A b} \times \text{A u}}{\text{A b} + \text{A u}} = \text{A b} - \frac{\text{A b} \times \text{A b}}{\text{A u} + \text{B b}}$ (ex dem.) erit A e semper minor quàm A b. Jam verò factâ analogiâ $x^3 + 12 f^2 x : y^3 + 12 f^2 y = \frac{\sqrt{x^4 + 16 f^2 x^2}}{4 f} : \frac{(y^3 + 12 f^2 y) \sqrt{x^4 + 16 f^2 x^2}}{4 f \sqrt{x^3 + 12 f^2 x}}$, si A e æqualis foret huic quarto termino, haberetur ratio temporum accuratè (Prop. I. Lib. I.). Sed quartus ille terminus major est rectâ A e; nam terminus ille major est quàm chorda A B, est enim $\text{AB} = \frac{\sqrt{y^4 + 16 f^2 y^2}}{4 f} = \sqrt{x^3 + 12 f^2 x} \times \frac{\sqrt{y^4 + 16 f^2 y^2}}{4 f \sqrt{x^3 + 12 f^2 x}}$ hæc autem quantitas minor est quàm $\frac{(y^3 + 12 f^2 y) \sqrt{x^4 + 16 f^2 x^2}}{4 f \sqrt{x^3 + 12 f^2 x}}$. Sed (per constr.) ità ducitur μ n, ut recta n B semper secet chordam A C in puncto e, quod proximius est puncto C quàm punctum E; quare cùm recta A e semper minor sit verâ, major tamen quàm A E, hæc magis quàm illa ad justum valorem accedet, ac proindè recta n B, secat chordam A C, in ratione temporum magis accuratè quàm recta ξ B. Res eodem modo demonstratur, ubicumque sumatur punctum A.

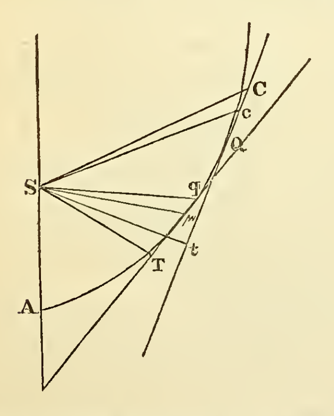
([f]) * *Lemma IX.* (Patet per num. 139 Lib. huj. et Theor. I. et II. de parab. Lib. I.).

progrederetur eâ semper cum velocitate quam habet in altitudine ipsi S P *æquali, describeret longitudinem æqualem chordæ* A C.

Nam si cometa velocitate, quam habet in μ, eodem tempore progrederetur uniformiter in rectâ, quæ parabolam tangit in μ; (g) area, quam radio ad punctum S ducto describeret, æqualis esset areæ parabolicæ A S C μ. (h) Ideóque contentum sub longitudine in tangente descriptâ et longitudine S μ esset ad contentum sub longitudinibus A C et S M, ut area A S C μ ad trian-

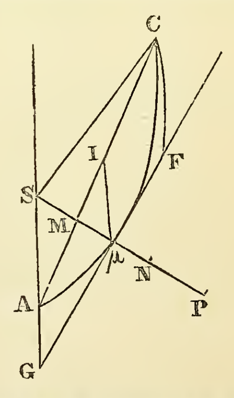


(g) * *Area, quam radio.* Cometa velocitate quam habet in μ, relictâ parabolâ, progrediatur uniformiter in rectâ μ Q, quæ parabolam tangit in μ, area S μ Q, quam radio ad punctum S, ducto describeret, æqualis esset areæ parabolicæ A S C μ, quam eodem tempore describit. Sumantur enim lineolæ C c, q μ, a cometa descrip-



tæ et a parabolæ umbilico S, ad tangentes C t, μ T, erigantur perpendiculares S t, S T, velocitas in C, est ad velocitatem in μ ut S T ad S t (Cor. 1. Prop. I. Lib. I.) sed velocitates in C, et μ, sunt ut spatia eodem tempore percursa, putâ C c et q μ; est igitur C c ad μ q ut S T ad S t. Quarè triangulum S μ q, æquale est triangulo C S c. Istud autem ubique obtinet in triangulis minimis, trilinea A S C μ, S μ Q constituentibus. Quia verò æqualia insumuntur tempora ad percurrendas lineas A C, μ Q (ex hyp.) ex æqualibus numero triangulis componuntur spatia A S C μ, S μ Q ac proinde triangulum S μ Q, æquale est areæ parabolicæ, A S C μ.

(h) * *Ideóque.* Quoniam recta S μ, cum tangente in μ, et chordâ A C, æquales constituit angulos (Lem. IV. de conicis), spatium contentum sub longitudine descriptâ in tangente et rectâ



S μ, erit ad spatium contentum sub chordâ A C, et rectâ S M, ut area A S C μ, ad triangulum A S C, id est, ut triangulum S A C + segm. parab. C A c ad triangulum S A C, id est, ut triangulum S A C $+ \frac{2}{3}$ parallelogrammi A G F C, ad triangulum A S C, hoc est, ut A C $\times \frac{1}{2}$ S M $+$ A C $\times \frac{2}{3}$ I μ ad A C $\times \frac{1}{2}$ S M, sivè ut S M $+ \frac{4}{3}$ I μ ad S M. Sed μ N, sumpta est

gulum A S C, id est, ut S N ad S M. Quare A C est ad longitudinem in tangente descriptam, ut S μ ad S N. Cùm autem velocitas cometæ in altitudine S P sit (per Corol. 6. Prop. XVI. Lib. I.) ad ejus velocitatem in altitudine S μ, in subduplicatâ ratione S P ad S μ inversè, id est, in ratione S μ ad S N; (i) longitudo hac velocitate eodem tempore descripta, erit ad longitudinem in tangente descriptam, ut S μ ad S N. Igitur A C et longitudo hâc novâ velocitate descripta, cùm sint ad longitudinem in tangente descriptam in eâdem ratione, æquantur inter se. Q. e. d.

(k) *Corol.* Cometa igitur eâ cum velocitate, quam habet in altitudine S $\mu + \frac{2}{3}$ I μ, eodem tempore describeret chordam A C quamproximè.

LEMMA XI.

Si cometa motu omni privatus de altitudine S N *seu* S $\mu + \frac{1}{3}$ I μ *demitteretur, ut caderet in Solem, et eâ semper vi uniformiter continuatâ urgeretur in Solem, quâ urgetur sub initio; idem semisse temporis, quo in orbe suo describit arcum* A C, *descensu suo describeret spatium longitudini* I μ *æquale.*

Nam cometa, quo tempore describit arcum parabolicum A C, eodem tempore eâ cum velocitate, quam habet in altitudine S P (per Lemma novissimum) describet chordam A C, ideóque (per Corol. 7. Prop. XVI. Lib. I.) eodem tempore in circulo, cujus semi-diameter esset S P, vi gravitatis suæ revolvendo, describeret arcum, cujus longitudo esset ad arcûs parabolici chordam A C, in subduplicatâ ratione unitatis ad binarium. Et propterea eo cum pondere, quod habet in Solem in altitudine S P, cadendo de altitudine illâ in Solem, describeret semisse temporis illius ((l) per Corol. 9. Prop. IV. Lib. I.) spatium æquale quadrato semissis chordæ illius applicato ad quadruplum altitudinis S P, id est, spatium $\frac{A\,I\,q}{4\,S\,\mu}$. (m) Unde cùm pondus cometæ in Solem in altitudine

æqualis $\frac{1}{3}$ I μ, et est M $\mu = \mu$ I (num. 139.). Quarè M N $= \frac{4}{3}$ I μ. Est igitur spatium contentum sub longitudine descriptâ in tangente et rectâ S μ, ad spatium contentum sub chordâ A C, et rectâ S M, ut S M + M N ad S M, hoc est, ut S N ad S M: Unde si longitudo descripta in tangente dicatur L, erit L $\times$ S μ : A C $\times$ S M = S N : S M, ideóque longitudo descripta in tangente erit ad chordam A C, ut $\frac{S\,N}{S\,\mu}$ ad $\frac{S\,M}{S\,M}$, hoc est, ut S N ad S μ.

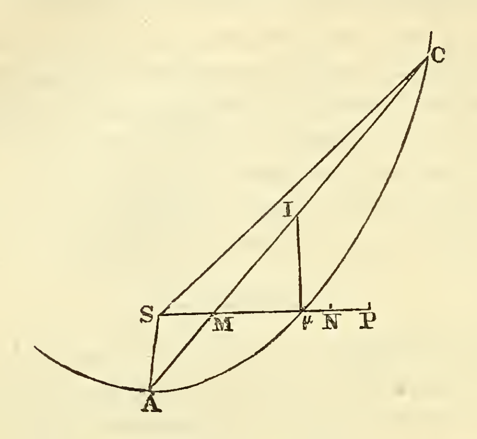
(i) * *Longitudo.* Nam longitudines iisdem temporibus uniformi motu descriptæ sunt ut velocitates (5. Lib. I.).

(k) * *Corol.* Si S μ, sit admodum magna respectu μ N, tres geometricè proportionales S μ, S N, S P, erunt etiam arithmeticè proportionales quamproximè, id est N P, æquabitur μ N, sive trienti ipsius I μ, ideóque μ P, æqualis quamproximè $\frac{2}{3}$ ipsius I μ. Quarè patet Corollarium.

(l) * *Per Corol.* 9. *Prop. IV. Lib. I.* Vel per num. 201. ejusdem Lib.

(m) * *Undè cùm pondus cometæ.* Gravitas acceleratrix cometæ versus Solem in distantiâ

S N sit ad ipsius pondus in Solem in altitudine S P, ut S P ad S μ: cometa pondere quod habet in altitudine S N eodem tempore, in Solem



cadendo, describet spatium $\frac{A\,I\,q}{4\,S\,\mu}$, (n) id est, spatium longitudini I μ vel M μ æquale. Q. e. d.

PROPOSITIO XLI. PROBLEMA XXI.

Cometæ in parabola moti trajectoriam ex datis tribus observationibus determinare.

Problema hocce longè difficillimum multimodè aggressus, composui Problemata quædam in Libro primo, quæ ad ejus solutionem spectant. Postea solutionem sequentem paulo simpliciorem excogitavi.

Seligantur tres observationes (o) æqualibus temporum intervallis ab invicem quamproximè distantes. Sit autem temporis intervallum illud, ubi cometa tardius movetur, paulo majus altero, ita videlicet ut temporum differentia sit ad summam temporum, ut summa temporum ad dies plus minus sexcentos; vel ut punctum E (in fig. Lem. VIII.) incidat in punctum M quamproximè, et inde aberret versus I potius quàm versus A. (p) Si tales observationes non præsto sint, inveniendus est novus cometæ locus per Lemma sextum.

Designet S Solem, T, t, τ tria loca Terræ in orbe magno, T A, t B, τ C observatas tres longitudines cometæ, V tempus inter observationem

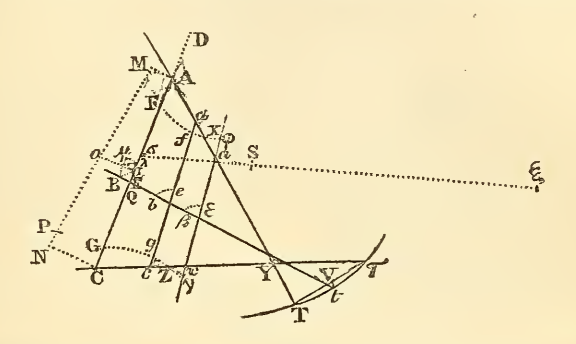
S N, est ad gravitatem acceleratricem versus eundem in distantiâ S P, ut S P^2 ad S N^2, hoc est, ob proportionales S P, S N, S μ, ut S P ad S μ.

(n) * *Id est.* (Lem. IX.)

(o) * *Æqualibus temporum intervallis.* Ratio patet per not. 138.

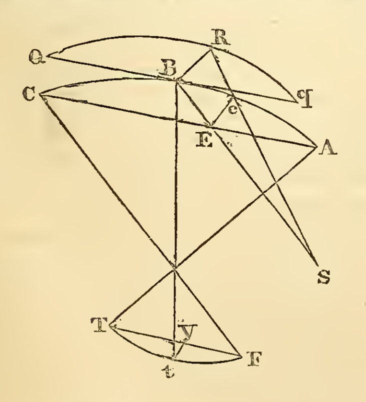
(p) * *Si tales observationes.* (Ibid.)

primam et secundam, W tempus inter secundam ac tertiam, X longitudinem, quam cometa toto illo tempore eâ cum velocitate, quam habet in mediocri Telluris a Sole distantiâ, describere posset; quæque (per Corol. 3. Prop. XL. Lib. III.) invenienda est, et t V perpendiculum in chordam T τ. In observatâ longitudine mediâ t B sumatur utcunque



punctum B pro loco cometæ in plano eclipticæ, et inde versus Solem S ducatur linea B E, quæ sit ad sagittam t V, ut contentum sub S B et S t quad. ad cubum hypotenusæ trianguli rectanguli, cujus latera sunt S B (q) et tangens latitudinis cometæ in observatione secundâ ad radium t B. Et per punctum E agatur (per hujus Lem. VII.) recta A E C, cujus partes A E, E C, ad rectas T A et C τ terminatæ, sint ad invicem ut tempora V et W: (r) et erunt A et C loca cometæ in plano eclipticæ in

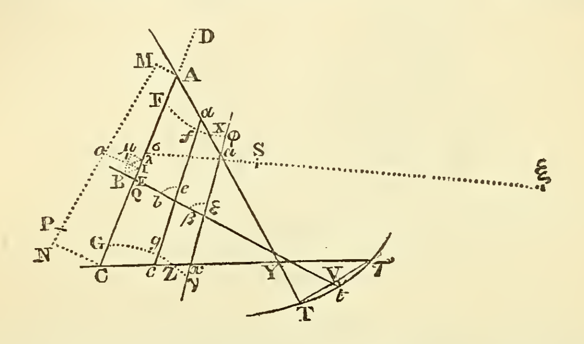
(q) * *Et tangens latitudinis cometæ.* Ex puncto B, ad planum eclipticæ erecta intelligatur normalis, hæc erit tangens latitudinis cometæ in secundâ observatione, sumpto t B pro radio.



(r) * *Et erunt A et C loca cometæ.* Quoniam (ex hyp.) B est vestigium cometæ in plano eclipticæ, et B R ad planum eclipticæ normaliter ducta, tangens latitudinis observatæ ex t ad radium t B, patet punctum R esse verum cometæ locum, atque R S distantiam cometæ a Sole in observatione secundâ. Per E, agatur E e, ad B R, parallela quæ (per Prop. VIII. Lib. XI. Elem.) normalis est ad planum eclipticæ, jacetque in plano trianguli S B R, occurrat hæc ipsi S R in e. Jam verò recta R e, est ad rectam t V, in ratione compositâ ex R e, ad B E, et B E ad t V. Sed (per Prop. XI. Lib. VI. Elem.) R e est ad B E ut R S ad B S et B E est ad t V, ut $St^2 \times SB$ ad SR^3. Quarè E e est ad t V, in ratione compositâ ex ratione S R ad B S, et ratione $St^2 \times SB$ ad cubum rectæ S B; ratio autem quæ ex istis binis componitur eadem est cum ratione St^2 ad SR^2, hinc R e est ad B E, ut St^2 ad SB^2. Quia verò t V est æqualis quamproximè quadrato arcûs T t per diametrum orbis magni diviso (182. Lib. I.) erit recta t V, quamproximè spatium per quod Terra e quiete demissa vi suæ gravitatis caderet versus Solem, dum semissem arcûs T t, describet, si eâdem ubique gravitate acceleratrice uniformiter continuatâ urgeretur quâ urgetur in loco t, (202. Lib. I.) Præstereà gravitas acceleratrix versus Solem in loco t, est ad gravitatem acceleratricem versus eundem in loco R,

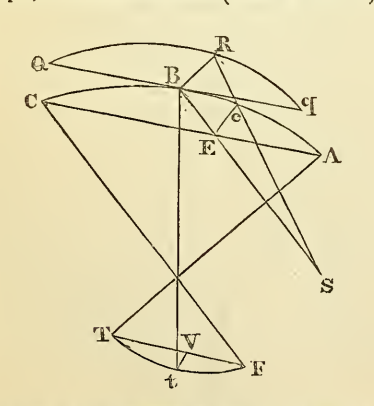
observatione primâ ac tertiâ quamproximè, si modò B sit locus ejus rectè assumptus in observatione secundâ.

Ad A C bisectam in I erige perpendiculum I i. Per punctum B age occultam B i ipsi A C parallelam. Junge occultam S i secantem A C in λ, et comple parallelogrammum i I λ μ. Cape I σ æqualem 3 I λ, et per Solem S age occultam σ ξ æqualem 3 S σ + 3 i λ. Et deletis jam literis



A, E, C, I, a puncto B versus punctum ξ duc occultam novam B E, quæ sit ad priorem B E in duplicata ratione distantiæ B S ad quantitatem S μ + $\frac{1}{3}$ i λ. Et per punctum E iterum duc rectam A E C eâdem lege ac prius, id est, ita ut ejus partes A E et E C sint ad invicem, ut tempora inter observationes V et W. Et erunt A et C loca cometæ (s) magis accuratè.

ut S R ^{2} ad S t ^{2}, et spatia eodem tempore, urgentibus illis viribus deorsum versus Solem, descripta, sunt inter se ut vires (Lem. X. Lib. I.);

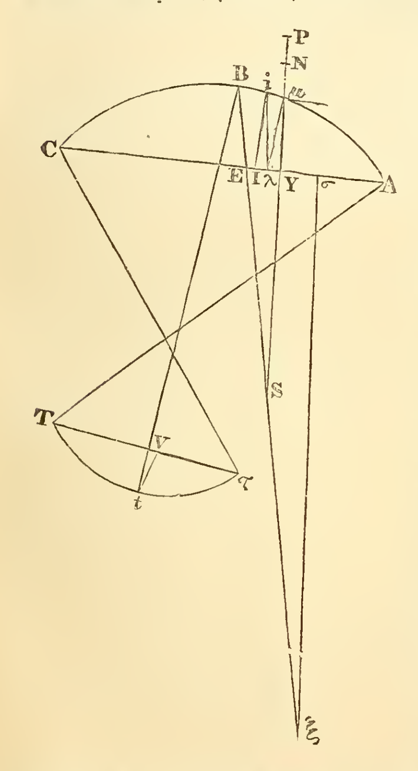


quare recta R e, est spatium per quod cometa e quiete ex R demissus versus Solem caderet semisse temporis quo Terra describit arcum T t, hoc est, semisse temporis quo cometa describit trajectoriæ suæ arcum interceptum inter duas longitudines T A, T C, ideòque punctum R, est in arcûs istius chordâ. Unde si tam arcus trajectoriæ Q R q binis longitudinibus T A, T C terminati quàm puncti e, concipiantur vestigia normalibus ad planum eclipticæ demissis signata, nempè A, B, C et E, erit punctum E in chordâ arcûs A B C. Sed chorda arcûs A B C dividitur a rectâ S B ferè in ratione temporum quibus cometa ad eclipticam reductus, describit arcus A B, B C, (165.) et (per constr.) in eâdem ratione dividitur recta A C, nullaque alia hisce conditionibus potest satisfacere. Cùm igitur oporteat chordam arcûs qui est vestigium portionis trajectoriæ inter longitudines T A, T C interceptæ, a rectis T A, T C terminari et per E transire et in E dividi in ratione temporum, cùmque recta A C hasce conditiones sola et unica obtineat, evidens est rectam A C esse chordam prædicti arcûs, ac proindè puncta A et C sunt quamproximè vestigia cometæ in plano eclipticæ in observationibus primâ et tertiâ, si modò B sit locus ejus rectè assumptus in observatione secundâ.

(s) * *Magis accuratè.* Quoniam (per constr. præced.) assumptus est locus B vero non satis proximus, et licet accuratè sumptus fuisset,

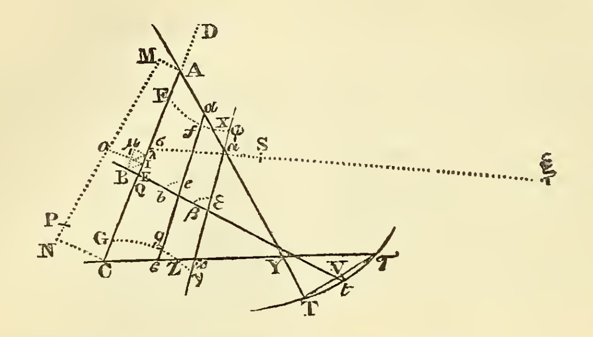
Ad A C bisectam in I erigantur perpendicula A M, C N, I O, quorum A M et C N sint tangentes latitudinum in observatione primâ ac tertiâ ad radios T A et τ C. Jungatur M N secans I O in O. Constituatur rectangulum i I λ α ut prius. In I A productâ capiatur I D æqualis

tamen loca A et C, indè deducta non sunt satis accuratè definita, hinc adhiberi debet aliqua correctio. Manente constructione Newtonianâ, concipiantur demissa a singulis trajectoriæ cometicæ punctis perpendicula ad planum eclipticæ, prædictis perpendiculis in plano eclipticæ, signabitur curva parabolica A B C, cujus umbilicus S. Hujus arcûs A B C, rectis T A, T C comprehensi chorda est quamproximè recta C A, quæ bifariam dividitur in I, (ex dem.) Jam verò in



prædicto arcu sumptum est punctum B, non procul a vertice segmenti A B C, nam capta sunt tria observationum tempora æqualibus ferè intervallis ab invicem distantia, ita tamen ut tempus sit paulò majus ubi cometa tardiùs movetur. Præterea ducta est recta ad C A parallela concurrens in i cum normali erectâ a puncto I ad rectam C A, junctaque est secans S i, completumque parallelogrammum i I λ μ. Quia verò respectu immensæ Solis distantiæ, evanescit distantia punctorum I, μ; erit α ferè vertex segmenti A B C. Jungatur μ S, secans chordam A C in Y, erit μ Y, fere parallela i λ, ob immensam puncti S distantiam, ideóque λ Y, æqualis rectæ i μ, ac proindè et ipsi I λ. Sed (ex constr.) I σ sumpta est tripla ipsius I λ, quarè est etiam tripla ipsius λ Y et reliquæ Y σ, ideóque juncta σ S, (165.) ea ipsa est recta σ S, quæ exhibetur in Lem. VIII. id est, in rectâ σ S, producta versus S, reperitur punctum ξ, a quo ducta quævis recta chordam A C arcumque C B A secans, chordam secat in segmenta quæ eandem habent rationem cum temporibus quibus respondentes arcus a cometâ describuntur. Sed (ex constr.) $\sigma \xi = 3\ S \sigma + 3\ i \lambda$ et $i \lambda = I \mu$, sunt enim rectæ i λ, I μ diametri ejusdem parallelogrammi rectanguli, hinc $\sigma \xi = 3 \sigma S + 3\ I \mu$. Quarè (140.) punctum ξ, suprà inventum, illud est ex quo ducta utcumque recta dividit chordam C A in ratione temporum quibus binæ partes arcûs A C ab eâdem rectâ productâ notatæ, a cometâ describuntur. Deletâ igitur, ad vitandam confusionem, priore B E versus S ductâ, acta est nova versus ξ, quæ est ad priorem ut quadratum ipsius S B, ad quadratum ipsius $S \mu + \frac{1}{3} i \lambda$, hoc est propter æquales i λ, I μ ad quadratum ipsius $S \mu + \frac{1}{3} I \mu$, et S B est quamproximè æqualis ipsi S μ. Quarè nova B E, est ad priorem B E, ut $S \mu^2$, ad $S N^2$, positâ μ N triente ipsius I μ, sive i λ, ut in constr. Lem. X. Deinde gravitas acceleratrix versus Solem in loco N, est ad gravitatem acceleratricem versus eundem in loco B, vel μ, ut $S B^2$ vel $S \mu^2$ ad $S N^2$. Prætereà gravitates acceleratrices versus Solem in distantiis diversis, manentibus dictis viribus, sunt ut spatia eodem tempore versus Solem cadendo descripta; est igitur nova B E, ad priorem B E, ut spatium versus Solem cadendo percursum, urgente vi acceleratrice quæ urget in loco N, semisse temporis quo cometa describit arcum longitudinibus T A, T C, comprehensum, ad spatium eodem tempore versus Solem cadendo descriptum, urgente vi acceleratrice quæ urget in loco B. Sed æquales sunt hujus analogiæ consequentes, quare æquantur etiam antecedentes, ideóque nova recta B E æquatur spatio a grave cadente versus Solem percurso, semisse temporis quo cometa arcum A B C, in eclipticâ describit, urgente vi acceleratrice uniformiter continuatâ quæ in distantiâ S N, a Sole obtinet. At (Lem. XI.) spatium per quod corpus decidit versus Solem semisse temporis quo cometa describit arcum A B C, cùm urgetur vi acceleratrice uniformiter continuatâ quæ in loco N obtinet, æquale est rectæ μ Y, seg-

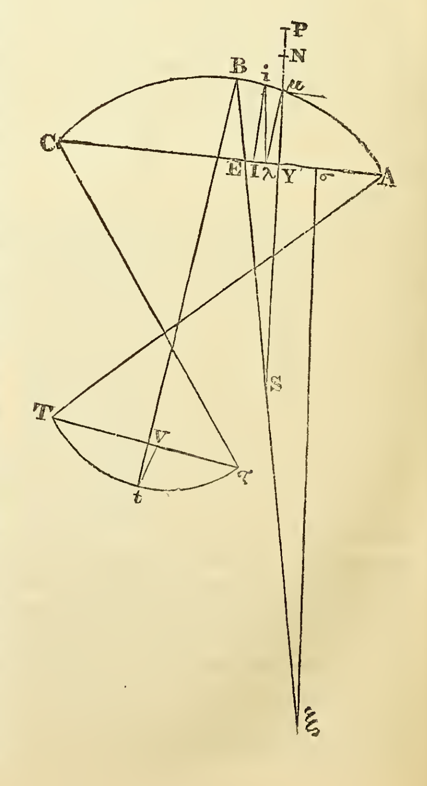
S μ + $\frac{2}{3}$ i λ. Deinde in M N versus N capiatur M P, quæ sit ad longitudinem supra inventam X, in subduplicatâ ratione mediocris distantiæ



Telluris a Sole (seu semi-diametri orbis magni) ad distantiam O D. Si punctum P incidat in punctum N, (t) erunt A, B, C tria loca cometæ, per quæ orbis ejus in plano eclipticæ describi debet.

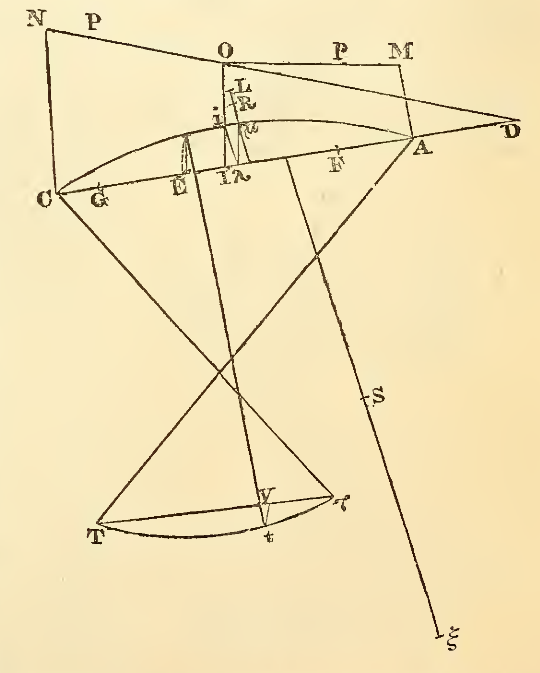
mento ipsius μ S, inter verticem μ et chordam A C intercepto, ac proinde æquatur quamproximè ipsi B E segmento rectæ B ξ, inter punctum B ipsi μ proximum et chordam A C comprehenso. Unde punctum E est in chordâ A C magis accurate quàm anteà, hoc est, chorda arcûs qui est vestigium portionis trajectoriæ cometicæ in plano eclipticæ, inter longitudines T A, T C interceptæ, per punctum E ultimò inventum transit quamproximè. Porrò chorda prædicta per E traducta inter T A, T C, ità locari debet ut A E sit ad E C, sicut tempus quo cometa describit eclipticæ arcum inter longitudines T A et t B, ad tempus quo arcum inter t B et T C describit (Lem. VIII.) sed A C ità (per Lem. VIII.) acta est per E, ut A E sit ad E C in eâdem illâ ratione, nempe sicut tempus inter observationem primam et secundam ad tempus inter observationem secundam et tertiam. Rectè igitur acta est A C, per E scilicet transiens et divisa in E ut oportebat, ac proinde si modò punctum B, rectè fuerit assumptum pro cometæ vestigio in observatione secundâ, puncta A, C sunt ejusdem vestigia quamproximè in observationibus primâ et tertiâ.

(t) * *Erunt A, B, C.* Superest jam ut dignoscatur an punctum B in mediâ longitudine rectè fuerit assumptum cometæ vestigium, ut error hinc ortus, si quis fuerit, corrigatur, reliquis, quæ hactenus facta sunt, manentibus. Deleto priore parallelogrammo i I λ μ, ad priorem minusque accuratam chordam C A constituto, describatur alterum ad posteriorem et accuratiorem chordam C A; eâdem adhibitâ constructione ut priùs. Ex punctis A, I, C, erigantur ad C A normales A M, I O, C N, sitque A M tangens notæ latitudinis in observatione primâ ad radium T A, et C N tan-



(u) Sin punctum P non incidat in punctum N, in rectâ A C capiatur C G ipsi N P æqualis, ita ut puncta G et P ad easdem partes rectæ N C jaceant.

gens latitudinis in observatione tertiâ ad radium T C; jungatur M N secans I O in O. Si erigatur trapezium A C N M normaliter ad planum eclipticæ manente rectâ C A, erunt puncta M, N loca vera cometæ, si modò punctum B sit ejus vestigium in plano eclipticæ in observatione secundâ, et planum transiens per tria puncta M, O, N, est planum trajectoriæ cometicæ, ideóque recta M N est chordâ arcûs trajectoriæ parabolicæ a cometâ descriptæ inter observationem primam et tertiam, et S M, S N sunt distantiæ cometæ a Sole in observatione primâ et tertiâ respective, hoc est, distantia vera cujusvis puncti trajectoriæ cometicæ a Sole est hypothenusa trianguli rectanguli cujus alterum latus est distantia a Sole vestigii illius puncti in plano eclipticæ, alterum autem est perpendiculum ex isto vestigio normaliter ad planum eclipticæ excitatum et ad punctum trajectoriæ terminatum. Quia verò aliqua ex istis perpendiculis sunt longiora ut N C, quædam breviora ut M A, inter hæc medium quoddam usurpetur, putà hic I O. Et universaliter loquendo, distantia cujusvis puncti trajectoriæ cometicæ a Sole erit quamproximè hypothenusa trianguli rectanguli cujus alterum latus est distantia puncti analogi in vestigio trajectoriæ descripto, et alterum latus est ipsa recta I O. Quibus positis in I A, eâve productâ capiatur $I D = S \mu + \frac{2}{3} i \lambda = S R$, factâ $L R = L \mu$, et jungatur D O, hæc quamproximè æquabitur puncti trajectoriæ cujus μ est vestigium distantiæ a Sole auctæ duabus tertiis rectæ interjectæ inter punctum istud et chordam arcûs trajectoriæ, ipsam scilicet M N in trapezio A C N M, id est, recta D O æqualis est rectæ in plano trajectoriæ cometæ analogæ ipsi S R in ejus vestigio in plano eclipticæ, hoc est D O æqualis est rectæ S R in parabolâ (Lem. X.). Jam (per Corol. 3. Prop. XL.) conferatur velocitas cometæ, dum in parabolicâ suâ trajectoriâ movetur in distantiâ a Sole æquali rectæ D O, cum velocitate Telluris circà Solem, et definiatur linea quam cometa, cum prædictâ velocitate æquabiliter motus, percurreret toto tempore quo Tellus arcum τ t T describit, sive toto tempore quo cometa arcum A B C in eclipticâ percurrit, in partibus arcûs T t τ a Tellure interim percursi. Id autem facile præstatur modo sequenti. Calculo inveniatur longitudo arcûs τ t T a Tellure descripti inter observationem primam et tertiam, posito quovis numero rotundo pro mediocri distantiâ Terræ a Sole, longitudo putà M P quæ est ad longitudinem priùs inventam X, in subduplicatâ ratione diametri orbis magni ad rectam notam D O, quæque proindè datur, est ipsa longitudo quæsita, ea nempe quam, cometa æquabiliter latus cum velocitate quam trajectoriam suam parabolicam describens habet ad distantiam a Sole æqualem rectæ D O, percurreret tempore quo cometa arcum cujus chorda M N reverâ percurrit. Nam (per Cor. 3. Prop. XL.) velocitas cometæ in hâc distantiâ D O, est ad velocitatem Telluris in prædictâ ratione. Sed (per Lem. X.) dicta longitudo M P æqualis est chordæ arcûs quem cometa isto tempore reverâ describit; quarè si reperiatur M P æqualis chordæ M N, hoc est, si punctum P incidat in punctum N rectè assumptum fuit punctum B in longitudine secundò observat pro vestigio cometæ, ideóque erunt A, B, C, tria loca cometæ per quæ orbis ejus in plano eclipticæ describi debet.

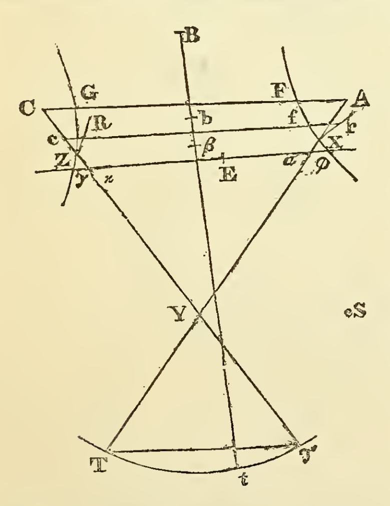


(u) * *Sin punctum P non incidat in punctum N,* in rectâ M N eâve productâ, si opus est, (vid. fig. præced.) capiantur M P, N P æquales longitudini priùs inventæ, capiantur etiam C G, C F, æquales M P, N P, ità ut G et P ad easdem partes rectæ N C jaceant. Præterea eâdem methodo quâ ex assumpto puncto B, inventa

Eadem methodo, quâ puncta E, A, C, G, ex assumpto puncto B inventa sunt, invenientur ex assumptis utcunque punctis aliis b et β puncta nova e, a, c, g et ε, α, κ, γ. Deinde si per G, g, γ ducatur circumferentia circuli G g γ, secans rectam τ C in Z: erit Z locus cometæ in plano eclipticæ. Et si in A C, a c, α κ capiantur A F, a f, α φ ipsis C G, c g, κ γ respectivè æquales, et per puncta F, f, φ ducatur circumferentia circuli F f φ, secans rectam A T in X; erit punctum X alius cometæ locus in plano eclipticæ. Ad puncta X et Z erigantur tangentes latitudinum cometæ ad radios T X et τ Z, et habebuntur loca duo cometæ in orbe proprio. Denique (per Prop. XIX. Lib. I.) umbilico S, per loca illa duo describatur parabola, et hæc erit trajectoria cometæ. Q. e. i.

(x) Constructionis hujus demonstratio ex Lemmatibus consequitur, quippe cùm recta A C secetur in E in ratione temporum, per Lemma

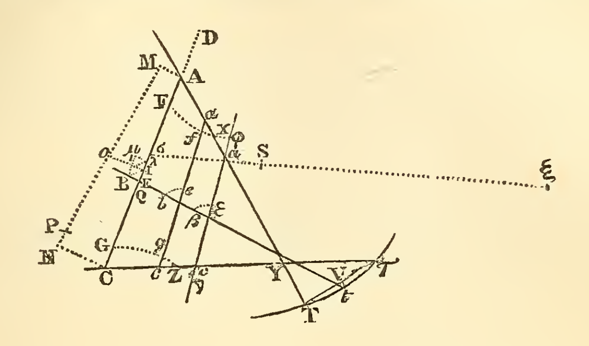
sunt puncta E, A, C, G, ex assumptis aliis punctis b et β, inveniantur nova puncta e, a, c, g, et ε, α, κ, γ. Quod si longitudo prius inventa M P, minor fuerit quàm M N, aut A G, vel C F, punctum b, sumendum erit propius puncto Y, in quo C τ et A T concurrunt, et ità porrò, ità ut saltem α γ, minor fiat quàm α κ. Per puncta G, g, γ, describatur circulus qui



rectam τ C, secabit inter G et κ, putà in Z, si puncta nova b, β, sumpta fuerint, ut jam diximus. Similiter per puncta F, f, φ, describatur circulus rectam T A intersecans in X, erunt puncta Z, X, loca cometæ ad eclipticam reducta, sive cometæ vestigia in observatione primâ et tertiâ, si B sit ejusdem vestigium in observatione secundâ. Idem similiter obtinet in a, c, et b, item in α, κ, et β. Jam verò demonstratum est locum B, esse vestigium cometæ in observatione secundâ si puncta N, P, coincidant, itemque A et F; quare si reliquis manentibus, coincidant puncta C, G, erit C, vestigium cometæ in observatione tertiâ Similiter coincidentibus punctis A, F, erit A, vestigium cometæ in observatione primâ. Ut autem puncta illa coinciderent, traductus est circulus transiens per tria puncta G, g, γ, rectam τ C, secans in Z. Cùm igitur punctum Z, sit tam in loco punctorum C, nempe rectâ τ C, quàm in loco punctorum G, nempe circulo, quandò punctum C reperitur in Z, punctum G in illo etiam reperietur, id est, in isto casu coincident puncta C, G, ideóque punctum Z est verum cometæ vestigium in plano eclipticæ in observatione tertiâ, huic enim conveniunt omnes conditiones requisitæ. Similiter ob easdem rationes, punctum X est verum cometæ vestigium in observatione primâ. Quarè si ex puncto Z, ad planum eclipticæ excitata intelligatur normalis Z R æqualis tangenti latitudinis notæ in observatione tertiâ ad radium τ Z, erit R locus verus cometæ in orbe proprio. Similiter ad planum eclipticæ erigatur perpendicularis X Y, æqualis tangenti latitudinis in observatione primâ ad radium T X, punctum Y, erit alter cometæ locus in orbe proprio. Quarè (per Prop. XIX. Lib. I.) umbilico S, per loca bina R, r, describatur parabola, hæc erit trajectoria cometæ. Quia verò parabolæ per puncta R, r, et umbilico S, descriptæ duplex positio esse potest (ut patet ex constr. Prop. XIX. Lib. I.) ex eodem umbilico S, et binis punctis R, r, duæ describi poterunt parabolæ; utra autem pro orbe cometæ sumenda sit ex aliâ quâvis cometæ observatione manifestum erit. Nam locus cometæ qui ex alterâ harum parabolarum colligetur, cum observato loco conveniet, locus autem ex alterâ parabolâ deductus nequaquam observationibus congruet.

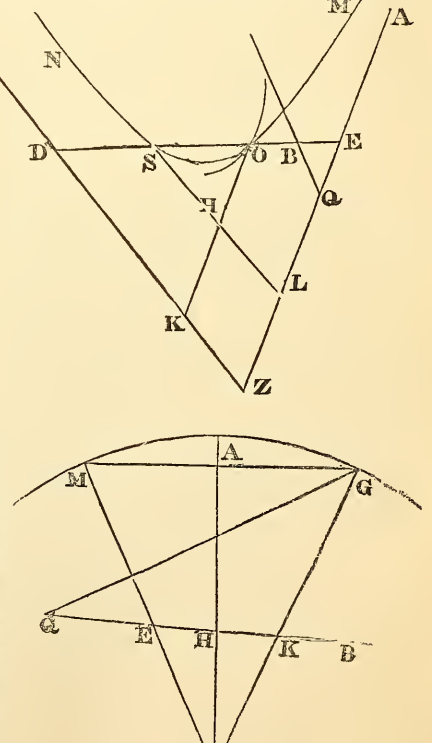
(x) * *Constructionis hujus demonstratio.* Patet ex notis præced.

VII. ut oportet per Lem. VIII.: et B E per Lem. XI. sit pars rectæ B S vel B ξ in plano eclipticæ arcui A B C et chordæ A E C interjecta;



et M P (per Corol. Lem. X.) longitudo sit chordæ arcus, quem cometa in orbe proprio inter observationem primam ac tertiam describere debet,

143. *Lemma.* Sit angulus rectilineus A Q B datumque punctum S; item sit curva M O N, talis ut per S ductâ quâvis rectâ S E sit B E, anguli lateribus intercepta, æqualis rectæ S O, erit curva M O N, hyperbola. Nam ducatur S L, ad B Q, parallela, occurrensque ipsi A Q in L; in rectâ Q L productâ capiatur L Z = L Q, agaturque Z D ad Q B parallela, itemque ducatur O K parallela ad Q Z: ob S O = B E (per hyp.) erit H O = Q E. Quarè cùm sit S H : H O = S L : L E = S L — S H : L E — H O = L H : L Q = L H : H K, erit S H × H K = H O × L H, hoc est, S L × H K — L H × H K = K O × L H — H K × L H. Unde erit S L × H K = K O × L H, vel Z L × L S = Z K × K O, ideóque curva M O N, est hyperbola cujus asymptoti Z A, Z S (Lem. I. de con.).



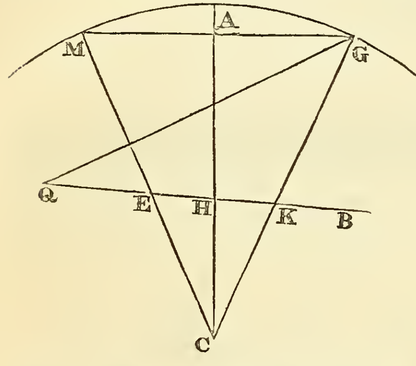
144. *Corol.* Hinc per datum punctum S, recta linea duci potest ità ut pars rectæ B E, lateribus anguli dati E Q B, intercepta, æqualis sit rectæ datæ. Nam descriptâ hyperbolâ M O N, centro S, intervallo datam rectam æquante, describatur circulus hyperbolam intersecans in O, et producatur S O E, erit B E æqualis rectæ datæ S O (143).

145. Newtonus in arithmeticâ universali, præcedentis Corollarii constructionem quæ fit per conchoidem more veterum, anteponendam esse ait constructioni quæ sectiones conicas adhibet. Quarè veterum constructionem utpotè simpliciorem hic quoque subjungemus. Sic autem describitur conchois. Agatur nempè recta Q B, ad quam erigatur normalis A H, deindè ex puncto C, tanquam polo ità ducantur rectæ

ideóque ipsi M N æqualis fuerit, si modò B sit verus cometæ locus in plano eclipticæ.

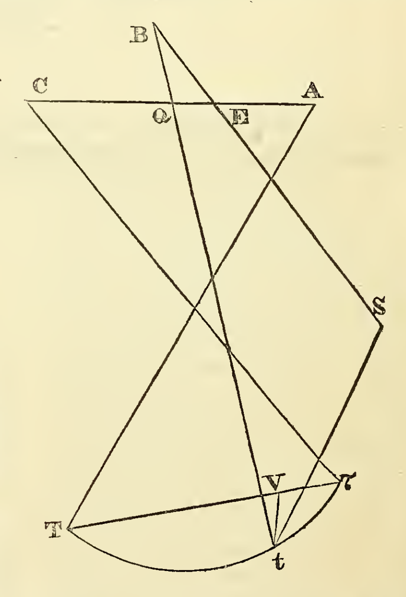
Cæterum puncta B, b, β non quælibet, sed vero proxima (y) eligere convenit. Si angulus A Q t, in quo vestigium orbis in plano eclipticæ descriptum secat rectam t B, præter propter innotescat; in angulo illo ducenda erit recta occulta A C, quæ sit ad $\frac{4}{3}$ T τ in subduplicatâ ratione S Q ad S t. Et agendo rectam S E B, cujus pars E B æquetur longi-

quotcumque C M, rectam Q B secantes in E, ut semper sit E M æqualis rectæ datæ A H, curva in quâ sunt puncta M, A, dicitur conchois. Jam verò inter latera anguli G Q B,



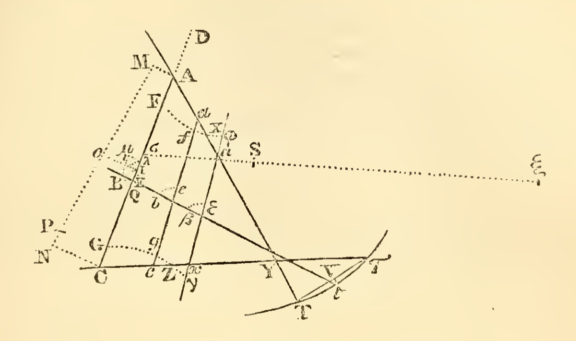
ducere oporteat rectam G K, quæ transeat per punctum datum C, et æqualis sit rectæ datæ C K, puncto C tanquam polo et intervallo dato A H = C K describatur conchois quæ occurrat rectæ C G, in G patet fore K G æqualem rectæ datæ C K. Q. e. f.

(y) * *Eligere convenit.* Si præter propter innotescat angulus quem vestigium orbitæ cometicæ continet cum rectâ Terram et cometam in observatione secundâ conjungente, sive huic æqualis angulus A Q t (Lem. IV. de con.) quem chorda A C continet cum rectâ t B, id quod præstari poterit per num. 133. tunc punctum B, primò assumendum hoc modo determinabitur. Ducatur recta A C, rectis positione datis T A, T C utrinque comprehensa, rectamque t B, positione datam, in angulo æquali dato in Q intersecans quæ sit ad $\sqrt{2} \times$ T t, hoc est, proximè ad $\frac{4}{3}$ T t, in subduplicatâ ratione S t ad S Q, et agatur per S, recta S E B, talis ut pars E B a cruribus anguli A Q B intercepta, æqualis sit rectæ t V (144. 145.) punctum B, itâ definitum, est illud ipsum quod commodè primâ vice usurpari poterit pro vestigio cometæ in plano eclipticæ. Ponatur B, esse vestigium cometæ in plano eclipticæ et arcum parabolicum per A, C, B transeuntem esse vestigium arcûs trajectoriæ inter observationem primam et tertiam descripti. Jam verò in hypothesi quod gravitas acceleratrix versùs Solem eâdem sit in distantiâ Telluris a Sole, atquè in distantiâ cometæ ab eodem, quæ est hypothesis Galilæi de gravitate, a verâ non multum distans, æquales

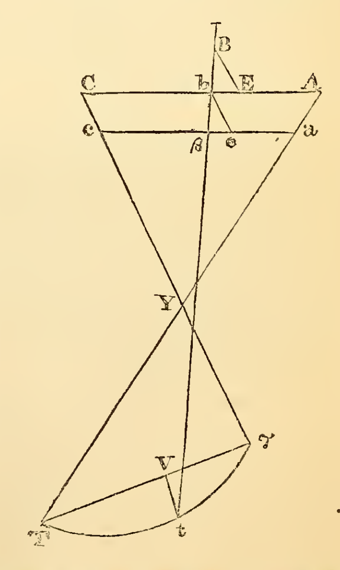


erunt B E, t V, utpotè spatia cadendo versùs Solem eodem tempore percursa a cometâ et a Tellure, ac proindè erit A C chorda parabolæ ad $\sqrt{2} \times$ T t chordam circuli cujus centrum cum umbilico parabolæ coincidit in subduplicatâ ratione rectæ S t, ad rectam S E, (Cor. 7. Prop. XVI. Lib. I.) Sed sumpta est A C ad $\sqrt{2} \times$ T t in subduplicatâ ratione S t ad S Q, et A C secat rectam t B in angulo A Q t, sicut oportebat, atque B E æqualis est ipsi t V; quarè recta A C obtinet quamproximè omnes conditiones requisitas ut sit chorda arcûs qui est vestigium trajectoriæ cometicæ inter longitudinem primam T A, et tertiam interceptæ, ac proindè punctum B, habet omnes conditiones ut sit proximè vestigium cometæ in observatione secundâ. Rectè igitur determinatum est punctum B, quod primâ vice usurpare licet.

tudini V t, determinabitur punctum B quod primâ vice usurpare licet. (z) Tum rectâ A C deletâ et secundùm præcedentem constructionem



iterum ductâ, et inventâ insuper longitudine M P; in t B capiatur punctum b, e lege, ut si T A, ♈ C se mutuò secuerint in Y, sit distantia Y b ad distantiam Y B, in ratione compositâ ex ratione M P ad M N et ratione subduplicatâ S B ad S b. Et eâdem methodo inveniendum erit punctum tertium β si modò operationem tertiò repetere lubet. Sed hâc methodo operationes duæ ut plurimum suffecerint. Nam si distantia B b

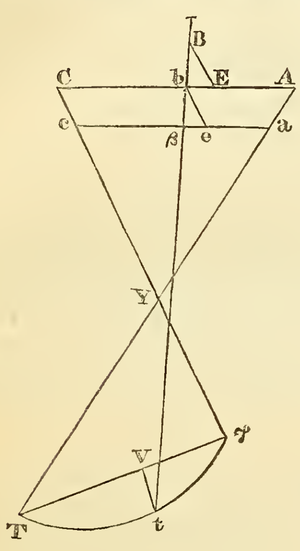


(z) * *Tum rectâ A C, deletâ.* Determinato puncto B, quòd primâ vice licet usurpare, cætera, quæ deinceps assumuntur puncta nempè b, β, aliam constructionem postulant. Nec satis est quod punctum b, sumatur propius puncto Y, dum linea M P, minor est quàm A C vel M N (in fig. Newt.) et contrà. Sed quia ducere oportet rectam A C, quæ sit æqualis longitudini M P, capiatur in t B, punctum b, eâ lege ut sit distantia Y b, ad distantiam Y B, in ratione compositâ ex ratione M P ad A C, et ratione subduplicatâ S B ad S b. Ex hactenus dictis patet cur prior ratio componens adhibeatur; cùm enim invenienda sit A C, quæ sit longitudini M P æqualis, si illa hâc sit major aut minor, minuenda erit vel augenda donec æquales fiant, æquarentur autem per solam priorem rationem si M P foret constans. Quia verò variante A C, perpetuò quoque variabilis est recta M P, ideò adhibenda est altera ratio. Jam in parabolis per puncta A, B, C, et a, b, c, descriptis, chordæ arcuum A B C, a b c, in quibus æquales sunt rectæ B E, b e, ad umbilicum S tendentes inter verticem et chordam interceptæ, sunt in ratione subduplicatâ rectarum S B, S b (ut colligitur ex Theor. I. et II. de parab.). Præthereà (ex dem.) æquales sunt rectæ B E, b e quamproximè; sunt enim spatia a cometâ versus Solem cadendo in diversis ab illo distantiis eodem tempore percursa, et vestigium cometæ in observatione secundâ proximum est vertici arcûs A B C, seu vestigii portionis trajectoriæ a cometâ inter observationem primam et tertiam descriptæ. Quarè habetur punctum b, cometæ vestigium in plano eclipticæ, non tamen accuratum, sed vero proximum duntaxat.

perexigua obvenerit; postquam inventa sunt puncta F, f et G, g, actæ rectæ F f et G g secabunt T A et ♈ C (*) in punctis quæsitis X et Z.

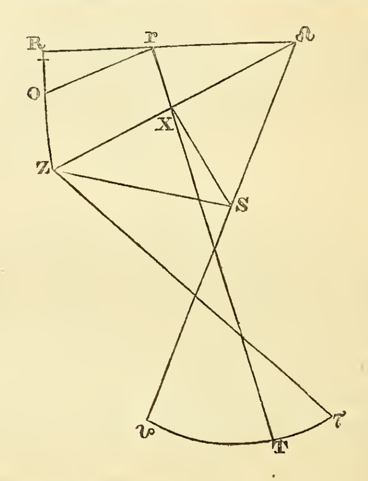
(*) * *In punctis quæsitis X et Z.* (Ut patet ex notâ (u), in hanc Prop.).

146. Si elliptica cometæ orbita magis accuratè observationibus satisfacere deprehendatur, ea sic poterit describi. Reperiatur vestigium cometæ in plano eclipticæ in observatione secundâ, eundem ordinem situmque obtinet vestigium illud



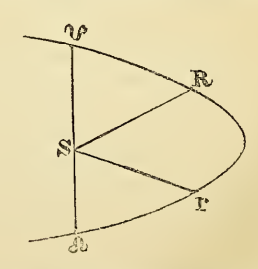
inter puncta B, b, β, quem punctum Z, inter C, c, κ, vel X, inter A, a, α. Ex vestigio sic invento, ad planum eclipticæ erigatur normalis quæ est tangens latitudinis in observatione secundâ ad radium æqualem distantiæ inter locum t, dictumque vestigium. Hujus perpendiculi extremum punctum signabit locum cometæ in orbitâ propriâ secundò observatum. Denique umbilico S, per puncta X, Z, et punctum modò inventum describatur ellipsis (Prop. XX. Lib. I.), hæc erit quæsita cometæ trajectoria.

147. Ex præcedentis Problematis solutione colligi possunt positio lineæ nodorum trajectoriæ et tempus quo cometa nodos tenet. Iisdem manentibus, et per easdem litteras designatis ut suprà, producuntur rectæ Z X, R r, donec concurrant in ☊, junganturque S Z, S X, S ☊ jam verò (ex præced.) data sunt omnia puncta S, Z, X, ideóque trianguli S Z X, tam latera quàm anguli, ac proinde innotescit etiam angulus S X ☊. Ex loco r, ducatur r O, ad Z X parallela rectæ R Z, occurrens in O, erunt triangula R O r et r X ☊, æquiangula, ideóque cùm ex notis lateribus O r = Z X, et O R, differentiâ notarum rectarum R Z et r X unâ cum angulo recto R O r, innotescant reliqua latera et anguli, dabuntur quoque anguli trianguli r X ☊. Sed datur in hoc triangulo latus unum X r, dabuntur ergò et reliqua nempè X ☊ et r ☊. Deindè in triangulo ☊ X S, nota sunt latera X S, X ☊, cum angulo inter-



cepto S X ☊, innotescet itaque angulus X S ☊. Sed datur (per observ.) positio rectæ S X, sivè angulus quem facit cum T X. Nam in triangulo X T S, dantur latera T S, T X et angulus X T S, distantia inter locum Solis cognitum locumque cometæ primò observatum. Unde innotescit T X S, ac proindè et positio rectæ ☊ S ☋, hoc est, dabuntur loca nodorum e Sole visa. Quod si æquales fuerint rectæ Z R, X r, nodorum linea parallela est rectæ Z X, ideóque positione cognita.

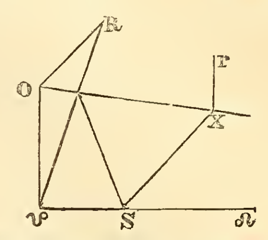
Ad determinandum tempus quo cometa in nodo versatur, sit R r, trajectoria cometæ (per



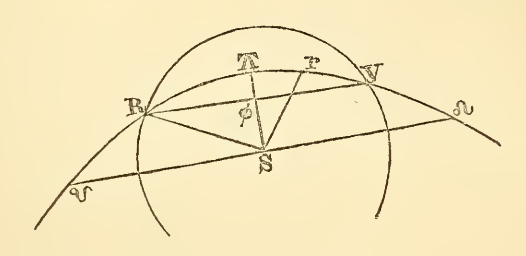
Prop. præced.) descripta, sitque superius inventa nodorum linea ☊ S ☋, trajectoriæ in ☊ et ☋ occurrens, erit (Prop. I. Lib. I.) intervallum

temporis inter observationem primam et momentum quo cometa ad nodum ☊ appellit, ad intervallum temporis inter observationem primam et tertiam ut area r ☊ S, ad aream R S r; sed arearum r ☊ S, R S r, nota est ratio (per Theor. IV. de parab. vel num. 142.) notum igitur est tempus quo cometa nodum ☊, tenet. Pari modo innotescit tempus quo cometa ad nodum alterum ☋ appellit.

148. Iisdem manentibus, determinabitur inclinatio plani trajectoriæ ad planum eclipticæ. Ex puncto O ad ☋ S ☊, nodorum lineam erigatur perpendicularis O ☋, jungaturque R ☊. In triangulo O S ☋, præter rectum ad ☋, dantur (147.) angulus O S ☋ et latus O S, quare datur O ☋. Deinde in triangulo R O ☋, dantur latera circà rectum O R et O ☋, ideóque notus



erit angulus O ☋ R, qui est inclinatio plani trajectoriæ ad planum eclipticæ.



149. Facilè obtineri potest tempus quo cometa perihelium tenet. Umbilico S, per puncta R, r, describatur trajectoria cometæ. Centro S, per alterutrum punctorum putà R, describatur circulus trajectoriæ denuò occurrens in V, jungaturque R V, ad quem ex puncto S demittatur perpendicularis S ϕ, quæ producatur donec parabolæ occurrat in π, erit π trajectoriæ perihelium; et proindè recta ipsius S π quadrupla, erit ejusdem latus rectum principale. Cùm enim umbilicus S, in parabolæ axe reperiatur, circulus centro S descriptus parabolam intersecabit in duobus punctis ab axe æqualiter distantibus, ac proinde axi normalis, erit R V intersectiones conjungens; quarè S ϕ est axis et π vertex parabolæ, sivè trajectoriæ perihelium et quadrupla S π parameter diametri cujus π est vertex (Theor. II. de parab.) hoc est, latus rectum principale. Jam capiatur tempus cujus intervallum ab observatione primâ, dum cometa versabatur in r, est ad intervallum temporis inter observationem primam et tertiam ut area r S π ad aream R r S, habebitur illud ipsum tempus quo cometa perihelium occupat.

150. Hinc etiam cometæ perigæum ejusque tempus determinabitur. Cùm enim detur tempus inter observationem primam et tertiam interceptum, quo scilicet data area r R S, a cometâ radio ad Solem ducto describitur, data quoque erit area uno die similiter descripta. Præterea datur r, locus cometæ in observatione primâ, quare dabuntur loca cometæ in proprio orbe ad dies singulos. Sed dantur loca Telluris in orbitâ suâ, notusque est situs mutuus inter Telluris orbitam et cometæ trajectoriam. Unde innotescet tempus quo cometa est Terræ proximus, hoc est, tempus quo cometa in perigæo versatur.

Exemplum.

Proponatur cometa anni 1680. Hujus motum a Flamstedio observatum et ex observationibus computatum, atque ab Halleio ex iisdem observationibus correctum, tabula sequens exhibet.

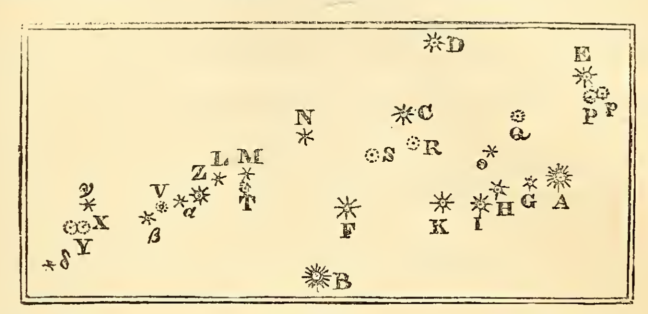
	Tem. appar.	Temp. verum	Long. Solis	Cometæ Longitudo	Cometæ Lat. bor.
	h. ′	h. ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″
1680. *Dec.* 12	4. 46	4. 56. 0	♑ 1. 51. 23	♑ 6. 32. 30	8. 28. 0
21	6. 32½	6. 36. 59	11. 6. 44	♒ 5. 8. 12	21. 42. 13
24	6. 12	6. 17. 52	14. 9. 26	18. 49. 23	25. 23. 5
26	5. 14	5. 20. 44	16. 9. 22	28. 24. 13	27. 0. 52
29	7. 55	8. 3. 2	19. 19. 43	♓ 13. 10. 41	28. 9. 58
30	8. 2	8. 10. 26	20. 21. 9	17. 38. 20	28. 11. 53
1681. *Jan.* 5	5. 51	6. 1. 38	26. 22. 18	♈ 8. 48. 53	26. 15. 7
9	6. 49	7. 0. 53	♒ 0. 29. 2	18. 44. 4	24. 11. 56
10	5. 54	6. 6. 10	1. 27. 43	20. 40. 50	23. 43. 52
13	6. 56	7. 8. 55	4. 33. 20	25. 59. 48	22. 17. 28
25	7. 44	7. 58. 42	16. 45. 36	♉ 9. 35. 0	17. 56. 30
30	8. 7	8. 21. 53	21. 49. 58	13. 19. 51	16. 42. 18
Feb. 2	6. 20	6. 34. 51	24. 46. 59	15. 13. 53	16. 4. 1
5	6. 50	7. 4. 41	27. 49. 51	16. 59. 6	15. 27. 3

His adde observationes quasdam e nostris.

	Tem. appar.	Cometæ Longitudo	Cometæ Lat. bor.
1681. *Feb.* 25	8h. 30′	♉ 26°. 18′. 35″	12°. 46′. 46″
27	8. 15	27. 4. 30	12. 36. 12
Mar. 1	11. 0	27. 52. 42	12. 23. 40
2	8. 0	28. 12. 48	12. 19. 38
5	11. 30	29. 18. 0	12. 3. 16
7	9. 30	♊ 0. 4. 0	11. 57. 0
9	8. 30	0. 43. 4	11. 45. 52

Hæ observationes telescopio septupedali, et micrometro filisque in foco telescopii locatis peractæ sunt: quibus instrumentis et positiones fixarum inter se et positiones cometæ ad fixas determinavimus. Designet A stellam quartæ magnitudinis in sinistro calcaneo Persei (Bayero o) B stellam sequentem tertiæ magnitudinis in sinistro pede (Bayero ζ) et C stellam sextæ magnitudinis (Bayero n) in talo ejusdem pedis, ac D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, O, Z, α, β, γ, δ stellas alias minores in eodem pede.

Sintque p, P, Q, R, S, T, V, X, loca cometæ in observationibus infra descriptis: et existente distantiâ A B partium $80\frac{7}{12}$, erat A C partium $52\frac{1}{4}$, B C $58\frac{5}{6}$, A D $57\frac{5}{12}$, B D $82\frac{6}{11}$, C D $23\frac{2}{3}$, A E $29\frac{4}{7}$, C E $57\frac{1}{2}$, D E $49\frac{11}{12}$, A I $27\frac{7}{12}$, B I $52\frac{1}{6}$, C I $36\frac{7}{12}$, D I $53\frac{5}{11}$, A K $38\frac{2}{3}$, B K 43,



C K $31\frac{5}{9}$, F K 29, F B 23, F C $36\frac{1}{4}$, A H $18\frac{6}{7}$, D H $50\frac{7}{8}$, B N $46\frac{5}{12}$, C N $31\frac{1}{3}$, B L $45\frac{1}{12}$, N L $31\frac{5}{7}$. H O erat ad H I ut 7 ad 6 et producta transibat inter stellas D et E, sic ut distantia stellæ D ab hâc rectâ esset $\frac{1}{6}$ C D. L M erat ad L N ut 2 ad 9, et producta transibat per stellam H. His determinabantur positiones fixarum inter se.

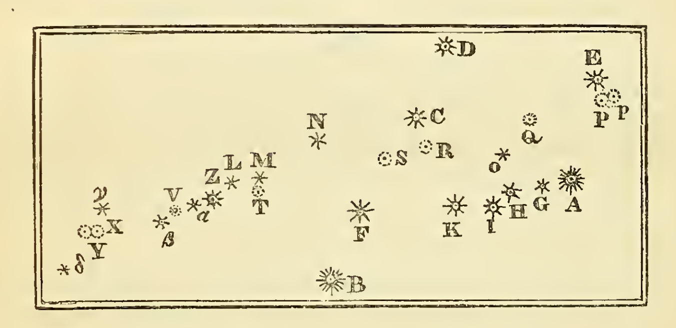
Tandem Poundius noster iterum observavit positiones harum fixarum inter se, et earum longitudines et latitudines in tabulam sequentem retulit.

Fixarum.	Longitudines.			Lat. boreæ.		
	°	′	″	°	′	″
A	♉ 26.	41.	50	12.	8.	3
B	28.	40.	23	11.	17.	54
C	27.	58.	30	12.	40.	25
E	26.	27.	17	12.	52.	7
F	28.	28.	37	11.	52.	22
G	26.	56.	8	12.	4.	58
H	27.	11.	45	12.	2.	1
I	27.	25.	2	11.	53.	11
K	27.	42.	7	11.	53.	26
L	29.	33.	34	12.	7.	48
M	29.	18.	54	12.	7.	20
N	28.	48.	29	12.	31.	9
Z	29.	44.	48	11.	57.	13
α	29.	52.	3	11.	55.	48
β	♊ 0.	8.	23	11.	48.	56
γ	0.	40.	10	11.	55.	18
δ	1.	3.	20	11.	30.	42

Positiones verò cometæ ad has fixas observabam ut sequitur.

Die Veneris Feb. 25. st. vet. hor. $8\frac{1}{2}$ p. m. cometæ in p existentis distantia a stellâ E erat minor quàm $\frac{3}{13}$ A E, major quàm $\frac{1}{5}$ A E, ideóque æqualis $\frac{3}{14}$ A E proxime: et angulus A p E nonnihil obtusus erat, sed ferè rectus. Nempe si demitteretur ad p E perpendiculum ab A, distantia cometæ a perpendiculo illo erat $\frac{1}{5}$ p E.

Eâdem nocte horâ $9\frac{1}{2}$, cometæ in P existentis distantia a stellâ E erat major quàm $\frac{1}{4\frac{1}{2}}$ A E, minor quam $\frac{1}{5\frac{1}{4}}$ A E, ideóque æqualis $\frac{1}{4\frac{7}{8}}$ A E, seu $\frac{8}{39}$ A E quamproximè. A perpendiculo autem a stellâ A ad rectam P E demisso distantia cometæ erat $\frac{4}{5}$ P E.



Die Solis Feb. 27. hor. $8\frac{1}{4}$ p. m. cometæ in Q existentis distantia a stellâ O æquabat distantiam stellarum O et H, et recta Q O producta transibat inter stellas K et B. Positionem hujus rectæ ob nubes intervenientes magis accuratè definire non potui.

Die Martis Mart. 1. hor. 11. p. m. cometa in R existens, stellis K et C accuratè interjacebat, et rectæ C R K pars C R paulo major erat quàm $\frac{1}{3}$ C K, et paulo minor quàm $\frac{1}{3}$ C K + $\frac{1}{8}$ C R, ideóque æqualis $\frac{1}{3}$ C K + $\frac{1}{16}$ C R seu $\frac{16}{45}$ C K.

Die Mercurii Mart. 2. hor. 8. p. m. cometæ existentis in S distantia a stellâ C erat $\frac{4}{9}$ F C quamproximè. Distantia stellæ F a rectâ C S producta erat $\frac{1}{24}$ F C; et distantia stellæ B ab eâdem rectâ, erat quintuplo major quàm distantia stellæ F. Item recta N S producta transibat inter stellas H et I, quintuplo vel sextuplo propior existens stellæ H quàm stellæ I.

Die Saturni Mart. 5. hor. $11\frac{1}{2}$ p. m. cometâ existente in T, recta M T æqualis erat $\frac{1}{2}$ M L, et recta L T producta transibat inter B et F, quadruplo vel quintuplo propior F quàm B, auferens a B F quintam vel sextam ejus partem versus F. Et M T producta transibat extra spatium B F ad partes stellæ B, quadruplo propior existens stellæ B quàm stellæ F.

Erat M stella perexigua quæ per telescopium videri vix potuit, et L stella major quasi magnitudinis octavæ.

Die Lunæ Mart. 7. hor. $9\frac{1}{2}$ p. m. cometâ existente in V, recta V α producta transibat inter B et F, auferens a B F versus F $\frac{1}{10}$ B F, et erat ad rectam V β ut 5 ad 4. Et distantia cometæ a rectâ $\alpha\ \beta$ erat $\frac{1}{2}$ V β.

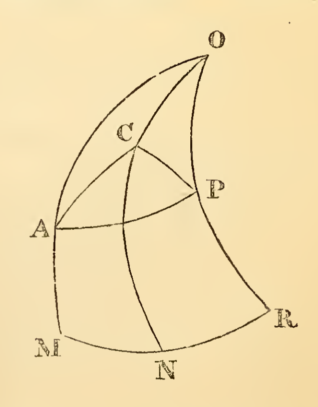
Die Mercurii Mart. 9. horâ $8\frac{1}{2}$ p. m. cometâ existente in X, recta γ X æqualis erat $\frac{1}{4}\ \gamma\ \delta$, et perpendiculum demissum a stellâ δ ad rectam γ X erat $\frac{2}{5}\ \gamma\ \delta$.

Eâdem nocte horâ 12, cometâ existente in Y, recta γ Y æqualis erat $\frac{1}{3}\ \gamma\ \delta$, aut paulo minor, putà $\frac{5}{16}\ \gamma\ \delta$, et perpendiculum demissum a stellâ δ ad rectam γ Y æqualis erat $\frac{1}{6}\ \gamma\ \delta$ vel $\frac{1}{7}\ \gamma\ \delta$ circitèr. Sed cometa ob viciniam horizontis cerni vix potuit, nec locus ejus tam distinctè ac in præcedentibus definiri.

Ex hujusmodi observationibus per constructiones figurarum et computationes derivabam ([a]) longitudines et latitudines cometæ, et Poundius noster ex correctis fixarum locis loca cometæ correxit, et loca correcta habentur supra. Micrometro parùm affabrè constructo usus sum, sed longitudinum tamen et latitudinum errores (quatenus ex observationibus nostris oriantur) minutum unum primum vix superant. . Cometa autem (juxta observationes nostras) in fine motûs sui notabiliter deflectere cœpit boream versùs, a parallelo quem in fine mensis Februarii tenuerat.

([a]) 149. * *Longitudines et latitudines.* Si observentur distantiæ cometæ a duabus fixis quarum longitudines et latitudines notæ sunt, invenientur cometæ longitudo et latitudo ad tempus observationis. Referat M R, portionem eclipticæ cujus polus O, sint A, P duæ stellæ quarum longitudines et latitudines datæ sunt, sitque C cometa cujus distantia a duabus stellis A, P nota sit. In triangulo A O P, ex datis A O, P O complementis latitudinum stellarum et angulo A O P cujus mensura est arcus M R differentia longitudinum, dabitur A P distantia stellarum, atque innotescet angulus O P A. Jam verò in triangulo A C P dantur omnia latera, unde invenietur angulus C P A, quo subtracto ex angulo O P A relinquetur angulus O P C. Quarè dabitur angulus P O C cujus mensura est arcus N R, differentia scilicet longitudinum stèllæ P et cometæ C. Item innotescet arcus O C, qui est complementum latitudinis cometæ. Eâdem prorsus ratione, si observentur distantiæ cometæ a duabus fixis quarum ascensiones rectæ et declinationes notæ sunt, indè colligentur ascensio recta et declinatio cometæ.

150. Datis declinatione et ascensione rectâ alicujus stellæ fixæ, inveniri possunt declinatio et ascensio recta cometæ, modò tamen stella et cometa transire vicissim possint per campum telescopii immoti aut alio quocumque modo obtineatur differentia declinationis et ascensionis rectæ inter fixam et cometam (39. Lib. III.) et



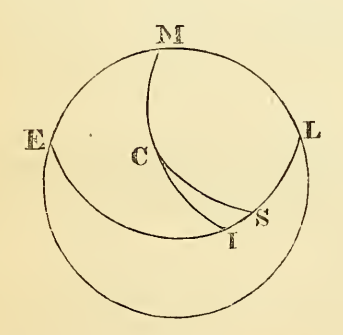
hinc dabuntur cometæ longitudo et latitudo (17. Lib. III.).

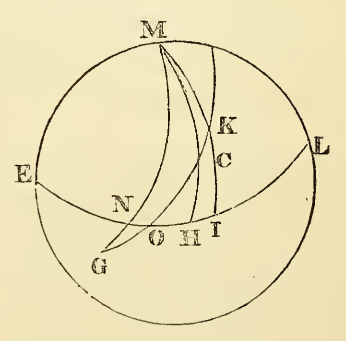
151. Datis cometæ longitudine et latitudine, simulque notâ longitudine Solis, datur distantia

Jam ad orbem cometæ determinandum, selegi ex observationibus hactenus descriptis, tres quas Flamstedius habuit Dec. 21. Jan. 5. et Jan. 25. (b) Ex his inveni Ṡ t partium 9842.1 et V t partium 455, quales 10000 sunt semi-diameter orbis magni. Tum ad operationem primam assumendo t B partium 5657, inveni S B 9747, B E primâ vice 412, S μ 9503, i λ 413 : B E secundâ vice 421, O D 10186, X 8528.4 M P 8450,

cometæ a Sole. Sit enim E L portio eclipticæ, Sol in S, latitudo cometæ C I; in triangulo C I S, ad I rectangulo (7. Lib. III.) datur latus C I, itemque notum est latus I S differentia longitudinum Solis et cometæ, ideóque innotescit distantia cometæ a Sole C S.

152. Si duobus diebus sese invicem immediatè subsequentibus observentur longitudines H, I et latitudines C H, K I cometæ alicujus, dabitur arcus K C quem cometa motu diurno proprio descripsit. Quoniam enim in triangulo K M C, datur angulus quem metitur arcus I H longitudinum differentia, simulque nota sunt latera K M, C M, quæ sunt datarum latitudinum K I, C H complementa, innotescet arcus K C. Si verò altera latitudo fuerit australis, putâ C H, altera borealis ut G N, latus G M est summa





latitudinis G N et quadrantis N M, ac proindè etiam in hoc casu dabitur arcus C G.

153. Iisdem manentibus, inveniri potest nodus O orbitæ cometæ, datis enim in triangulo M C K lateribus M C, M K, cum angulo intercepto M quem metitur longitudinum datarum differentia H I, dabitur angulus M K C, qui ex 180°. subductus, relinquit angulum O K I. Jam verò datis triangulo O K I, ad I rectangulo, latitudine I K, et angulo O K I, invenitur angulus I O K, daturque arcus O I, quo addito longitudini I, obtinetur distantia nodi O a principio Arietis. Ex præcedentibus patet, datis duabus ascensionibus rectis et declinationibus, inveniri quoque motum cometæ proprium, inclinationem orbitæ ad æquatorem et punctum in quo orbita illa æquatorem intersecat.

154. Iisdem positis sit K locus cometæ primò observatus, a loco nodi O subtrahatur longitudo cometæ I, relinquetur arcus O I. Datis in triangulo K O I, ad I rectangulo, lateribus K I, O I, dabitur arcus K O quem cometa a primo observationis die usque ad eclipticam descripsit. Jam verò arcus K O conferatur cum arcubus descriptis ab initio observationis cometæ in K, ad datum usque aliquod momentum singulis diebus pro arbitrio assumptum. Hinc proportionali parte adhibitâ, circiter colligetur tempus quo cometa secuit eclipticam. Simili modo invenietur tempus quo trajecit æquatorem.

155. Si cometa primò observetur in eâdem rectâ cum duabus fixis, deinde in aliâ quoque rectâ cum duabus aliis fixis observetur, accuratè trajectis per quatuor illas stellas duobus filis in superficie globi cœlestis, intersectio filorum determinabit locum cometæ pro tempore observationis. Si eodem modo definiantur alia cometæ loca, illius semita in superficie globi cœlestis delineabitur.

156. Accuratè designatis in superficie globi cometæ locis, filum duobus locis applicatum per cætera omnia propemodum transire videbitur; hæc igitur loca ferè sunt in peripheriâ circuli maximi, ideóque cometa ex Terrâ in circuli maximi peripheriâ incedere apparebit. Quarè si filum per duo loca transiens extendatur donec eclipticam et æquatorem secet, habebuntur locus nodi, et inclinatio orbitæ cometicæ simulque punctum in quo cometa trajicit æquatorem.

(b) * *Ex his inveni.* Quâ ratione sequentes determinationes possint inveniri vel graphicè vel arithmeticè, patet ex constructione Prop. præced. et ex iis quæ huic Propositioni addidimus.

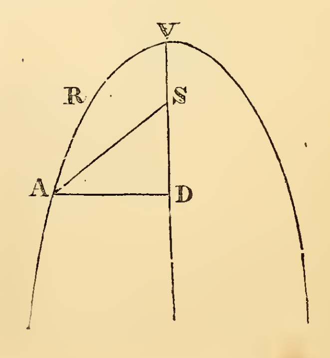
M N 8475, N P 25. Unde ad operationem secundam collegi distantiam t b 5640. Et per hanc operationem tandem distantias T X 4775 et τ Z 11322. Ex quibus orbem definiendo, inveni nodos ejus descendentem in ♋ et ascendentem in ♑ 1^{gr}. 53′; inclinationem plani ejus ad planum eclipticæ 61^{gr}. 20$\frac{1}{3}$′; verticem ejus (seu perihelium cometæ) distare a nodo 8^{gr}. 38′, et esse in ♐ 27^{gr}. 43′. cum latitudine australi 7^{gr}. 34′; et ejus latus rectum esse 236.8, areamque radio ad Solem ducto singulis diebus descriptam 93585, quadrato semi-diametri orbis magni posito 100000000; cometam verò in hoc orbe secundum seriem signorum processisse, et Decemb. 8^{d}. 0^{h}, 4′. p. m. in vertice orbis seu perihelio fuisse. Hæc omnia per scalam partium æqualium et chordas angulorum ex tabulâ sinuum naturalium collectas determinavi graphicè, construendo schema satis amplum, in quo videlicet semi-diameter orbis magni (partium 10000) æqualis esset digitis 16$\frac{1}{3}$ pedis Anglicani.

Tandem ut constaret an cometa in orbe sic invento verè moveretur, collegi per operationes partim arithmeticas partim graphicas loca cometæ in hoc orbe ad observationum quarundam tempora: uti in tabulâ sequente videre licet

	Dist. Comet. a Sole.	Long. Collect.	Lat. Collect.	Long. Obs.	Lat. Obs.	Differ. Long.	Differ. Lat.
		gr.	gr.	gr. ′	gr. ′	′	′
Dec. 12	2792	♑ 6. 32′	8. 18$\frac{1}{2}$	♑ 6. 31$\frac{1}{3}$	8. 26	+ 1	− 7$\frac{1}{2}$
29	8403	♓ 13. 13$\frac{2}{3}$	28. 0	♓ 13. 11$\frac{3}{4}$	28. 10$\frac{1}{12}$	+ 2	− 10$\frac{1}{12}$
Feb. 5	16669	♉ 17. 0	15. 29$\frac{2}{3}$	♉ 16. 59$\frac{7}{8}$	15. 27$\frac{2}{5}$	+ 0	+ 2$\frac{1}{4}$
Mar. 5	21737	29. 19$\frac{3}{4}$	12. 4	29. 20$\frac{6}{7}$	12. 3$\frac{1}{2}$	− 1	+ $\frac{1}{2}$

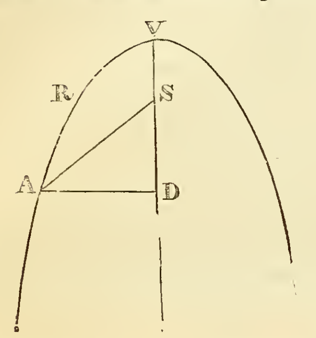
Postea verò Halleius noster orbitam (c) per calculum arithmeticum accuratiùs determinavit, quàm per descriptiones linearum fieri licuit; et

(c) 157. * *Per calculum arithmeticum.* Calculi hujus instituendi methodum exponemus. Sit S Sol, V R A orbita cometæ parabolica, cujus vertex V, sitque V S, distantia umbilici a vertice = f, erit parabolæ latus rectum principale = 4 f. Fiat A D = x, erit spatium $V R A S = \frac{x^3 + 12 f^2 x}{24 f}$ (140). Ponatur area illa dato rectilineo æqualis putâ b b, habebitur æquatio $24 f b b = x^3 + 12 f^2 x$. Resolutâ hâc æquatione cubicâ per vulgares algebræ regulas, vel per constructionem geometricam, adhibitis parabolâ et circulo, innotescet ordinatim applicata A D. Datâ autem A D, dabitur V D, (per Theor. II. de parab.) quare nota quoque erit recta composita ex D V et V S, cui æqualis est recta S A, (ibid.), ideóque recta illa dabitur



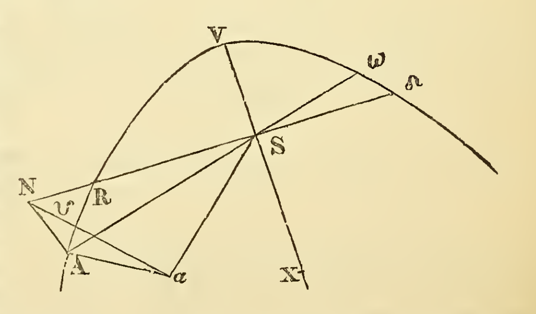
retinuit quidem locum nodorum in ♋ et ♑ $1^{gr}. 53'$. et inclinationem plani orbitæ ad eclipticam $61^{gr}. 20\frac{1}{3}'$. ut et tempus perihelii cometæ Decemb. $8^{d}. 0^{h}. 4'$: distantiam verò perihelii a nodo ascendente in orbitâ cometæ mensuratam invenit esse $9^{gr}. 20'$. et latus rectum parabolæ esse 2430 partium, existente mediocri Solis a Terrâ distantiâ partium 100000. Et ex

magnitudine. Præterea datur etiam D A, quarè nota est ratio inter S A et A D, id est, inter radium et sinum rectum anguli A S D,



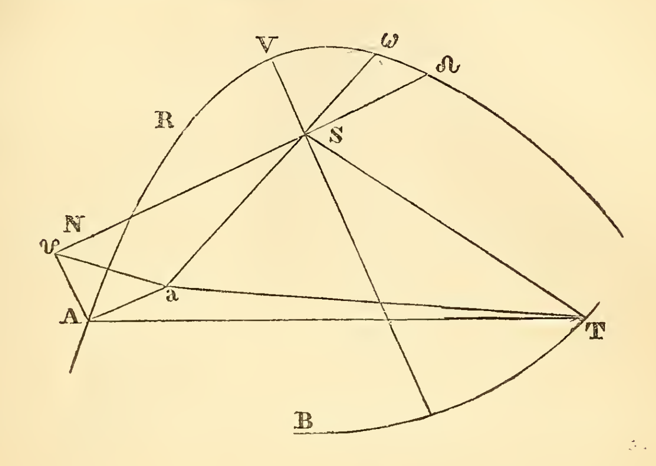
quem scilicet S A cum axe comprehendit, ideóque datur angulus ille. Sed data est S A longitudine, quarè rectæ S A longitudo et inclinatio ad axem calculo determinari possunt.

158. Referat ♌ ω V, cometæ trajectoriam in cujus umbilico S collocatur Sol, sitque ω punctum quod cometa occupavit in aliquâ harum observationum quarum ope trajectoria definita fuit. Trajectoriæ hujus sit axis V X positione datus; innotescat tempus quo cometa in perihelio V versatur, sitque ♌ ♈ linea nodorum positione cognita. Si cometæ trajectoria inventa fuerit parabolica, capiatur spatium quod sit ad spatium ω V S, cognitum (per Theor. IV. de parab.) ut intervallum inter tempus datum et suprà inventum momentum quo cometa perihelium attingit, ad intervallum inter prædictum momentum et observationem cometæ in ω; ponatur spatium illud dato rectilineo, putà b b, æquale. Deinde (157.) ipsi b b æquale fiat spatium parabolicum V R A S, et inveniatur tam positio quàm magnitudo rectæ S A respectu S V, cujus positio et magnitudo respectu distantiæ aphelii Terræ a Sole priùs notæ sunt. At si cometæ trajectoria deprehendatur elliptica, per methodos in Prop. XXXI. Lib. I. expositas, ducatur recta S A, talis ut area V R A S, sit ad totam ellipseos aream, sicut intervallum inter tempus datum et momentum quo perihelium occupat integrum cometæ tempus periodicum quod ex dato orbitæ cometicæ axe principali cognitum est, dabiturque recta S A tam positione quàm magnitudine. Jam verò in utroque casu ex A ad nodorum lineam ♈ ♌ erigatur normalis A N, rectæ ♈ ♌ occurrens in N; ex eodem A, ad eclipticæ planum demittatur perpendiculum eidem rectæ occurrens in a, junganturque a N, a S, erit angulus A N a, inclinatio plani trajectoriæ ad planum eclipticæ ac proinde cognitus (146). Deinde quoniam noti sunt anguli V S A, V S N, notus quoquè erit angulus N S A, horum summa vel differentia. Quarè in triangulo rectangulo N a A, datis latere N A, et angulo A N a, innotescent reliqua latera N a et A a. Præterea in triangulo rectangulo S N a, dantur latera S N et N a ideóque dabuntur latus S a, et angulus N S a. Sed (145.) datur positio rectæ S N, quare nota erit positio rectæ S a, hoc est, cometæ longitudo heliocentrica, sive locus cometæ heliocentricus, ad eclipticam reductus. Denique in triangulo S A a rectangulo ad a, nota sunt omnia latera, ac proindè dabitur angulus A S a, latitudo cometæ heliocentrica. Ex his quoque patet vicissim inveniri posse tempus quo cometa datum in orbe suo locum tenet.



159. Iisdem manentibus sit B T orbis magnus, sitque Tellus in T ad tempus datum. Jungantur T A, T a, erit planum trianguli T A a, ad planum eclipticæ normale (Prop. XVIII. Lib. XI. Elem.). Jam in triangulo T S a, in plano eclipticæ datur latus S a, (158), notumque est latus S T, ex theoriâ Telluris, et utrumque latus in partibus mediocris distantiæ Telluris a Sole expressum habetur. Præterea ob latera illa positione cognita, datur angulus T S a, ab illis comprehensus, quarè innotescent latus T a, et angulus S T a; sed datur T S positione, nempe locus Solis ad tempus datum, nota igitur

his datis, calculo itidem arithmetico accuratè instituto, loca cometæ ad observationum tempora computavit, ut sequitur.

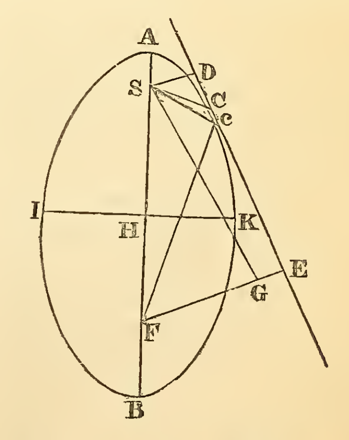


est positio rectæ T a, hoc est, cometæ longitudo geocentrica, sive locus cometæ geocentricus ad eclipticam reductus. Deindè in triangulo rectangulo A a T, dantur latera duo in partibus mediocris distantiæ Telluris a Sole expressa (158. et ex theoriâ Telluris). Quarè innotescet angulus A T a, hoc est, cometæ latitudo geocentrica, itemque dabitur hypothenusa T A, distantia scilicet cometæ a Terrâ. Ex his itaque patet quomodo ad data observationum tempora, instituto calculo, loca cometæ possint computari. Clariss. Halleius iisdem usus principiis ad definiendos cometarum motus maximo labore tabulas construxit. Harum tabularum normam videat lector in ejusdem celeberrimi viri Opusculo quod inscribitur: Cometographia, seu Astronomiæ Cometicæ Synopsis.

160. Si cometæ orbitas ellipticas describere et duas Kepleri leges observare ponantur, hoc est, si temporum periodicorum quadrata sint ut cubi mediocrium distantiarum a Sole, et areæ ellipticæ radiis ad Solem ductis sint temporibus proportionales, facilè determinabitur orbitæ cometicæ magnitudo, omnesque motûs cometarum circumstantiæ definientur, quod elegantissimè præstitit D. Bouguer in Monum. Paris. an. 1733. clarissimi viri methodum hic adjungemus.

Ex datis tribus observationibus a se invicem parum distantibus, inveniatur cometæ velocitas in aliquo orbitæ suæ loco, et exigua ejusdem orbitæ portio determinetur. Quoniam tria observationum tempora parum a se invicem distant, portio orbitæ hoc temporis intervallo descripta considerari poterit tanquam linea recta vel ipsamet tangens orbitæ motu uniformi percursa, ideóque portio hæc rectilinea orbitæ et ipsa cometæ velocitas inveniri poterunt per Lem. IV. et per ea quæ huic Lemmati addidimus. Idem quoque obtinebitur duplici elegantissimâ methodo quæ in Monum. Paris. loco citato legitur.

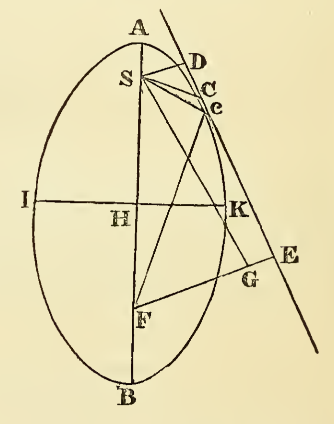
His præmissis, sit S Sol, C c exigua orbitæ cometicæ portio ex tribus observationibus determinata. Quoniam nota est S C, distantia scilicet cometæ a Sole, atquè etiam innotescit angulus S C D, dabitur perpendicularis S D, hujus anguli S C D sinus, sumpto S C, pro radio. Dicatur S C = a, S D = b, designet e, spatiolum C c, tempusculo f percursum, sitque



x = A B, seu axi principali ellipseos quam cometa circà Solem in umbilico S, positum integro tempore periodico t, describit. Ut determinentur quantitates x et t, conferre oportet motum cometæ cum motu cognito planetæ alicujus. Sit

q axis principalis ellipseos quam planeta describit, n tempus periodicum, dicaturque p peripheria circuli cujus diameter est q. Quoniam axis principalis ellipseos est summa maximæ et minimæ distantiæ planetæ a Sole, erit distantia mediocris planetæ a Sole æqualis dimidio axi principali, hoc est $\frac{1}{2}$ x est distantia mediocris cometæ, et $\frac{1}{2}$ q distantia mediocris planetæ. Jam verò fiat (per leg. 1. Kepleri.) $\frac{1}{8}q^3 : n^2 = \frac{1}{8}x^3 : t^2$ hinc fit $t = \frac{nx}{q}\sqrt{\frac{x}{q}}$. Invenienda superest altera expressio temporis periodici t. Quoniam C c, est portio orbitæ admodum exigua, sector CS c, considerari poterit instar trianguli evanescentis cujus area $\frac{1}{2}$ S D $\times$ C c $= \frac{1}{2}$ b e. Quarè, per alteram Kepleri regulam, dicatur $\frac{1}{2}$ b e est ad f, ut area tota ellipseos A C B I, ad integrum tempus periodicum t, unde habetur $t = \frac{f}{\frac{1}{2}be} \times$ A C B I. Nunc ut obtineatur area A C B I, ex puncto C, ad alterum umbilicum E, agatur recta C F $=$ A B $-$ S C $= x - a$ (Theor. III. de ellipsi). Ex eodem umbilico F, ad tangentem C c productam in E, demittatur perpendicularis F E, sitque S G parallela rectæ D E, triangula rectangula S C D, F C E similia sunt, ob angulos S C D, F C E, æquales (Theor. IV. de ellips.) ideóque SC(a) : SD(b) $=$ F C $(x-a)$: F E $= \frac{bx-ab}{a}$, ac proindè F G, seu F E $-$ S D $= \frac{bx-2ab}{a}$.

Deinde (ob eorumdem triangulorum similitudinem) S C (a) : C D ($\sqrt{a^2-b^2}$) $=$ F C $(x-a)$: C E $= \frac{x-a}{a}\sqrt{a^2-b^2}$, et hinc D E, vel S G, seu C E $+$ C D $= \frac{x-a}{a}\sqrt{a^2-b^2}+\sqrt{a^2-b^2} = \frac{x}{a}\sqrt{a^2-b^2}$. Sed F G $= \frac{bx-2ab}{a}$ (ex dem.), quarè est S F $= \sqrt{\frac{b^2x^2-4ab^2x+4a^2b^2+a^2x^2-b^2x^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2x^2-4ab^2x+4a^2b^2}{a^2}}$; ideóque distantia S H vel F H umbilici alterutrius a centro $= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2x^2-4ab^2x+4a^2b^2}{a^2}}$. Jam (ob triangulum S I H rectangulum in H, et per Theor. III. de ellipsi) erit I H $= \sqrt{\frac{1}{4}x^2 - \frac{a^2x^2+4ab^2x-4a^2b^2}{4a^2}} = \frac{b}{a}\sqrt{ax-a^2}$ ac proindè axis minor I K $= \frac{2b}{a}\sqrt{ax-a^2}$, et factum ex axe majori in minorem $= \frac{2bx}{a}\sqrt{ax-a^2}$. Sed est factum illud area rectanguli orbitæ ellipticæ circumscripti, et præterea (249. Lib. I.) area rectanguli hujus est ad aream ellipseos ut quadratum axis A B, ad aream circuli huic quadrato inscripti; quarè $q^2 : \frac{1}{4}qp = \frac{2bx}{a}\sqrt{ax-a^2}$: A C B I $= \frac{bpx}{2aq}\sqrt{ax-a^2}$. Tandem in ultimâ expressione temporis periodici loco areæ A C B I, substituatur illius valor modò inventus, fiet $t = \frac{fpx}{aeq} \times \sqrt{ax-a^2}$, collatisque duobus ipsius t valoribus, habebitur $\frac{nx}{q}\sqrt{\frac{x}{q}} = \frac{fpx}{aeq}\sqrt{ax-a^2}$,



et reductâ æquatione $x = \frac{af^2p^2q}{f^2p^2q - ae^2n^2}$. Jam si in expressionibus axis minoris et temporis periodici substituatur valor ipsius x, erit axis minor I K $= 2ben\sqrt{\frac{a}{f^2p^2q-ae^2n^2}}$ et tempus periodicum $= f^3p^3n \times \frac{a^{\frac{3}{2}}}{f^2p^2q-ae^2n^2|^{\frac{3}{2}}}$. Hinc patet determinari posse omnia quæ ad cometarum motus pertinent.

161. Si formulæ modò inventæ quantitatibus finitis et positivis exprimantur, orbita A C B I erit elliptica, ideóque cometa reditum habebit. Quia verò circulus est species quædam ellipsis, cometa circulum quoque poterit describere, in eo autem casu æquales erunt distantiæ S A, S C, S B, axisque A B duplus fiet distantiæ S C, ac proindè $\frac{af^2p^2q}{f^2p^2q-ae^2n^2} = 2a$, et hinc $e = \frac{fp}{n}\sqrt{\frac{q}{2a}}$, valor scilicet spatioli C c a cometâ tempore f percursi. Si e a sit cometæ

Tempus verum. d. h. '	Distantia Cometæ a ☉	Long. comp. gr. ' ''	Lat. comp. gr. ' ''	Errores in Long. ' ''	Errores in Lat. ' ''
Dec. 12. 4. 46	28028	♑ 6. 29. 25	8. 26. 0 Bor.	— 3. 5	— 2. 0
21. 6. 37	61076	♒ 5. 6. 50	21. 43. 20	— 1. 42	+ 1. 7
24. 6. 18	70008	18. 48. 20	25. 22. 40	— 1. 3	— 0. 25
26. 5. 21	75576	28. 22. 45	27. 1. 36	— 1. 28	+ 0. 44
29. 8. 3	14021	♓ 13. 12. 40	28. 10. 10	+ 1. 59	+ 0. 12
30. 8. 10	86661	17. 40. 5	28. 11. 20	+ 1. 45	— 0. 33
Jan. 5. 6. 1½	101440	♈ 8. 49. 49	26. 15. 15	+ 0. 56	+ 0. 8
9. 7. 0	110959	18. 44. 36	24. 12. 54	+ 0. 32	+ 0. 58
10. 6. 6	113162	20. 41. 0	23. 44. 10	+ 0. 10	+ 0. 18
13. 7. 9	120000	26. 0. 21	22. 17. 30	+ 0. 33	+ 0. 2
25. 7. 59	145370	♉ 9. 33. 40	17. 57. 55	— 1. 20	+ 1. 25
30. 8. 22	155303	13. 17. 41	16. 42. 7	— 2. 10	— 0. 11
Feb. 2. 6. 35	160951	15. 11. 11	16. 4. 15	— 2. 42	+ 0. 14
5. 7. 4½	166686	16. 58. 25	15. 29. 13	— 0. 41	+ 2. 10
25. 8. 41	202570	26. 15. 46	12. 48. 0	— 2. 49	+ 1. 14
Mar. 5. 11. 39	216205	29. 18. 35	12. 5. 40	+ 0. 35	+ 2. 24

Apparuit etiam hic cometa mense Novembri præcedente, et Coburgi in Saxoniâ a d^no^. Gottfried Kirch observatus est diebus mensis hujus quarto, sexto et undecimo, stilo veteri; et ex positionibus ejus ad proximas stellas fixas ope telescopii nunc bipedalis nunc decempedalis satis accuratè observatis, ac differentia longitudinum Coburgi et Londini graduum undecim et locis fixarum a Poundio nostro observatis, Halleius noster loca cometæ determinavit ut sequitur.

velocitas ut fiat $a e^2 n^2 = f^2 p^2 q$, tunc infinito æquales evadent expressiones axis majoris, minoris et temporis periodici; quare orbita cometæ mutabitur in ellipsim infinitè oblongatam seu parabolam, ideóque cometa reditum non habet. Tandem si $a e^2 n^2$, sit major quàm $f^2 p^2 q$, negativa fit expressio axis majoris, et orbita abit in hyperbolam, ac proindè cometa nunquam futurus est iterum conspicuus.

162. Ut prædictæ formulæ ad calculum reducantur, cometarum motus cum Telluris motu conferatur. Sit q dupla distantia mediocris Terræ a Sole, p peripheria circuli cujus diameter q, n annus sidereus seu intervallum 365. dier. 6^hor^. 9′: fiat mediocris distantia Telluris a Sole partium 10000000, ideóque $q = 20000000$, et $p = 62831853$, spatium C c unius diei intervallo cometa ponatur descripsisse. His valoribus substitutis in formulis præcedentibus erit $x = \frac{59182659953557939 \times a}{59182659953557939 - a e^2}$ et $t = \frac{1859278095175402232 \times a^{\frac{3}{2}}}{\overline{59182659953557939 - a e^2}|^{\frac{3}{2}}}$. Jam nihil ampliùs faciendum superest, nisi ut in casibus particularibus loco a, et e, substituantur valores per observationem determinati. Utrum verò cometa rediturus sit vel non cognoscetur, si quantitas $a e^2$, minor majorve reperiatur numero constanti 59182659953557939. Minùs prolixus fiet calculus, si distantiam mediocrem Telluris a Sole ponamus partium 10000, tunc enim erit $x = \frac{591826599 \times a}{591826599 - a e^2}$, et $t = \frac{1859278095 \times a \sqrt{a}}{591826599 - a e^2 \times \sqrt{591826599 - a e^2}}$. Exemplo sit cometa qui annis 1729. 1730. apparuit. Ex observationibus clariss. Cassini colligitur die 13. Octobris an. 1729. distantiam S C cometæ a Sole, fuisse partium 42998, exiguam orbitæ portionem diei unius intervallo descriptam, fuisse partium $122 \frac{452}{10000}$, atque angulum D C S, fuisse 82°. 11′. Hinc invenitur quantitas $a e^2$ major quàm 591826599, ideóque (161.) orbita cometæ est hyperbola, ac proindè expectandus non est hujus cometæ regressus. Cæterùm hæc vera sunt in eâ duntaxat hypothesi quod cometæ duas Kepleri leges observent.

Novemb. 3[d]. 17[h]. 2′. tempore apparente Londini, cometa erat in ♌ 29[gr]. 51′. cum lat. bor. 1[gr]. 17′. 45″.

Novemb. 5[d]. 15[h]. 58′. cometa erat in ♍ 3[gr]. 23′. cum lat. bor. 1[gr]. 6′.

Novemb. 10[d]. 16[h]. 31′. cometa æqualiter distabat a stellis Leonis σ ac τ Bayero; nondum verò attigit rectam easdem jungentem, sed parum abfuit ab eâ. In stellarum catalogo Flamstediano σ tunc habuit ♍ 14[gr]. 15′. cum lat. bor. 1[gr]. 41′. ferè, τ verò ♍ 17[gr]. $3\frac{1}{2}$, cum lat. austr. 0[gr]. 34′. Et medium punctum inter has stellas fuit ♍ 15[gr]. $39\frac{1}{4}$′. cum lat. bor. 0[gr]. $33\frac{1}{2}$′. Sit distantia cometæ a rectâ illâ 10′ vel 12′ circiter, et differentia longitudinum cometæ et puncti illius medii erit 7′, et differentia latitudinum $7\frac{1}{2}$′ circiter. Et inde cometa erat in ♍ 15[gr]. 32′. cum lat. bor. 26′. circiter.

Observatio prima ex situ cometæ ad parvas quasdam fixas abundè satis accurata fuit. Secunda etiam satis accurata fuit. In tertiâ, quæ minùs accurata fuit, error minutorum sex vel septem subesse potuit, et vix major. Longitudo verò cometæ in observatione primâ, quæ cæteris accuratior fuit, in orbe prædicto parabolico computata erat ♌ 29[gr]. 30′. 22″. latitudo borealis 1[gr]. 25′. 7″. et distantia ejus a Sole 115546.

Porrò Halleius observando quod cometa insignis intervallo annorum 575 quater apparuisset, scilicet mense Septembri post cædem Julii Cæsaris, anno Christi 531 Lampadio et Oreste Coss. anno Christi 1106 mense Februario, et sub finem anni 1680, idque cum caudâ longâ et insigni (præterquam quod sub mortem Cæsaris, cauda ob incommodam Telluris positionem minùs apparuisset:) quæsivit orbem ellipticum cujus axis major esset partium 1382957, existente mediocri distantiâ Telluris a Sole partium 10000: in quo orbe utique cometa annis 575 (d) revolvi possit. Et ponendo nodum ascendentem in ♋ 2[gr]. 2′; inclinationem plani orbis ad planum eclipticæ 61[gr]. 6′. 48″; perihelium cometæ in hoc plano ♐ 22[gr]. 44′. 25″; tempus æquatum perihelii Decemb. 7[d]. 23[h]. 9′; distantiam perihelii a nodo ascendente in plano eclipticæ 9[gr]. 17′. 35″; et axem conjugatum 18481.2: (e) computavit motum cometæ in hoc orbe elliptico. Loca autem ejus tam ex observationibus deducta quàm in hoc orbe computata exhibentur in tabulâ sequente.

(d) 163. * *Revolvi possit.* Quadrata temporum periodicorum in cometis æquè ac in planetis ponantur ut cubi mediocrium distantiarum a Sole, tempus periodicum cometæ dicatur t, tempus periodicum Terræ circà Solem dicatur T, distantia mediocris Terræ a Sole sit D, axis major ellipseos a cometâ descriptæ sit 2 a, ideóque mediocris distantia cometæ a Sole = a, erit $T^2 : t^2 \doteq D^3 : a^3$. Fiat D = 10000 partibus T = 365 dieb. 6[hor]. 9′. = 525969′, t = 575 annis, invenietur 2 a, seu axis major ellipseos a cometâ descriptæ, partium 1382957, existente mediocri distantiâ Telluris a Sole earumdem partium 10000. In hoc igitur orbe cometa annis 575 revolvi potest.

(e) *Computavit motum cometæ.* Ratio computi ineundi patet ex num. 158. 159. vel etiam ex methodo clariss. D. Bouguer num. 160. et seq.

Tempus verum.	Long. obs.	Lat. Bor. obs.	Long. Comp.	Lat. Comp.	Errores in Long.	Lat.
d. h. ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	′ ″	′ ″
Nov. 3. 16. 47	♌ 29. 51. 0	1. 17. 45	♌ 29. 51. 22	1. 17. 32 B	+ 0. 22	— 0. 11
5. 15. 37	♍ 5. 23. 0	1. 6. 0	♍ 3. 24. 32	1. 6. 9	+ 1. 32	+ 0. 9
10. 16. 18	15. 32. 0	0. 27. 0	15. 33. 2	0. 25. 7	+ 1. 2	— 1. 53
16. 17. 0			♎ 8. 16. 45	0. 53. 7 A		
18. 21. 34			18. 52. 15	1. 26. 54		
20. 17. 0			28. 10. 36	1. 53. 35		
23. 17. 5			♏ 13. 22. 42	2. 29. 0		
Dec. 12. 4. 46	♑ 6. 32. 30	8. 28. 0	♑ 9. 31. 20	8. 29. 6 B	— 1. 10	+ 1. 6
21. 6. 37	♒ 5. 8. 12	21. 42. 13	♒ 5. 6. 14	21. 44. 42	— 1. 58	+ 2. 29
24. 6. 18	18. 49. 23	25. 23. 5	18. 47. 30	25. 23. 35	— 1. 53	+ 0. 30
26. 5. 21	28. 24. 13	27. 0. 52	28. 21. 42	27. 2. 1	— 2. 31	+ 1. 9
29. 8. 3	♓ 13. 10. 41	28. 9. 58	♓ 13. 11. 14	28. 10. 38	+ 0. 33	+ 0. 40
30. 8. 10	17. 38. 20	28. 11. 53	17. 38. 27	28. 11. 37	+ 0. 7	— 0. 16
Jan. 5. 6. 1½	♈ 8. 48. 53	26. 15. 7	♈ 8. 48. 51	26. 14. 57	— 0. 2	— 0. 10
9. 7. 1	18. 44. 4	24. 11. 56	18. 43. 51	24. 12. 7	— 0. 13	+ 0. 21
10. 6. 6	20. 40. 50	23. 43. 32	20. 40. 23	23. 43. 25	— 0. 27	— 0. 75
13. 7. 9	25. 59. 48	22. 17. 28	26. 0. 8	22. 16. 32	+ 0. 20	— 0. 56
25. 7. 59	♉ 9. 35. 0	17. 56. 30	♉ 9. 34. 11	17. 56. 6	— 0. 49	— 0. 24
30. 8. 22	13. 19. 51	16. 42. 18	11. 18. 28	16. 40. 5	— 1. 23	— 2. 13
Feb. 2. 6. 35	15. 13. 53	16. 4. 1	15. 11. 59	16. 2. 7	— 1. 54	— 1. 54
5. 7. 4½	16. 59. 6	15. 27. 3	16. 59. 17	15. 27. 0	+ 0. 11	— 0. 3
25. 8. 41	26. 18. 35	12. 46. 46	26. 16. 59	12. 45. 22	— 1. 36	— 1. 24
Mar. 1. 11. 10	27. 52. 42	12. 23. 40	27. 51. 47	12. 22. 28	— 0. 55	— 1. 12
5. 11. 39	29. 18. 0	12. 3. 26	29. 20. 11	12. 2. 50	+ 2. 11	— 0. 26
9. 8. 38	0. 43. 4	11. 45. 52	♊ 0. 42. 43	11. 45. 35	— 0. 21	— 0. 17

Observationes cometæ hujus a principio ad finem non minùs congruunt cum motu cometæ in orbe jam descripto, quàm motus planetarum congruere solent cum eorum theoriis, et congruendo probant unum et eundem fuisse cometam, qui toto hoc tempore apparuit, ejusque orbem hic rectè definitum fuisse.

In tabulâ præcedente omisimus observationes diebus Novembris 16, 18, 20 et 23 ut minùs accuratas. Nam cometa his etiam temporibus observatus fuit. Ponthæus utique et socii, Novemb. 17. st. vet. horâ sextâ matutinâ Romæ, id est, horâ 5. 10′. Londini, filis ad fixas applicatis, cometam observarunt in ♎ 8^gr. 30′. cum latitudine australi 0^gr. 40′. Extant eorum observationes in Tractatu, quem Ponthæus de hoc cometâ in lucem edidit. Cellius, qui aderat et observationes suas in Epistolâ ad D. Cassinum misit, cometam eâdem horâ vidit in ♎ 8^gr. 30′. cum latitudine australi 0^gr. 30′. Eâdem horâ Galletius Avenioni (id est, horâ matutinâ 5, 42 Londini) cometam vidit in ♎ 8^gr. sine latitudine. Cometa autem per theoriam jam fuit in ♎ 8^gr. 16′. 45″. cum latitudine australi 0^gr. 53′. 7″.

Nov. 18. horâ matutinâ 6. 30′. Romæ (id est, horâ 5. 40′. Londini) Ponthæus cometam vidit in ♎ 13^gr. 30′. cum latitudine australi 1^gr. 20′. Cellius in ♎ 13^gr. 30′. cum latitudine australi 1^gr. 20′. Galletius autem

horâ matutinâ 5. 30′. Avenioni cometam vidit in ♎ 13^{gr}. 00′. cum latitudine australi 1^{gr}. 00′. Et R. P. Ango in Academiâ Flexiensi apud Gallos, horâ quintâ matutinâ (id est, horâ 5. 9′. Londini) cometam vidit in medio inter stellas duas parvas, quarum una media est trium in rectâ lineâ in Virginis australi manu Bayero ψ, et altera est extrema alæ Bayero θ. Unde cometa tunc fuit in ♎ 12^{gr}. 46′. cum latitudine australi 50′. Eodem die Bostoniæ in Novâ Angliâ in latitudine 42½. graduum, horâ quintâ matutinâ, (id est Londini horâ matutinâ 9. 44′.) cometa visus est prope ♎ 14^{gr}. cum latitudine australi 1^{gr}. 30′. uti a cl. Halleio accepi.

Nov. 19. hora mat. 4½ Cantabrigiæ, cometa (observante juvene quodam) distabat a Spicâ ♍ quasi 2^{gr}. boreazephyrum versus. Erat autem Spica in ♎ 19^{gr}. 23′. 47″. cum lat. austr. 2^{gr}. 1′. 59″. Eodem die hor. 5. mat. Bostoniæ in Novâ Angliâ, cometa distabat a Spica ♍ gradu uno, differentiâ latitudinum existente 40′. Eodem die in Insula Jamaicæ, cometa distabat a Spicâ intervallo quasi gradus unius. Eodem die D. Arthurus Stoper ad fluvium Patuxent, prope Hunting Creek in Maryland, in confinio Virginiæ in lat. 38½^{gr}. horâ quintâ matutinâ (id est, horâ 10. Londini) cometam vidit supra Spicam ♍, et cum Spicâ propemodum conjunctum, existente distantiâ inter eosdem quasi ¾^{gr}. Et (f) ex his observationibus inter se collatis colligo quod horâ 9. 44′. Londini cometa erat in ♎ 18^{gr}. 50′. cum latitudine australi 1^{gr}. 25′. circiter. Cometa autem per theoriam jam erat in ♎ 18^{gr}. 52′. 15″. cum latitudine australi 1^{gr}. 26′. 54″.

Nov. 20. D. Montenarus Astronomiæ Professor Paduensis, horâ sextâ matutinâ Venetiis (id est, horâ 5. 10′. Londini) cometam vidit in ♎ 23^{gr}. cum latitudine australi 1^{gr}. 30′. Eodem die Bostoniæ, distabat cometa a Spicâ ♍, 4^{gr}. longitudinis in orientem, ideóque erat in ♎ 23^{gr}. 24′. circiter.

Nov. 21. Ponthæus et socii hor. mat. 7¼. cometam observarunt in ♎ 27^{gr}. 50′. cum latitudine australi 1^{gr}. 16′. Cellius in ♎ 28^{gr}. Ango horâ quintâ matutinâ in ♎ 27^{gr}. 45′. Montenarus in ♎ 27^{gr}. 51′. Eodem die in Insulâ Jamaicæ cometa visus est prope principium Scorpii, eandemque circiter latitudinem habuit cum Spicâ Virginis, id est, 2^{gr}. 2′. Eodem die ad horam quintam matutinam Ballasoræ in Indiâ Orientali, (id est ad horam noctis præcedentis 11. 20′. Londini) capta est distantia cometæ a Spicâ ♍ 7^{gr}. 35′. in orientem. In lineâ rectâ erat inter Spicam et Lancem,

(f) * *Ex his observationibus inter se collatis* via cometæ inter stellas determinatur, et hinc colliguntur cometæ longitudo et latitudo (149.) hor. 9. 44′. Londini, reductione scilicet factâ ad meridianum Londinensem.

ideóque versabatur in ♎ 26gr. 58′. cum lat. australi 1gr. 11′. circiter; et post horas 5. et 40′. (ad horam scilicet quintam matutinam Londini) erat in ♎ 28gr. 12′. cum lat. austr. 1gr. 16′. Per theoriam verò cometa jam erat in ♎ 28gr. 10′. 36″. cum latitudine australi 1gr. 53′. 35″.

Nov. 22. cometa visus est a Montenaro in ♍ 2gr. 33′. Bostoniæ autem in Novâ Angliâ apparuit in ♍ 3gr. circiter, eâdem ferè cum latitudine ac prius, id est, 1gr. 30′. Eodem die ad horam quintam matutinam Ballasoræ cometa observabatur in ♍ 1gr. 50′; ideóque ad horam quintam matutinam Londini cometa erat in ♍ 3gr. 5′. circiter. Eodem die Londini horâ mat. $6\frac{1}{2}$. Hookius noster cometam vidit in ♍ 3gr. 30′. circiter, idque in lineâ rectâ quæ transit per Spicam Virginis et Cor Leonis non exactè quidem, sed a lineâ illâ paululum deflectentem ad boream. Montenarus itidem notavit quod linea a cometâ per Spicam ducta, hoc die et sequentibus transibat per australe latus Cordis Leonis, interposito perparvo intervallo inter Cor Leonis et hanc lineam. Linea recta per Cor Leonis et Spicam Virginis transiens, eclipticam secuit in ♍ 3gr. 46′; in angulo 2gr. 51′.

Et si cometa locatus fuisset in hâc lineâ in ♍ 3gr. ejus latitudo fuisset 2gr. 26′. Sed cùm cometa consentientibus Hookio et Montenaro, nonnihil distaret ab hâc lineâ boream versus, latitudo ejus fuit paulo minor. Die 20. ex observatione Montenari, latitudo ejus propemodum æquabat latitudinem Spicæ ♍, eratque 1gr. 30′. circiter, et consentientibus Hookio, Montenaro et Angone perpetuò augebatur, ideóque jam sensibiliter major erat quàm 1gr. 30′. Inter limites autem jam constitutos 2gr. 26′. et 1gr. 30′. magnitudine mediocri latitudo erit 1gr. 58′. circiter. Cauda cometæ, consentientibus Hookio et Montenaro, dirigebatur ad Spicam ♍, declinans aliquantulum a stellâ istâ, juxta Hookium in austrum, juxta Montenarum in boream; ideóque declinatio illa vix fuit sensibilis, et cauda æquatori fere parallela existens, aliquantulum deflectebatur ab oppositione Solis boream versus.

Nov. 23. st. vet. horâ quintâ matutinâ Noriburgi (id est hora $4\frac{1}{2}$. Londini) D. Zimmerman cometam vidit in ♍ 8gr. 8′. cum latitudine australi 2gr. 31′. captis scilicet ejus distantiis a stellis fixis.

Nov. 24. ante ortum Solis cometa visus est a Montenaro in ♍ 12gr. 52′. ad boreale latus rectæ quæ per Cor Leonis et Spicam Virginis ducebatur, ideóque latitudinem habuit paulo minorem quàm 2gr. 38′. Hæc latitudo, uti diximus, ex observationibus Montenari, Angonis et Hookii, perpetuò augebatur; ideóque jam paulò major erat quàm 1gr. 58′; et magnitudine mediocri, sine notabili errore, statui potest 2gr. 18′. Latitudinem Ponthæus et Galletius jam et decrevisse volunt, et Cellius et observator in Novâ

Angliâ eandem ferè magnitudinem retinuisse, scilicet gradûs unius vel unius cum semisse. Crassiores sunt observationes Ponthæi et Cellii, eæ præsertim quæ per azimuthos et altitudines capiebantur, ut et eæ Galletii: meliores sunt eæ quæ per positiones cometæ ad fixas a Montenaro, Hookio, Angone, et observatore in Novâ Angliâ, et nonnunquam a Ponthæo et Cellio sunt factæ. Eodem die ad horam quintam matutinam Ballasoræ cometa observabatur in ♍ $11^{gr}.\ 45'$; ideóque ad horam quintam matutinam Londini erat in ♍ 13^{gr}. circiter. Per theoriam verò cometa jam erat in ♍ $13^{gr}.\ 22'.\ 42''$.

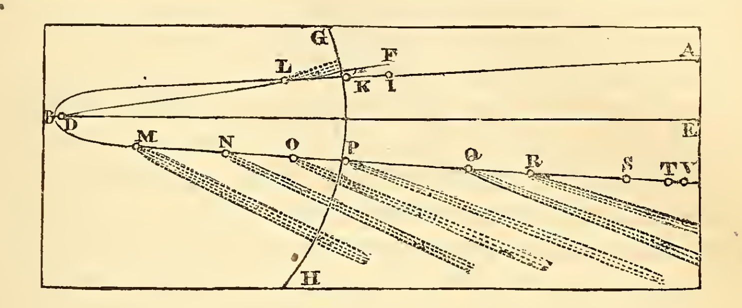
Nov. 25. ante ortum Solis Montenarus cometam observavit in ♍ $17\frac{3}{4}^{gr}$. circiter. Et Cellius observavit eodem tempore quod cometa erat in lineâ rectâ inter stellam lucidam in dextro femore Virginis et lancem australem Libræ, et hæc recta secat viam cometæ in ♍ $18^{gr}.\ 36'$. Per theoriam verò cometa jam erat in ♍ $18\frac{1}{3}^{gr}$. circiter.

Congruunt igitur hæ observationes cum theoriâ quâtenus congruunt inter se, et congruendo probant unum et eundem fuisse cometam, qui toto tempore a quarto die Novembris ad usque nonum Martii apparuit. Trajectoria cometæ hujus (g) bis secuit planum eclipticæ, et propterea non fuit rectilinea. Eclipticam secuit non in oppositis cœli partibus, sed in fine Virginis et principio Capricorni, intervallo graduum 98. circiter; ideóque cursus cometæ plurimum deflectebatur a circulo maximo. Nam et mense Novembri cursus ejus tribus saltem gradibus ab eclipticâ in austrum declinabat, et postea mense Decembri gradibus 29. vergebat ab eclipticâ in septentrionem partibus duabus orbitæ, in quibus cometa tendebat in Solem et redibat a Sole, angulo apparente graduum plus triginta ab invicem declinantibus, ut observavit Montenarus. Pergebat hic cometa per signa novem, a Leonis scilicet ultimo gradu ad principium Geminorum, præter signum Leonis, per quod pergebat antequam videri cœpit; et nulla alia extat theoria, quâ cometa tantam cœli partem motu regulari percurrat. Motus ejus fuit maximè inæquabilis. Nam circa diem vigesimum Novembris descripsit gradus circiter quinque singulis diebus; dein motu retardato inter Novemb. 26. et Decemb. 12. spatio scilicet dierum quindecim cum semisse, descripsit gradus tantum 40; postea verò motu iterum accelerato, descripsit gradus ferè quinque singulis diebus, antequam motus iterum retardari cœpit. Et theoria quæ motui tam inæquabili per maximam cœli partem probè respondet, quæque easdem observat leges cum

(g) * *Bis secuit planum eclipticæ.* Tempus quo cometa secat eclipticam inveniri potest per num. 145. et 154.

theoriâ planetarum, et cum accuratis observationibus astronomicis accuratè congruit, non potest non esse vera.

Cæterùm trajectoriam quam cometa descripsit, et caudam veram quam singulis in locis projecit, visum est annexo schemate in plano trajectoriæ delineatas exhibere: ubi A B C denotat trajectoriam cometæ, D Solem, D E trajectoriæ axem, D F lineam nodorum, G H intersectionem sphæræ



orbis magni cum plano trajectoriæ, I locum cometæ Nov. 4. ann. 1680, K locum ejusdem Nov. 11. L locum Nov. 19. M locum Dec. 12. N locum Dec. 21. O locum Dec. 29. P locum Jan. 5. sequent. Q locum Jan. 25. R locum Feb. 5. S locum Feb. 25. T locum Mar. 5. et V locum Mar. 9. Observationes verò sequentes in caudâ definiendâ adhibui.

Nov. 4. et 6. cauda nondum apparuit. Nov. 11. cauda jam cœpta non nisi semissem gradûs unius longa tubo decempedali visa fuit. Nov. 17. cauda gradûs amplius quindecim longa Ponthæo apparuit. Nov. 18. cauda 30^{gr}. longa, Solique directe opposita in Novâ Angliâ cernebatur, et protendebatur usque ad stellam ♂, quæ tunc erat in ♍ $9^{gr}. 54'$. Nov. 19. in Maryland cauda visa fuit gradûs 15. vel 20. longa. Dec. 10. cauda (observante Flamstedio) transibat per medium distantiæ inter caudam Serpentis Ophiuchi et stellam δ in Aquilæ australi alâ, et desinebat prope stellas A, ω, b in tabulis Bayeri. Terminus igitur erat in ♑ $19\frac{1}{2}^{gr}$. cum latitudine boreali circiter. Dec. 11. cauda surgebat ad usque caput Sagittæ (Bayero α, β,) desinens in ♑ $26^{gr}. 43'$. cum latitudine boreali $38^{gr}. 34'$. Dec. 12. cauda transibat per medium Sagittæ, nec longè ultra protendebatur, desinens in ♒ 4^{gr}. cum latitudine boreali $42\frac{1}{2}^{gr}$. circiter. Intelligenda sunt hæc de longitudine caudæ clarioris. Nam luce obscuriore, in cœlo forsan magis sereno, cauda Dec. 12. hora 5. 40′. Romæ (observante Ponthæo) supra Cygni uropygium ad gradus 10. sese extulit; atque ab hac stellâ ejus latus ad occasum et boream min. 45. destitit. Lata autem erat cauda his diebus gradus 3. juxta terminum

superiorem, ideóque medium ejus distabat a stellâ illâ 2^{gr}. 15′. austrum versus, et terminus superior erat in ♓ 22^{gr}. cum latitudine boreali 61^{gr}. Et hinc longa erat cauda 70^{gr}. circiter. Dec. 21. eadem surgebat fere ad cathedram Cassiopeiæ, æqualiter distans a β et Schedir, et distantiam ab utrâque distantiæ earum ab invicem æqualem habens, ideóque desinens in ♈ 24^{gr}. cum latitudine $47\frac{1}{2}^{gr}$. Dec. 29. cauda tangebat Scheat sitam ad sinistram, et intervallum stellarum duarum in pede boreali Andromedæ accuratè complebat, et longa erat 54^{gr}; ideóque desinebat in ♉ 19^{gr}. cum latitudine 35^{gr}. Jan. 5. cauda tetigit stellam π in pectore Andromedæ ad latus ejus dextrum, et stellam μ in ejus cingulo ad latus sinistrum; et (juxta observationes nostras) longa erat 40^{gr}; curva autem erat et convexo latere spectabat ad austrum. Cum circulo per Solem et caput cometæ transeunte angulum confecit graduum 4. juxta caput cometæ; at juxta terminum alterum inclinabatur ad circulum illum in angulo 10. vel 11. graduum, et chorda caudæ cum circulo illo continebat angulum graduum octo. Jan. 13. cauda luce satis sensibili terminabatur inter Alamech et Algol, et luce tenuissimâ desinebat e regione stellæ $\varkappa$ in latere Persei. Distantia termini caudæ a circulo Solem et cometam jungente erat 3^{gr}. 50′. et inclinatio chordæ caudæ ad circulum illum $8\frac{1}{2}^{gr}$. Jan. 25. et 26. cauda luce tenui micabat ad longitudinem graduum 6. vel 7; et nocte unâ et alterâ sequente ubi cœlum valde serenum erat, luce tenuissimâ et ægerrimè sensibili attingebat longitudinem graduum duodecim et paulò ultra. Dirigebatur autem ejus axis ad lucidam in humero orientali Aurigæ accuratè, ideóque declinabat ab oppositione Solis boream versus in angulo graduum decem. Denique Feb. 10. caudam oculis armatis aspexi gradus duos longam. Nam lux prædicta tenuior per vitra non apparuit. Ponthæus autem Feb. 7. se caudam ad longitudinem graduum 12. vidisse scribit. Feb. 25. et deinceps cometa sine caudâ apparuit.

Orbem jam descriptum spectanti et reliqua cometæ hujus phænomena in animo revolventi, haud difficulter constabit, quod corpora cometarum sunt solida, compacta, fixa ac durabilia ad instar corporum planetarum. Nam si nihil aliud essent quàm vapores vel exhalationes Terræ, Solis et planetarum, cometa hicce in transitu suo per viciniam Solis statim dissipari debuisset. Est enim calor Solis ut radiorum densitas, hoc est, reciprocè ut quadratum distantiæ locorum a Sole. Ideóque cùm distantia cometæ a centro Solis Decemb. 8. ubi in perihelio versabatur, esset ad distantiam Terræ a centro Solis ut 6 ad 1000 circiter, calor Solis apud cometam eo tempore erat ad calorem Solis æstivi apud nos ut 1000000 ad 36, seu 28000 ad 1. Sed calor aquæ ebullientis est quasi triplo major

quàm calor quem Terra arida concipit ad æstivum Solem, ut expertus sum: et calor ferri candentis (i) (si rectè conjector) quasi triplo vel quadruplo major quàm calor aquæ ebullientis; ideóque calor, quem Terra arida apud cometam in perihelio versantem ex radiis solaribus concipere posset, quasi 2000 vicibus major quàm calor ferri candentis. Tanto autem calore vapores et exhalationes, omnisque materia volatilis statim consumi ac dissipari debuissent.

Cometa igitur in perihelio suo calorem immensum ad Solem concepit, et calorem illum diutissimè conservare potest. Nam globus ferri candentis digitum unum latus, calorem suum omnem spatio horæ unius in aëre consistens vix amitteret. Globus autem major calorem diutius conservaret in ratione diametri, propterea quod superficies (ad cujus mensuram per contactum aëris ambientis refrigeratur) in illâ ratione minor est pro quantitate materiæ suæ calidæ inclusæ. Ideóque globus ferri candentis huic Terræ æqualis, id est, pedes plus minus 40000000 latus, diebus totidem, et idcirco annis 50000, vix refrigesceret. Suspicor tamen quod duratio caloris, ob causas latentes, augeatur in minore ratione quàm ea diametri: (k) et optarim rationem veram per experimenta investigari.

Porrò notandum est quod cometa mense Decembri, ubi ad Solem modò incaluerat, caudam emittebat longe majorem et splendidiorem quàm antea mense Novembri, ubi perihelium nondum attigerat. Et universaliter caudæ omnes maximæ et fulgentissimæ e cometis oriuntur statim post transitum eorum per regionem Solis. Conducit igitur calefactio cometæ ad magnitudinem caudæ. (l) Et indè colligere videor quod cauda nihil aliud sit quàm vapor longe tenuissimus, quem caput seu nucleus cometæ per calorem suum emittit.

Cæterùm de cometarum caudis triplex est opinio; eas vel jubar esse Solis per translucida cometarum capita propagatum, vel oriri ex refractione lucis in progressu ipsius a capite cometæ in Terram, vel denique

(i) * *Si rectè conjector.* Hanc Newtoni conjecturam experimenta confirmant. In Transact. Philosoph. num. 270. describitur tabula caloris gradus exhibens. (Hujus tabulæ constructionem jam exposuimus in not. ad Cor. 4. Prop. VIII. Lib. III.) Ex relatis ab autore experimentis colligitur calorem ferri, quantum levioris ignis auxilio fieri potuit, candefacti, circiter fuisse $2\frac{1}{2}$ majorem quàm calor aquæ ebullientis. Hinc ignis vehementioris ope aucto calore ferri candentis, rectè conjectatur Newtonus calorem hujus ferri quasi triplo vel quadruplo majorem fieri quàm calor aquæ ebullientis.

(k) * *Et optarim rationem veram.* Clariss. Hermannus Boerhaave in Elementis Chemiæ, diligentissimis experimentis se invenisse refert eò diutiùs calorem in corporibus retineri quo majora sunt, cæteris paribus. Si autem corpora ejusdem diametri ejusdemque caloris, diversæ sint densitatis, quæ densiora sunt, caloris quoque sunt tenaciora; densitas enim ignem coërcet, illiusque egressum ex intimis partibus retardat. Quia verò intimæ corporum partes innumeris modis variari atque inter se permisceri possunt, hinc patet in ipsâ caloris conservatione non leves varietates oriri posse. Hæ sunt fortasse latentes causæ quæ Newtonum in eam suspicionem induxerunt, durationem scilicet caloris augeri in minori ratione quàm eâ diametri.

(l) * *Et indè colligere videor.* Hanc sententiam pluribus argumentis deinceps confirmat Newtonus.

nubem esse seu vaporem a capite cometæ jugiter surgentem et abeuntem in partes a Sole aversas. Opinio prima eorum est qui nondum imbuti sunt scientiâ rerum opticarum. Nam jubar Solis in cubiculo tenebroso non cernitur, nisi quatenus lux reflectitur e pulverum et fumorum particulis per aërem semper volitantibus: ideóque in aëre fumis crassioribus infecto splendidius est, et sensum fortiùs ferit; in aëre clariore tenuius est et ægriùs sentitur: in cœlis autem sine materiâ reflectente nullum esse potest. Lux non cernitur quâtenus in jubare est, sed quâtenus inde reflectitur ad oculos nostros. Nam visio non fit nisi per radios qui in oculos impingunt. Requiritur igitur materia aliqua reflectens in regione caudæ, ne cœlum totum luce Solis illustratum uniformiter splendeat. Opinio secunda multis premitur difficultatibus. Caudæ nunquam variegantur coloribus: qui tamen refractionum solent esse comites inseparabiles. Lux fixarum et planetarum distinctè ad nos transmissa demonstrat medium cœleste nullâ vi refractivâ pollere. Nam quod dicitur, fixas ab Ægyptiis cometas nonnunquam visas fuisse, id, quoniam rarissimè contingit, adscribendum est nubium refractioni fortuitæ. Fixarum quoque radiatio et scintillatio ad refractiones tum oculorum tum aëris tremuli referendæ sunt: quippe quæ admotis oculo telescopiis evanescunt. Aëris et ascendentium vaporum tremore fit, ut radii facilè de angusto pupillæ spatio per vices detorqueantur, de latiore autem vitri objectivi aperturâ neutiquam. Inde est quòd scintillatio in priori casu generetur, in posteriore autem cesset: et cessatio in posteriore casu demonstrat regularem transmissionem lucis per cœlos sine omni refractione sensibili. Ne quis contendat quod caudæ non soleant videri in cometis, cùm eorum lux non est satis fortis, quia tunc radii secundarii non habent satis virium ad oculos movendos, et propterea caudas fixarum non cerni: (m) sciendum est quod lux fixarum plus centum vicibus augeri potest mediantibus telescopiis, nec tamen caudæ cernuntur. Planetarum quoque lux copiosior est, caudæ verò nullæ: cometæ autem sæpe caudatissimi sunt, ubi capitum lux tenuis est et valde obtusa. Sic enim cometa anni 1680, mense Decembri, quo tempore caput luce suâ vix æquabat stellas secundæ magnitudinis, caudam emittebat splendore notabili usque ad gradus 40, 50, 60 vel 70 longitudinis et ultrà: postea Jan. 27 et 28 caput apparebat ut stella septimæ tantum magnitudinis, cauda verò luce quidem pertenui sed satis sensibili longa erat 6. vel 7. gradus, et luce obscurissimâ; quæ cerni vix

(m) * *Sciendum est.* Ut notum est ex telescopiorum theoriâ apud omnes passim rerum opticarum et catoptricarum scriptores. Sed ea potissimum legi merentur quæ de lucis intensitate, visionis distinctione et telescopiorum beneficiis dedit clariss. vir Robert Smith in eximio Opere Optico.

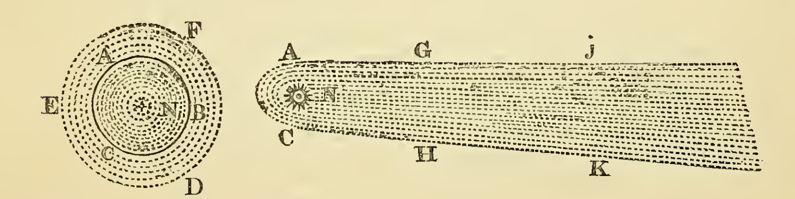
posset, porrigebatur ad gradum usque duodecimum vel paulò ultrà: ut supra dictum est. Sed et Feb. 9 et 10 ubi caput nudis oculis videri desierat, caudam gradus duos longam per telescopium contemplatus sum. Porrò si cauda oriretur ex refractione materiæ cœlestis, et pro figurâ cœlorum deflecteretur de Solis oppositione, deberet deflexio illa in iisdem cœli regionibus in eandem semper partem fieri. Atqui cometa anni 1680. Decembr. 28. hora $8\frac{1}{2}$ p. m. Londini, versabatur in ♓ $8^{gr}. 41'$. cum latitudine boreali $28^{gr}. 6'$. Sole existente in ♑ $18^{gr}. 26'$. Et cometa anni 1577. Dec. 29. versabatur in ♓ $8^{gr}. 41'$. cum latitudine boreali $28^{gr}. 40'$. Sole etiam existente in ♑ $18^{gr}. 26'$. circiter. Utroque in casu Terra versabatur in eodem loco, et cometa apparebat in eâdem cœli parte: in priori tamen casu cauda cometæ (ex meis et aliorum observationibus) declinabat angulo graduum $4\frac{1}{2}$ ab oppositione Solis aquilonem versus; in posteriore verò (ex observationibus Tychonis) declinatio erat graduum 21 in austrum. Igitur repudiatâ cœlorum refractione, superest ut phænomena caudarum ex materiâ aliquâ lucem reflectente deriventur.

Caudas autem a capitibus oriri et in regiones a Sole aversas ascendere confirmatur ([a]) ex legibus quas observant. Ut quod in planis orbium cometarum per Solem transeuntibus jacentes, deviant ab oppositione Solis in eas semper partes, quas capita in orbibus illis progredientia relinquunt. Quòd spectatori in his planis constituto apparent in partibus a Sole

([a]) 164. * *Ex legibus quas observant.* Leges illæ quas observant cometarum caudæ cum prædictâ Newtoni sententiâ apprime congruunt. Cauda a cometæ capite vaporis instar in altum, id est, in partes a Sole aversas assurgens in plano orbis cometæ per Solem transeunte jacere debet; in æthere enim quieto nulla est ratio cur ad hanc potius quàm ad illam partem deflectat. Quia autem vapor a capite exiens duos motus simul componit, alterum scilicet ascensus recti a Sole, alterum verò progressus capitis, hinc fit ut cauda non directe a Sole aversa sit, sed aliquantulum inde deviet in eas partes quas cometæ caput in orbe suo progrediens relinquit; si tamen spectator in orbis cometici plano per Solem transeunte constituatur, deviatio caudæ neutiquam sentitur, quia tota in plano isto jacet. Licet vapor assurgens motum capitis participet, tamen propter aliqualem ætheris resistentiam, minus velociter quàm caput ipsum progreditur, et quo altius ascendit vapor eò fit rarior, id est, quo longior est cauda eò majorem experitur resistentiam, ideóque præcedens caudæ latus, quod scilicet proximus est partibus ad quas tendit cometa, convexum erit, sequens verò concavum, ac proindè cauda non a Sole duntaxat aversa est, sed etiam incurvatur. Hæc a Sole deviatio et curvatura eò minor est quò recta Solem cometamque conjungens obliquior est ad cometæ orbitam; si enim cometa directè a Sole vel ad Solem tenderet, cauda quoque foret recta et a Sole directè aversa. Hinc patet in ipso cometæ perihelio maximam esse caudæ deviationem maximamque curvaturam; tunc enim recta Solem et cometam conjungens ad orbem cometæ normalis est. Præterea ob prædictam licet admodum exiguam ætheris resistentiam, convexa caudæ facies in ætherem incurrens densior est, ac proinde lucidior et distinctius terminata apparebit quàm facies concava. Hæc sunt præcipua caudarum phænomena quibus satisfacit Newtoni opinio. Hinc caudas a capitibus oriri et in regiones a Sole aversas ascendere confirmatur ex legibus quas observant.

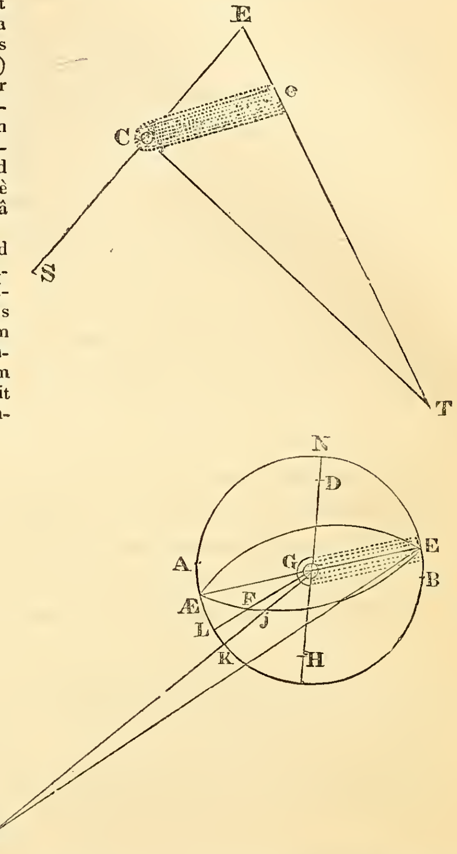
165. Descriptis opinionibus de cometarum caudis adjungenda est illa quam clariss. D. de Mairan in eximio Opere de Aurorâ Boreali his tuetur rationum momentis. Cometas ad Solem proximè accedere observationibus compertum est; hinc Newtonianæ attractionis legibus consentaneum videtur ut aliquam solaris atmosphæræ materiam cometa attrahat. Cur autem materia hæc instar comæ vento agitatæ dispergatur et ad Solis oppositum dirigatur, ex radiorum solarium impulsione oriri potest. Plurimis enim experimentis certum est solares radios omni prorsus impulsionis vi non carere. Clariss. Hombergius varia materiæ levissimæ filamenta radiis

directè aversis; digrediente autem spectatore de his planis deviatio paulatim sentitur, et indies apparet major. Quòd deviatio cæteris paribus minor est ubi cauda obliquior est ad orbem cometæ, ut et ubi caput cometæ ad Solem propiùs accedit; præsertim si spectetur deviationis angulus juxta caput cometæ: præterea quod caudæ non deviantes apparent rectæ, deviantes autem incurvantur. Quod curvatura major est ubi major est deviatio, et magis sensibilis ubi cauda cæteris paribus longior est: nam in brevioribus curvatura ægrè animadvertitur. Quod deviationis angulus minor est juxta caput cometæ, major juxta caudæ extremitatem alteram, atque ideò quod cauda convexo sui latere partes respicit a quibus fit deviatio, quæque in rectâ sunt lineâ a Sole per caput cometæ in infinitum ductâ. Et quod caudæ quæ prolixiores sunt et latiores, et luce vegetiore micant, sint ad latera convexa paulo splendidiores et limite minus indistincto terminatæ quàm ad concava. Pendent igitur phænomena caudæ a motu capitis, non autem a regione cœli in quâ caput conspicitur; et propterea non fiunt per refractionem cœlorum, sed a capite suppeditante materiam oriuntur. Etenim ut in aëre nostro fumus corporis cujusvis igniti petit superiora, idque vel perpendiculariter si corpus quiescat, vel obliquè si corpus moveatur in latus: ita in cœlis, ubi corpora gravitant in Solem, fumi et vapores ascendere debent a Sole (uti jam dictum est) et superiora vel rectà petere, si corpus fumans quiescit, vel obliquè, si corpus progrediendo loca semper deserit a quibus superiores vaporis partes ascenderant. Et obliquitas ista minor erit ubi ascensus vaporis velocior est: nimirum



solaribus in vitri ustorii foco objecta notabiliter impelli observavit. Lamellam quoque elasticam ità ligneæ tabulæ affixit ut extremitas una liberè penderet, collectis vitri ustorii ope solaribus radiis exposita hæc lamella instar penduli sensibiliter ibat et redibat. Quamvis autem levissima sit hic apud nos radiorum solarium impulsio, maxima tamen esse potest in spatiis liberrimis in quibus cometæ deferuntur, præsertim cùm tenuissima sit materia quæ cometarum caudas componit. Jam verò concipiatur cometa N, apparenti cinctus atmosphærâ E D F, in transitu scilicet propè Solem collectâ, ità ut in majori a cometæ nucleo N, distantiâ levior rariorque semper fiat hæc materia, quemadmodum in apparenti cometarum atmosphærâ solet observari. Sphæra interior A B C, ex iis ponatur constare particulis quæ radiorum solarium impulsioni possint resistere, e contrà verò orbis superior A F B D C E, leviores contineat particulas quæ huic impulsioni cedant, manifestum est radiorum solarium impulsione projici versus Solis oppositionem materiæ vestigium B G H j K, quod figuram caudarum repræsentat. Ex dictis patet hanc sententiam cum Newtonianis Principiis consentire; et quidem Newtonus describens posteà Kepleri opinionem quæ eadem ferè est, ab eâ non videtur alienus.

in vicinia Solis et juxta corpus fumans. Ex obliquitatis autem diversitate incurvabitur vaporis columna: et quia vapor in columnæ latere præce-



166. Longitudo caudæ hoc modo potest inveniri. Sit S Sol, C cometa cujus cauda C e; ex cognitis Solis et cometæ locis notus erit angulus T C E, datâque (per observ.) deviatione caudæ a Solis opposito, dabitur angulus E C e, ac proindè innotescet angulus T C e, quem scilicet cauda efficit cum rectâ Terram et cometam jungente. Præterea (per observ.) innotescit angulus ad Terram C T e, quem cauda subtendit, quarè (per theoriam cometæ) datâ cometæ distantiâ a Terrâ, dabitur caudæ longitudo.

167. Novam elegantemque methodum ad cometarum motus in orbe parabolico computandos nobiscum, suâ humanitate, communicavit clariss. vir et in rebus mathematicis versatissimus D. de Chezeaux. Methodum hanc describere longius foret: paucis duntaxat exponemus quâ ratione longitudinem atque deviationem caudæ investigat. Sit cometa in puncto G circà quod tanquam centrum describatur sphæra cujus radii G A, G E, sint æquales longitudini caudæ cometæ. Concipiatur in hâc sphærâ planum eclipticæ parallelum habens polos in D et H, itemque concipiatur planum A K B E parallelum orbitæ veræ cometæ habens polum unum in G, sit Terra in M, ejus longitudo e cometâ visa et ad planum orbitæ A K B E reducta, exprimetur per arcum K B, latitudo autem per arcum K j. Quia verò datur (per observ.) longitudo cometæ e Terrâ visa, dabitur longitudo Terræ e cometâ visa; sed datur latitudo cometæ (per observ.) et (per theoriam cometæ) habetur inclinatio plani A K B E, ad planum eclipticæ, itemque innotescit locus nodi B. Quarè (per trigon. sphær.) invenietur longitudo Terræ respectu plani A K B E, cujus mensura est arcus B N A K, dabiturque latitudo K j. Jam verò ductâ lineâ M E, ex Terrâ M, ad extremitatem caudæ E, cujus extremitatis longitudo et latitudo e Terrâ visæ (per observ.) notæ sunt, agatur G F parallela rectæ E M, eodem planè modo ac suprà innotescet positio puncti F in superficie sphæræ respectu plani A K B E, descriptoque arcu circuli maximi G F L, invenientur arcus B N A L et F L. Sed in triangulo sphærico G j F, datis latere G j, complemento scilicet ad j K, et latere G F, complemento ad F L, atque latere F j, mensurâ anguli F G j, qui æqualis est angulo G M E, invenietur angulus G F j. Tandem concipiatur planum circuli maximi transiens per puncta F, j, per centrum G, commune sphæræ et cometæ, atque per extremitatem caudæ E, cujusque sectio cum plano A N B, sit recta E G Æ, formabitur alterum triangulum sphæricum Æ F L, cujus jam innotescunt angulus Æ F L et latus F L, quare dabitur latus Æ L, ac proindè etiam dabitur arcus B A Æ, ob datum arcum B A L; innotescet præterea arcus B E, atquè obtinebitur arcus Æ F, qui additus arcui F j, dabit arcum Æ j, ideóque dabitur arcus E j, mensura anguli rectilinei j G E, vel M G E. Datis autem in triangulo rectilineo M G E, angulis M G E, G M E et latere G M, dabitur latus G E, hoc est, longitudo caudæ. Si itaque habeatur distantia cometæ a Terrâ in partibus mediocris distantiæ Terræ a Sole expressa, in iisdem quoquè partibus obtinebitur longitudo caudæ. Quoniam verò (ex theoriâ cometæ) datur distantia cometæ a nodo ex Sole visa, si ex hâc distantiâ subtrahatur arcus B E, habebitur angulus quem recta per Solem et cometam ducta comprehendit cum caudâ G E, hoc est, deviatio cometæ a Sole.

dente paulo recentior est, ideò etiam is ibidem aliquanto densior erit, lucemque propterea copiosiùs reflectet, et limite minus indistincto terminabitur. De caudarum agitationibus subitaneis et incertis, deque earum figuris irregularibus, quas nonnulli quandoque describunt, hic nihil adjicio propterea quod vel a mutationibus aëris nostri, et motibus nubium caudas aliquâ ex parte obscurantium oriantur; vel forte a partibus Viæ Lacteæ, quæ cum caudis prætereuntibus confundi possint, ac tanquam earum partes spectari.

Vapores autem, qui spatiis tam immensis implendis sufficiant, ex cometarum atmosphæris oriri posse, intelligetur ex raritate aëris nostri. Nam aër juxta superficiem Terræ spatium occupat quasi 850 partibus majus quàm aqua ejusdem ponderis, ideóque aëris columna cylindrica pedes 850 alta ejusdem est ponderis cum aquæ columnâ pedali latitudinis ejusdem. Columna autem aëris ad summitatem atmosphæræ assurgens æquat pondere suo columnam aquæ pedes 33 altam circiter; et propterea si columnæ totius aëreæ pars inferior pedum 850 altitudinis dematur, pars reliqua superior æquabit pondere suo columnam aquæ altam pedes 32. Indè verò (per regulam [b] multis experimentis confirmatam, quod compressio aëris sit ut pondus atmosphæræ incumbentis, quodque gravitas sit reciprocè ut quadratum distantiæ locorum a centro Terræ) computationem [c] per Corol. Prop. XXII. Lib. II. ineundo, inveni quod aër, si ascen-

[b] * *Multis experimentis confirmatam.* Experimenta illa referunt passim rerum physicarum scriptores, sed præsertim clariss. Muskembroek in Physicâ. Videantur etiam Transactiones Philosophicæ an. 1671. num. 73.

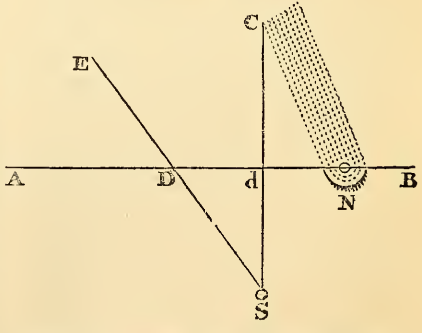
[c] 168. * *Per Corol. Prop. XXII. Lib. II.* Sit (in figurâ Prop. XXII.) S centrum Terræ, S A ejusdem semi-diameter mediocris pedum 19615800 = r, A B pedum 850, et ideò S P = 19616650 = a, S F = 2 r, dignitas hyperbolæ f a h = r r, ideóque A a = r, $F f = \frac{1}{2} r$, et $B b = \frac{rr}{a}$ ac proinde $A a - F f = \frac{1}{2} r$, et $A a - B b = \frac{ar - rr}{a}$. Densitas A H seu S t = m = 33, densitas B j, seu S u = n = 32, et densitas F N, sive S Z = d. His positis, (ex naturâ hyperbolæ per Theor. IV. de hyperbolâ), erit area t h n z, ad aream t h i u, ut $L.\frac{m}{d}$ ad $L.\frac{m}{n}$, et (per Corol. Prop. XXII. Lib. II.) erit $L.\frac{m}{d} : L.\frac{m}{n} = \frac{1}{2} r : \frac{ar - rr}{a} = a : 2a - 2r$, ideóque $L.\frac{m}{d} = \frac{a}{2a - 2r} \times L.\frac{33}{32}$. Est autem $\frac{a}{2a - 2r} = \frac{1961665}{170}$, et ex tabulis vulgaribus $L.\frac{33}{32} = 0.0133639$. Quarè $L.\frac{m}{d} = 154.20879349$. Densitas ergò aëris in A seu in superficie Telluris se habet ad densitatem aëris in F, seu in distantiâ semi-diametri Telluris ab eâdem superficie ut numerus respondens logarithmo 154.20879349 ad unitatem. Porrò logarithmo 3.2087100 in tabulis vulgaribus respondet numerus 1617 et ideò logarithmo 3.20879349 respondere debet numerus unitate fere integrâ major quàm 1617. Logarithmo igitur invento 154.20879349 respondet numerus major quàm 1617 cum 151 zeris adscriptis. Jam verò semi-diameter Terræ sit ut prius 19615800 pedum. Parallaxis Solis ponatur 10″. cujus sinus rectus est partium 485 posito radio partium 10000000. Quoniam semi-diameter orbis magni est ad semi-diametrum Terræ ut radius ad sinum parallaxis Solis (30. Lib. III.) erit semi-diameter orbis magni pedum circiter 5000000000000. Sed semi-diameter orbis Saturni circiter decuplo major est (Phæn. IV.) erit igitur hæc semi-diameter pedum 50000000000000, ideóque diameter pedum 100000000000000, sive digitorum 1200000000000000. Est igitur sphæra Saturni ad globum cujus diameter est digitus unus, ut præcedentis numeri cubus sive 1728 cum annexis 39 cyphris ad unitatem; sed ratio illa multò minor est ratione densitatum modò inventâ;

datur a superficie Terræ ad altitudinem semi-diametri unius terrestris, rarior sit quàm apud nos in ratione longè majori, quam spatii omnis infra orbem Saturni ad globum diametro digiti unius descriptum. Ideóque globus aëris nostri digitum unum latus, eâ cum raritate quam haberet in altitudine semi-diametri unius terrestris, impleret omnes planetarum regiones usque ad sphæram Saturni et longè ultrà. Proindè cùm aër adhuc altior in immensum rarescat, et coma seu atmosphæra cometæ, ascendendo ab illius centro, quasi decuplo altior sit quàm superficies nuclei, deinde cauda adhuc altius ascendat, debebit cauda esse quàm rarissima. Et quamvis ob longè crassiorem cometarum atmosphæram, magnamque corporum gravitationem Solem versus, et gravitationem particularum aëris et vaporum in se mutuò, fieri possit ut aër in spatiis cœlestibus inque cometarum caudis non adeò rarescat; perexiguam tamen quantitatem aëris et vaporum ad omnia illa caudarum phænomena abundè sufficere, ex hac computatione perspicuum est. Nam et caudarum insignis raritas colligitur ex astris per eas translucentibus. Atmosphæra terrestris luce Solis splendens, crassitudine suâ paucorum milliarium, et astra omnia et ipsam Lunam obscurat et extinguit penitus: per immensam verò caudarum crassitudinem, luce pariter solari illustratam, astra minima sine claritatis detrimento translucere noscuntur. Neque major esse solet caudarum plurimarum splendor, quàm aëris nostri in tenebroso cubiculo latitudine digiti unius duorumve lucem Solis in jubare reflectentis.

Quo temporis spatio vapor a capite ad terminum caudæ ascendit, (d) cognosci ferè potest ducendo rectam a termino caudæ ad Solem, et

quarè globus aëris nostri digitum unum latus eâ cum raritate quam haberet in altitudine semi-diametri unius terrestris, impleret omnes planetarum regiones usque ad sphæram Saturni et longè ultrà.

(d) 169. * *Cognosci ferè potest.* Referat S Solem, A B trajectoriæ cometicæ portionem. Sit N cometæ nucleus ab A versus B progrediens, C terminus caudæ. Ducatur recta a termino illo C ad Solem, punctum d, ubi recta trajectoriam secat, designabit locum ex quo vapor in termino caudæ ascendere cœpit a capite, si vapor ille rectâ ascendat a Sole. Quia autem vapor non rectâ ascendit a Sole, sed vergit versus partes A, quas cometa reliquit (164.) agatur recta S E, parallela longitudini caudæ, vel potius (ob motum curvilineum cometæ) recta illa a lineâ caudæ divergat, atque trajectoriam cometæ alicubi intersecet, putà in D, vapor qui nunc terminum caudæ constituit, a nucleo cœpit ascendere dum cometa in trajectoriæ suæ loco D versabatur; hic enim vapor cum motu ascensûs a Sole, motum cometæ propressivum quem antè ascensum suum habebat, componit. Sed per varias methodos paulò antè explicatas inveniri potest tempus quo cometa

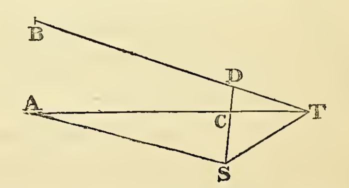


locum D occupavit, et potest definiri quanto temporis spatio opus sit ut cometa trajectoriæ portionem D N, longitudine datam, percurrat,

notando locum ubi recta illa trajectoriam secat. Nam vapor in termino caudæ, si recta ascendat a Sole, ascendere cœpit a capite, quo tempore caput erat in loco intersectionis. At vapor non rectà ascendit a Sole, sed motum cometæ, quem ante ascensum suum habebat, retinendo, et cum motu ascensûs sui eundem componendo, ascendit obliquè. Unde verior erit Problematis solutio, ut recta illa, quæ orbem secat, parallela sit longitudini caudæ, vel potiùs (ob motum curvilineum cometæ) ut eadem a lineâ caudæ divergat. Hoc pacto inveni quod vapor, qui erat in termino caudæ Jan. 25. ascendere cœperat a capite ante Dec. 11. ideóque ascensu suo toto, dies plus 45 consumpserat. At cauda illa omnis quæ Dec. 10. apparuit, ascenderat spatio dierum illorum duorum, qui a tempore perihelii cometæ elapsi fuerant. Vapor igitur sub initio in viciniâ Solis celerrimè ascendebat, et postea cum motu per gravitatem suam semper retardato ascendere pergebat; et ascendendo augebat longitudinem caudæ: cauda autem, quamdiù apparuit, ex vapore ferè omni constabat, qui a tempore perihelii ascenderat; et vapor, qui primus ascendit, et terminum caudæ composuit, non priùs evanuit quàm ob nimiam suam tam a Sole

ideóque habebitur proxime tempus quo vapor ad terminum caudæ ascendit. Simili modo determinari potest temporis spatium quo vapor ascendit ad datum caudæ punctum.

170. Ex his quæ de cometarum caudis hactenus dicta sunt, cometarum, quandiù nobis conspicui sunt, maxima possibilis distantia a Sole et Terrâ definiri potest. Referat S Solem, T Terram, S T A distantiam cometæ a Sole, sitque A T B, apparens longitudo caudæ. Quoniam lux propagatur a termino caudæ secundùm lineam rectam T B, reperitur terminus ille alicubi in lineâ T B, putà in D. Jungatur D S, secans lineam T A in C, et quia cauda semper opponitur Soli quamproximè, ideóque Sol, caput cometæ et terminus caudæ jacent in directum, reperitur caput cometæ in C. Rectæ T B, agatur parallela S A, occurrens lineæ T A, in A, caput cometæ C necessariò reperietur inter T et A, nam terminus caudæ reperitur alicubi in lineâ infinitâ T B, et lineæ omnes ut S D, quæ ab S ad lineam T B duci possunt, secant lineam T A, alicubi inter T et A. Quarè cometa non potest longius abesse a Terrâ quàm intervallo T A, nec a Sole quàm intervallo S A ultrà Solem, vel S T, citrà. Exemplo sit cometa an. 1680. cometa ille die 12. Dec. distabat 9°. a Sole et longitudo caudæ erat 35°. Quarè construatur triangulum T S A, cujus angulus T æqualis sit distantiæ 9°. et angulus A seu angulus A T B æqualis sit longitudini caudæ 35°. erit S A ad S T, id est, limes maximæ possibilis distantiæ cometæ a Sole ad semi-diametrum orbis magni ut sinus anguli T, ad sinum anguli A, hoc est, ut 3. ad 11. circiter. Quarè cometa eo tempore minus distabat a Sole quàm $\frac{3}{11}$ partibus distantiæ Terræ a Sole, et propterea versabatur aut intrà orbem Mercurii aut inter orbem illum et Terram. Rursus die 21. Dec. distantia cometæ a Sole erat $32°.\frac{2}{5}$ et longitudo caudæ 70°. ergò ut sinus $32°.\frac{2}{5}$. ad sinum 70°. hoc est, ut 4 ad 7,ità erat limes intervalli inter cometam et Solem ad distantiam Terræ a



Sole, et propterea nondum cometa excesserat ex orbe Veneris. Die 28. Decembr. distantia cometæ a Sole erat 55°. et longitudo caudæ 56°. Quare, iisdem calculi vestigiis insistendo, limes intervalli inter cometam et Solem, nondum æquabat distantiam Terræ a Sole, et propterea cometa nondum excesserat ex orbe Telluris. Hâc methodo quam ex Newtoni Opusculo de Mundi Systemate descripsimus, aliorum cometarum distantias limitando inventum est cometas omnes, quandiù se nobis ostendunt, versari intrà spatium sphæricum centro Sole et intervallo Solis ac Terræ vel duplicato vel ad summum triplicato descriptum.

illustrante quàm ab oculis nostris distantiam videri desiit. Unde etiam caudæ cometarum aliorum, quæ breves sunt, non ascendunt motu celeri et perpetuò a capitibus et mox evanescunt, sed sunt permanentes vaporum et exhalationum columnæ, a capitibus lentissimo multorum dierum motu propagatæ, quæ, participando motum illum capitum quem habuêre sub initio, per cœlos unà cum capitibus moveri pergunt. (e) Et hinc rursus colligitur spatia cœlestia vi resistendi destitui; utpote in quibus non solum solida planetarum et cometarum corpora, sed etiam rarissimi caudarum vapores motus suos velocissimos liberrimè peragunt ac diutissimè conservant.

Ascensum caudarum ex atmosphæris capitum et progressum in partes a Sole aversas Keplerus ascribit actioni radiorum lucis materiam caudæ secum rapientium. Et auram longè tenuissimam in spatiis liberrimis actioni radiorum cedere, (f) non est a ratione prorsus alienum, non obstante quod substantiæ crassæ impeditissimis in regionibus nostris a radiis Solis sensibiliter propelli nequeant. Alius particulas tam leves quàm graves dari posse existimat, et materiam caudarum levitare, perque levitatem suam a Sole ascendere. Cùm autem gravitas corporum terrestrium sit ut materia in corporibus, ideóque servatâ quantitate materiæ intendi et remitti nequeat, suspicor ascensum illum ex rarefactione materiæ caudarum potiùs oriri. Ascendit fumus in camino impulsu aëris cui innatat. Aër ille per calorem rarefactus ascendit, ob diminutam suam gravitatem specificam, et fumum implicatum rapit secum. Quidni cauda cometæ ad eundem modum ascenderit a Sole? Nam radii solares non agitant media, quæ permeant, nisi in reflexione et refractione. Particulæ reflectentes eâ actione calefactæ calefacient auram æthercam cui implicantur. Illa calore sibi communicato rarefiet, et ob diminutam eâ raritate gravitatem suam specificam, quâ priùs tendebat in Solem, ascendet et secum rapiet particulas reflectentes ex quibus cauda componitur: ad ascensum vaporum conducit etiam, quod hi gyrantur circa Solem et eâ actione conantur a Sole recedere, at Solis atmosphæra et materia cœlorum vel planè quiescit, vel motu solo quem a Solis rotatione acceperit, tardiùs gyratur. Hæ sunt causæ ascensûs caudarum in viciniâ Solis, ubi orbes curviores sunt, et cometæ intra densiorem et eâ ratione graviorem Solis atmosphæram consistunt, et caudas quàm longissimas mox emittunt. Nam caudæ, quæ tunc nascuntur, conservando motum suum et interea versus Solem gravitando, movebuntur circa Solem in ellipsibus pro more capitum, et per

(e) * *Et hinc rursùs colligitur.* Legantur quæ dicta sunt in scholio Prop. XI. Lib. II.
(f) * *Non est a ratione prorsus alienum* (165).

motum illum capita semper comitabuntur et iis liberrimè adhærebunt. Gravitas enim vaporum in Solem non magis efficiet ut caudæ postea decidant a capitibus Solem versus, quàm gravitas capitum efficere possit, ut hæc decidant a caudis. Communi gravitate vel simul in Solem cadent, vel simul in ascensu suo retardabuntur; ideóque gravitas illa non impedit, quò minùs caudæ et capita positionem quamcunque ad invicem a causis jam descriptis, aut aliis quibuscunque facillimè accipiant et postea liberrimè servent.

Caudæ igitur, quæ in cometarum periheliis nascuntur, in regiones longinquas cum eorum capitibus abibunt, et vel indè post longam annorum seriem cum iisdem ad nos redibunt, vel potiùs ibi rarefactæ paulatim evanescent. Nam postea in descensu capitum ad Solem caudæ novæ breviusculæ lento motu a capitibus propagari debebunt, et subindè in periheliis cometarum illorum, qui ad usque atmosphæram Solis descendent, in immensum augeri. Vapor enim in spatiis illis liberrimis perpetuò rarescit ac dilatatur. Quâ ratione fit ut cauda omnis ad extremitatem superiorem latior sit quàm juxta caput cometæ. Eâ autem rarefactione vaporem perpetuò dilatatum diffundi tandem et spargi per cœlos universos, deindè paulatim in planetas per gravitatem suam attrahi, et cum eorum atmosphæris misceri, rationi consentaneum videtur. Nam quemadmodum maria ad constitutionem Terræ hujus omnino requiruntur, idque ut ex iis per calorem Solis vapores copiosè satis excitentur, qui vel in nubes coacti decidant in pluviis, et Terram omnem ad procreationem vegetabilium irrigent et nutriant; vel in frigidis montium verticibus condensati (([g]) ut aliqui cum ratione philosophantur) decurrant in fontes et flumina: sic ad conservationem marium et humorum in planetis requiri videntur cometæ, ex quorum exhalationibus et vaporibus condensatis, quicquid liquoris per vegetationem et putrefactionem consumitur et in Terram aridam convertitur, continuò suppleri et refici possit. Nam vegetabilia omnia ex liquoribus omninò crescunt, dein magnâ ex parte in Terram aridam per putrefactionem abeunt, et limus ex liquoribus putrefactis perpetuò decidit. Hinc moles Terræ aridæ in dies augetur, et liquores, nisi aliundè augmentum sumerent, perpetuò decrescere deberent, ac tandem deficere. Porrò suspicor spiritum illum, qui aëris nostri par minima est, sed subtilissima et optima, et ad rerum omnium vitam requiritur, ex cometis præcipuè venire.

([g]) * *Ut aliqui cum ratione philosophantur.* Horumce philosophorum rationes videre est passim apud omnes cultiores physicos. Legantur Transact. Philosoph. an. 1687. 1694. 1725. et Monum. Acad. Paris. an. 1703.

Atmosphæræ cometarum in descensu eorum in Solem excurrendo in caudas, diminuuntur, et (eâ certè in parte quæ Solem respicit) angustiores redduntur: et vicissim in recessu eorum a Sole, ubi jam minùs excurrunt in caudas, ampliantur; si modò phænomena eorum Hevelius rectè notavit. Minimæ autem apparent, ubi capita jam modò ad Solem calefacta in caudas maximas et fulgentissimas abiêre, et nuclei fumo forsan crassiore et nigriore in atmosphærarum partibus infimis circundantur. Nam fumus omnis ingenti calore excitatus crassior et nigrior esse solet. Sic caput cometæ, de quo egimus, in æqualibus a Sole ac Terrâ distantiis obscurius apparuit post perihelium suum quàm antea. Mense enim Decembri cum stellis tertiæ magnitudinis conferri solebat, at mense Novembri cum stellis primæ et secundæ. Et qui utrumque viderant, majorem describunt cometam priorem. Nam juveni cuidam Cantabrigiensi, Novem. 19. cometa hicce luce suâ quantumvis plumbeâ et obtusâ, æquabat Spicam Virginis, et clarius micabat quàm postea. Et Montenaro Nov. 20. st. vet. cometa apparebat major stellis primæ magnitudinis, existente caudâ duorum graduum longitudinis. Et D. Storer literis, quæ in manus nostras incidêre, scripsit caput ejus mense Decembri, ubi caudam maximam et fulgentissimam emittebat, parvum esse et magnitudine visibili longè cedere cometæ, qui mense Novembri ante Solis ortum apparuerat. Cujus rei rationem esse conjectabatur, quod materia capitis sub initio copiosior esset, et paulatim consumeretur.

Eodem spectare videtur, quod capita cometarum aliorum, qui caudas maximas et fulgentissimas emiserunt, apparuerint subobscura et exigua. Nam anno 1668. Mart. 5. st. nov. horâ septimâ vespertinâ R. P. Valentinus Estancius, Brasiliæ agens, cometam vidit horizonti proximum ad occasum Solis brumalem, capite minimo et vix conspicuo, caudâ verò suprà modum fulgente, ut stantes in littore speciem ejus e mari reflexam facilè cernerent. Speciem utique habebat trabis splendentis longitudine 23 graduum, ab occidente in austrum vergens, et horizonti ferè parallela. Tantus autem splendor tres solùm dies durabat, subindè notabiliter decrescens; et interea decrescente splendore aucta est magnitudine cauda. Undè etiam in Lusitaniâ quartam ferè cœli partem (id est, gradus 45) occupasse dicitur ab occidente in orientem splendore cum insigni portensa; nec tamen tota apparuit, capite semper in his regionibus infrà horizontem delitescente. Ex incremento caudæ et decremento splendoris manifestum est, quod caput a Sole recessit, eique proximum fuit initio, pro more cometæ anni 1680. Et in Chronico Saxonico similis legitur cometa anni 1106. *cujus stella erat parva et obscura* (ut ille anni 1680.) *sed splendor*

qui ex eâ exivit valde clarus et quasi ingens trabs ad orientem et aquilonem tendebat, ut habet etiam Hevelius ex Simeone Dunelmensi Monacho. Apparuit initio mensis Februarii, ac deinceps circa vesperam, ad occasum Solis brumalem. Indè verò et ex situ caudæ colligitur caput fuisse Soli vicinum. *A Sole*, inquit Matthæus Parisiensis, *distabat quasi cubito uno, ab horâ tertiâ* (rectiùs sextâ) *usque ad horam nonam radium ex se longum emittens*. Talis etiam erat ardentissimus ille cometa ab Aristotele descriptus Lib. I. Meteor. VI., *cujus caput primo die non conspectum est, eo quod ante Solem vel saltem sub radiis solaribus occidisset, sequente verò die quantum potuit visum est. Nam quam minima fieri potest distantia Solem reliquit, et mox occubuit. Ob nimium ardorem* (caudæ scilicet) *nondum apparebat capitis sparsus ignis, sed procedente tempore* (ait Aristoteles) *cùm* (cauda) *jam minus flagraret, reddita est* (capiti) *cometæ sua facies. Et splendorem suum ad tertiam usque cœli partem* (id est, ad $60^{gr.}$) *extendit. Apparuit autem tempore hyberno* (an. 4. Olymp. 101.) *et ascendens usque ad cingulum Orionis ibi evanuit.* Cometa ille anni 1618, qui e radiis solaribus caudatissimus emersit, stellas primæ magnitudinis æquare vel paulò superare videbatur, sed majores apparuere cometæ non pauci, qui caudas breviores habuere. Horum aliqui Jovem, alii Venerem vel etiam Lunam æquasse traduntur.

(h) Diximus cometas esse genus planetarum in orbibus valde eccentricis circa Solem revolventium. Et quemadmodum e planetis non caudatis minores esse solent, qui in orbibus minoribus et Soli propioribus gyrantur, sic etiam cometas, qui in periheliis suis ad Solem propiùs accedunt, ut plurimum minores esse, ne Solem attractione suâ nimis agitent, rationi consentaneum videtur. (i) Orbium verò transversas diametros et revolutionum tempora periodica, ex collatione cometarum in iisdem orbibus

(h) 171. * *Diximus cometas esse genus planetarum*, idque gravissimis rationibus confirmatur. Hâc enim factâ hypothesi computatisque per methodos præcedentes cometarum trajectoriis, hujusmodi trajectoriæ semper cum phænomenis congruunt quamproximè clariss. Halleius suspicatur cometam an. 1531. ab Appiano observatum, eundem fuisse cum illo qui anno 1607. descriptus est a Keplero et Longomontano, et quem Halleius ipse redeuntem observavit an. 1682. quadrabant enim elementa omnia, solaque periodorum inæqualitas adversari videbatur. Verùm tanta non fuit inæqualitas illa ut causis physicis adscribi non possit. Saturni enim motus a cæteris planetis et præsertim a Jove ità perturbatur ut per aliquot dies integros incertum sit hujus planetæ tempus periodicum. Rectè etiam animadvertit clariss. Cassinus in Mon. Paris. 1699. cometam diversis temporibus observatum ideóque pro duobus cometis usurpatum, unum eundemque esse posse, licet non conveniant inter se omnia motuum elementa; fieri scilicet potest ut unus idemque cometa bis observatus non secet eclipticam sub eodem angulo et in iisdem locis, ut cometæ hujus velocitas in perigæo non sit eadem. Talibus enim erroribus aliisque plurimis Luna est obnoxia. Cæterum clariss. Halleius diligenter perpensis motibus cometæ an. 1682. hujus cometæ reditum anno 1758. futurum esse prædixit.

(i) * *Orbium verò transversas diametros et revolutionum tempora periodica*. Hæc duo obtineri possunt per methodum num. 160. expositam.

post longa temporum intervalla redeuntium, determinanda relinquo. Interea huic negotio Propositio sequens lumen accendere potest.

PROPOSITIO XLII. PROBLEMA XXII.

Inventam cometæ trajectoriam corrigere.

Operatio 1. Assumatur positio plani trajectoriæ, per Propositionem superiorem inventa; et seligantur tria loca cometæ observationibus accuratissimis definita, et ab invicem quàmmaximè distantia; sitque A tempus inter primam et secundam, ac B tempus inter secundam ac tertiam. Cometam autem in eorum aliquo ([k]) in perigæo versari convenit, vel saltem non longè a perigæo abesse. ([l]) Ex his locis apparentibus inveniantur, per operationes trigonometricas, loca tria vera cometæ in assumpto illo plano trajectoriæ. Deindè per loca illa inventa, circa centrum Solis ceu umbilicum, per operationes arithmeticas, ope Prop. XXI. Lib. I. institutas, describatur sectio conica: ([m]) et ejus areæ, radiis a Sole ad loca inventa ductis terminatæ, sunto D et E, nempe D area inter observationem primam et secundam, et E area inter secundam ac tertiam. Sitque T tempus totum, quo area tota D + E velocitate cometæ per Prop. XVI. Lib. I. inventa describi debet.

Oper. 2. Augeatur ([n]) longitudo nodorum plani trajectoriæ; additis ad longitudinem illam 20′. vel 30′. quæ dicantur P; et servetur plani illius inclinatio ad planum eclipticæ. Deinde ex prædictis tribus cometæ locis observatis, inveniantur in hoc novo plano loca tria vera, ut suprà: deinde etiam orbis per loca illa transiens, ([o]) et ejusdem areæ duæ inter

([k]) * *In perigæo versari convenit.* Versante enim cometa in perigæo vel saltem non longè a perigæo, illius motus magis accuratè definitur.

([l]) * *Ex his locis apparentibus.* Inveniantur per operationes trigonometricas (ut in Prop. præced.) loca tria vera cometæ in assumpto illo plano trajectoriæ tanquam accurato, hoc est, inveniantur tria prius definiti plani puncta in quibus cometa eandem longitudinem ac latitudinem obtineret quam reverâ habere observatur.

([m]) * *Ejus areæ.* Ex datâ cometæ semitâ ejusque partium magnitudine, respectu semitæ Telluris ejusque partium, dabitur velocitas quâ cometa illam describit, ideóque dabitur tempus quo cometa areas duas jam inventas percurrit. Tempus illud totum dicatur T, capiaturque numerus C, qui sit ad 1, ut tempus inter observationem primam et secundam ad tempus inter observationem secundam et tertiam, hoc est, ut A ad B. Sumatur prætereà G ad 1, ut areæ inter observationem primam et secundam ad aream inter observationem secundam et tertiam, id est, ut D ad E; eadem quoque erit ratio inter tempora quibus areæ illæ radiis ad Solem ductis describentur. Sit S, tempus verum inter observationem primam et tertiam. Si reperiatur T = S, et G = C, inventa plani trajectoriæ positio vera erit et accurata, nullâ indigens correctione. Sin aliter, erit T — S, error in tempore toto inter observationem primam et tertiam ortus, nimirum ex positione plani trajectoriæ minus accuratâ, et G — C, erit error ex eâdem causâ ortus in ratione temporis inter observationem primam et secundam, ad tempus inter observationem secundam et tertiam, ut patet; nam in utroque casu unitas usurpatur pro consequente rationis inter bina tempora.

([n]) * *Longitudo nodorum*, per num. 145. inventa.

([o]) * *Et ejusdem areæ duæ.* Harumce arearum inter tres observationes radiis ad Solem ductis descriptarum ratio sit ut g, ad 1; sitque t,

observationes descriptæ, quæ sint d et e, nec non tempus totum t, quo area tota d + e describi debeat.

Oper. 3. Servetur longitudo nodorum in operatione primâ, et augeatur inclinatio plani trajectoriæ ad planum eclipticæ, additis ad inclinationem illam 20′. vel 30′. quæ dicantur Q. Deinde ex observatis prædictis tribus cometæ locis apparentibus inveniantur in hoc novo plano loca tria vera, orbisque per loca illa transiens, (p) ut et ejusdem areæ duæ inter observationes descriptæ, quæ sint δ et ε, et tempus totum τ, quo area tota $\delta + \varepsilon$ describi debeat.

(q) Jam sit C ad 1 ut A ad B, et G ad 1 ut D ad E, et g ad 1 ut d ad e, et γ ad 1 ut δ ad ε; sitque S tempus verum inter observationem primam ac tertiam; et signis + et — probè observatis quærantur numeri m et n, eâ lege, ut sit $2\,G - 1\,C = m\,G - m\,g + n\,G - n\,\gamma$, et $2\,T - 2\,S$

tempus totum quo cometa utramque aream describeret. Si deprehendatur $t = S$ et $g = C$, assumpta plani positio vera erit et accurata. Sin aliter erit, ut suprà in operatione 1ª, $t - S$, error in tempore toto inter observationem primam et tertiam, et $g - C$ error in ratione temporis inter observationem primam et secundam ad tempus inter observationem secundam ad tertiam. Uterque hic error oritur ex positione non satis accuratâ plani trajectoriæ ad planum eclipticæ.

(p) * *Ut et ejusdem areæ duæ.* Sint areæ illæ ut γ ad 1, sitque τ tempus totum quo area tota $\delta + \varepsilon$, describi debeat. Si fuerit $\tau = S$ et $\gamma = C$, assumpta plani trajectoriæ positio vera est et accurata. Sin contrà, erit $\tau - S$, error in tempore toto inter observationem primam et tertiam, et $\gamma - C$, error in ratione temporis inter observationem primam et secundam ad tempus inter observationem secundam et tertiam.

(q) * *Jam sit C ad* 1. Iisdem servatis denominationibus quas adhibet Newtonus, instituatur operatio per regulam falsæ positionis. Ad inveniendum errorem ortum ex assumptâ inclinatione plani trajectoriæ ad planum eclipticæ, fiat juxta prædictam regulam, ut differentia errorum $T - \tau$ ad differentiam positionum $T - S$, ità error Q, ad quartam quantitatem, erit hæc ipsa quantitas $\frac{T-S}{T-\tau} \times Q$, error inclinationis plani in toto scilicet tempore inter observationem primam et tertiam. Simili modo dicatur, $G - \gamma : G - C = Q : \frac{G-C}{G-\gamma} \times Q$, erit quantitas $\frac{G-C}{G-\gamma} \times Q$ error ejusdem inclinationis in ratione inter bina trium observationum tempora. Similiter error longitudinis nodi in toto tempore inter observationem primam et tertiam invenitur $\frac{T-S}{T-t} \times P$, error verò in ratione inter bina tempora est $\frac{G-C}{G-g} \times P$. Est itaque vera et correcta inclinatio plani trajectoriæ ad planum eclipticæ $I + \frac{T-S}{T-\tau} \times Q$, sive $I + \frac{G-C}{G-\gamma} \times Q$; et vera longitudo nodi est $K + \frac{T-S}{T-t} \times P$ vel $K + \frac{G-C}{G-g} \times P$. Jam verò quoniam corrigendus est error uterque tam in toto tempore quàm in ratione inter bina tempora, ponamus $\frac{T-S}{T-t} \times P$ et $\frac{G-C}{G-g} \times P$, separatim æquari $m \times P$ hoc est $\frac{T-S}{T-t} = m$ et $\frac{G-C}{G-g} = m$. Ponamus quoque $\frac{T-S}{T-\tau} \times Q$ et $\frac{G-C}{G-\gamma} \times Q = n \times Q$, id est $\frac{T-S}{T-\tau} = n$, et $\frac{G-C}{G-\gamma} = n$. Hinc proveniet $m\,T - m\,t = T - S$ et $m\,G - m\,g = G - C$; item $n\,T - n\,\tau = T - S$, et $n\,G - n\,g = G - C$, undè fit $2\,T - 2\,S = m\,T - m\,t + n\,T - n\,\tau$, et $2\,G - 2\,C = m\,G - m\,g + n\,G - n\,\gamma$. Quarè si tales quærantur numeri m et n, ut sit $2\,G - 2\,C = m\,G - m\,g + n\,G - n\,\gamma$, et $2\,T - 2\,S = m\,T - m\,t + n\,T - n\,\tau$, erit $\frac{T-S}{T-\tau} \times Q$, et $\frac{G-C}{T-\tau} \times Q = n \times Q$. Similiter fiet $\frac{T-S}{T-t} \times P$ et $\frac{G-C}{G-g} \times P = m\,P$, ac proindè error inclinationis plani trajectoriæ erit n Q et error longitudinis nodi m P. Quarè vera inclinatio plani trajectoriæ ad planum eclipticæ erit $I + n\,Q$, et $K + m\,P$ vera longitudo nodi. Hæc omnia patent ex notis in tres operationes præcedentes.

æquale m T — m t + n T — n τ. Et si in operatione primâ I designet inclinationem plani trajectoriæ ad planum eclipticæ et K longitudinem nodi alterutrius, erit I + n Q vera inclinatio plani trajectoriæ ad planum eclipticæ, et K + m P vera longitudo nodi. (r) Ac denique si in operatione primâ, secundâ ac tertiâ, quantitates R, r et ϱ designent latera recta trajectoriæ, et quantitates $\frac{1}{L}$, $\frac{1}{l}$, $\frac{1}{\lambda}$ ejusdem latera transversa respectivè: erit R + m r — m R + n ϱ — n R verum latus rectum, et $\frac{1}{L + m l - m L + n \lambda - n L}$ verum latus transversum trajectoriæ quam cometa describit. (s) Dato autem latere transverso datur etiam tempus periodicum cometæ. Q. e. i.

Cæterùm cometarum revolventium tempora periodica, et orbium latera transversa, haud satis accuratè determinabuntur, nisi per collationem cometarum inter se, qui diversis temporibus apparent. Si plures cometæ, post æqualia temporum intervalla, eundem orbem descripsisse reperiantur, concludendum erit hos omnes esse unum et eundem cometam, in eodem orbe revolventem. (t) Et tum demum ex revolutionum temporibus dabuntur orbium latera transversa, et ex his lateribus determinabuntur orbes elliptici.

In hunc finem computandæ sunt igitur cometarum plurium trajectoriæ, ex hypothesi quod sint parabolicæ. Nam hujusmodi trajectoriæ cum phænomenis semper congruent quamproximè. Id liquet, non tantùm ex trajectoriâ parabolicâ cometæ anni 1680, quàm cum observationibus suprà

(r) * *Ac deniquè.* Nota sint latera recta trium trajectoriarum in operatione primâ, secundâ et tertiâ descriptarum. Designet R, latus rectum primæ trajectoriæ, r secundæ, ϱ tertiæ, et trajectoriæ quam cometa describit desideretur verum latus rectum; per regulam falsæ positionis eâdem planè methodo quam modò adhibuimus poterit inveniri. Ut obtineatur vera longitudo nodi, additur ejus longitudini in primo plano excessus longitudinis assumptæ in plano secundo suprà præcedentem ductus in m, et ut habeatur vera inclinatio plani trajectoriæ ad planum eclipticæ, additur inclinationi plani primi, excessus inclinationis assumptæ in plano tertio suprà inclinationem præcedentem ductus in n. Sed trajectoria cometæ ejusque latus rectum corrigi debent tum ob correctam longitudinem nodi, tum ob correctam inclinationem plani ad planum eclipticæ, quare lateri recto trajectoriæ in primo plano descriptæ sivè ipsi R, addi debet m r—m R, excessus scilicet lateris recti in plano secundo suprà latus rectum in plano primo ductus in m. Addere insuper oportet n ϱ — n R, qui est excessus lateris recti in plano tertio suprà latus rectum in primo ductus in n, ideóque erit R + m r — m R + n ϱ — n R, verum latus rectum. Simili modo patet datis lateribus transversis in operatione primâ, secundâ et tertiâ respectivè $\frac{1}{L}$, $\frac{1}{l}$, $\frac{1}{\lambda}$, esse verum latus transversum trajectoriæ $\frac{1}{L + m l - m L + n \lambda - n L}$.

(s) 172. * *Dato autem latere transverso.* Accuratè descriptâ cometæ trajectoriâ (per methodos præced.) si deprehendatur ellipsim Solis centro tanquam umbilico descriptam, non verò parabolam per determinata trajectoriæ puncta transire, cometa in orbem redibit et dato latere transverso trajectoriæ hujus, dabitur tempus periodicum; erit scilicet, quadratum temporis periodici cometæ ad quadratum temporis periodici Telluris circà Solem ut cubus majoris axis orbitæ cometicæ ad cubum majoris axis orbitæ terrestris (160).

(t) * *Et tum demum* (160).

contuli; sed etiam ex eâ cometæ illius insignis, qui annis 1664 et 1665 apparuit, et ab Hevelio observatus fuit. Is ex observationibus suis longitudines et latitudines hujus cometæ computavit, sed minùs accuratè. Ex iisdem observationibus Halleius noster (u) loca cometæ hujus denuò computavit, et tum demum ex locis sic inventis trajectoriam cometæ determinavit. Invenit autem ejus nodum ascendentem in ♊ $21^{gr}. 13'. 55''.$, inclinationem orbitæ ad planum eclipticæ $21^{gr}. 18'. 40''.$ distantiam perihelii a nodo in orbitâ $49^{gr}. 27'. 30''.$ Perihelium in ♌ $8^{gr}. 40'. 30''.$ cum latitudine austrinâ heliocentricâ $16^{gr}. 1'. 45''.$ Cometam in perihelio Novemb. $24^{d}. 11^{h}. 52'.$ p. m. tempore æquato Londini, vel $13^{h}. 8'.$ Gedani, stylo veteri, et latus rectum parabolæ 410286, existente mediocri Terræ a Sole distantiâ 100000. Quàm probè loca cometæ in hoc orbe computata congruunt cum observationibus, patebit ex tabulâ sequente ab Halleio supputatâ.

(u) * *Loca cometæ hujus denuò computavit.* Varias computi hujus ineundi methodos suprà tradidimus.

Temp. appar. Gedani, st. vet.	Observatæ cometæ distantiæ.	gr. ′ ″	Loca observata.	gr. ′ ″	Loca computata in orbe.	gr. ′ ″
Decemb. 3d. 18h. 29½	a Corde Leonis a Spica Virginis	46. 24. 20 22. 52. 10	Long. ♎ Lat. aust.	7. 1. 0 21. 39. 0	♎	7. 1. 29 21. 38. 50
4. 18. 1½	a Corde Leonis a Spica Virginis	46. 2. 45 23. 52. 40	Long. ♎ Lat. aust.	10. 15. 0 22. 24. 0	♎	10. 16. 5 22. 24. 0
7. 17. 48	a Corde Leonis a Spica Virginis	44. 48. 0 27. 56. 40	Long. ♎ Lat. aust.	3. 0. 0 25. 22. 0	♎	3. 7. 33 25. 21. 40
17. 14. 43	a Corde Leonis ab Hum. Orionis dext.	53. 15. 15 45. 43. 30	Long. ♌ Lat. aust.	2. 56. 0 49. 25. 0	♌	2. 56. 0 49. 25. 0
19. 9. 25	a Procyone a Lucid. Mandib. Ceti	35. 13. 50 52. 56. 0	Long. ♊ Lat. aust.	28. 40. 30 45. 48. 0	♊	28. 43. 0 45. 46. 0
20. 9. 53½	a Procyone a Lucid. Mandib. Ceti	40. 49. 0 40. 4. 0	Long. ♊ Lat. aust.	13. 3. 0 39. 54. 0	♊	13. 5. 0 39. 53. 0
21. 9. 9½	ab Hum. dext. Orionis a Lucid. Mandib. Ceti	26. 21. 25 29. 28. 0	Long. ♊ Lat. aust.	2. 16. 0 33. 41. 0	♊	2. 18. 30 33. 39. 40
22. 9. 0	ab Hum. dext. Orionis a Lucid. Mandib. Ceti	29. 47. 0 20. 29. 30	Long. ♉ Lat. aust.	24. 24. 0 27. 45. 0	♉	24. 27. 0 27. 46. 0
26. 7. 58	a Lucida Arietis ab Aldebaran	23. 20. 0 26. 44. 0	Long. ♉ Lat. aust.	9. 0. 0 12. 36. 0	♉	9. 2. 28 12. 34. 13
27. 6. 45	a Lucida Arietis ab Aldebaran	20. 45. 0 28. 10. 0	Long. ♉ Lat. aust.	7. 5. 40 10. 23. 0	♉	7. 8. 45 10. 23. 13
28. 7. 39	a Lucida Arietis a Palilicio	18. 29. 0 29. 37. 0	Long. ♉ Lat. aust.	5. 24. 45 8. 22. 50	♉	5. 27. 12 8. 23. 37
31. 6. 45	a Cing. Androm. a Palilicio	30. 48. 10 32. 53. 30	Long. ♉ Lat. aust.	2. 7. 40 4. 13. 0	♉	2. 8. 20 4. 16. 25
Jan. 1665. 7. 7. 37½	a Cing. Androm. a Palilicio	25. 11. 0 37. 12. 25	Long. ♈ Lat. bor.	28. 24. 47 0. 54. 0	♈	28. 24. 0 0. 53. 0
13. 7. 0	a Capite Androm. a Palilicio	28. 7. 10 38. 55. 20	Long. ♈ Lat. bor.	27. 6. 54 3. 6. 50	♈	27. 6. 39 3. 7. 40
24. 7. 29	a Cin. Androm. a Palilicio	20. 32. 5 40. 5. 0	Long. ♈ Lat. bor.	26. 29. 15 5. 25. 50	♈	26. 28. 50 5. 26. 0
Feb. 7. 8. 37			Long. ♈ Lat. bor.	27. 24. 46 7. 3. 26	♈	27. 24. 55 7. 3. 15
22. 8. 46			Long. ♈ Lat. bor.	28. 29. 46 8. 12. 36	♈	28. 29. 58 8. 10. 25
Mart. 1. 8. 16			Long. ♈ Lat. bor.	29. 18. 15 8. 36. 26	♈	29. 18. 20 8. 36. 12
7. 8. 37			Long. ♈ Lat. bor.	0. 2. 48 8. 56. 30	♉	0. 2. 42 8. 56. 56

Mense Februario anni ineuntis 1665, stella prima Arietis quam in sequentibus vocabo γ, erat in ♈ 28gr. 30′. 15″. cum latitudine boreali

7^{gr}. 8′. 58″. secunda Arietis erat iu ♈ 29^{gr}. 17′. 18″. cum latitudine boreali 8^{gr}. 28′. 16″. et stella quædam alia septimæ magnitudinis, quam vocabo A, erat in ♈ 28^{gr}. 24′. 45″. cum latitudine boreali 8^{gr}. 28′. 33″. Cometa verò Feb. 7^{d}. 7′. 30″. Parisiis (id est Feb. 7^{d}. 8′. 37″. Gedani) st. vet. triangulum constituebat cum stellis illis γ et A rectangulum ad γ. Et distantia cometæ a stella γ æqualis erat distantiæ stellarum γ et A, id est 1^{gr}. 19′. 46″. in circulo magno, atque ideò ea erat 1^{gr}. 20′. 26″. in parallelo latitudinis stellæ γ. Quare si de longitudine stellæ γ detrahatur longitudo 1^{gr}. 20′. 26″. manebit longitudo cometæ ♈ 27^{gr}. 9′. 49″. Auzoutius ex hâc suâ observatione cometam posuit in ♈ 27^{gr}. 0′. circiter. Et ex schemate, quo Hookius motum ejus delineavit, is jam erat in ♈ 26^{gr}. 59′. 24″. Ratione mediocri posui eundem in ♈ 27^{gr}. 4′. 46″. Ex eâdem observatione Auzoutius latitudinem cometæ jam posuit 7^{gr}. et 4′. vel 5′. boream versus. Eandem rectius posuisset 7^{gr}. 3′. 29″. existente scilicet differentiâ latitudinum cometæ et stellæ γ æquali differentiæ longitudinum stellarum γ et A.

Feb. 22^{d}. 7^{h}. 30′. Londini, id est Feb. 22^{d}. 8^{h}. 46′. Gedani, distantia cometæ a stella A, juxta observationem Hookii a seipso in schemate delineatam, ut et juxta observationes Auzoutii a Petito in schemate delineatas, erat pars quinta distantiæ inter stellam A et primam Arietis, seu 15′. 57″. Et distantia cometæ a linea jungente stellam A et primam Arietis erat pars quarta ejusdem partis quintæ, id est 4′. Ideóque cometa erat in ♈ 8^{gr}. 29′. 46″. cum lat. bor. 8^{gr}. 12′. 36″.

Mart. 1^{d}. 7^{h}. 0′. Londini, id est Mart. 1^{d}. 8^{h}. 16′. Gedani, cometa observatus fuit prope secundam Arietis, existente distantiâ inter eosdem ad distantiam inter primam et secundam Arietis, hoc est ad 1^{gr}. 33′. ut 4 ad 45 secundum Hookium, vel ut 2 ad 23 secundum Gottignies. Unde distantia cometæ a secundâ Arietis erat 8′. 16″. secundum Hookium, vel 8′. 5″. secundum Gottignies, vel ratione mediocri 8′. 10″. Cometa verò secundum Gottignies jam modo prætergressus fuerat secundam Arietis quasi spatio quartæ vel quintæ partis itineris uno die confecti, id est 1′. 35″. circiter (quocum satis consentit Auzoutius) vel paulo minorem secundum Hookium, puta 1′. Quare si ad longitudinem primæ Arietis addatur 1′. et ad latitudinem ejus 8′. 10″. habebitur longitudo cometæ ♈ 29^{gr}. 18′. et latitudo borealis 8^{gr}. 36′. 26″.

Mart. 7^{d}. 7^{h}. 30′. Parisiis (id est Mart. 7^{d}. 8^{h}. 37′. Gedani) ex observationibus Auzoutii distantiâ cometæ a secundâ Arietis æqualis erat distantiæ secundæ Arietis a stellâ A, id est 52′. 29″. Et differentia longitudinum cometæ et secundæ Arietis erat 45′. vel 46′, vel ratione mediocri 45′. 30″. ideóque

cometa erat in ♉ $0^{gr}. 2'. 48''$. Ex schemate observationum Auzoutii, quod Petitus construxit, Hevelius deduxit latitudinem cometæ $8^{gr}. 54'$. Sed sculptor viam cometæ sub finem motus ejus irregulariter incurvavit, et Hevelius in schemate observationum Auzoutii a se constructo incurvationem irregularem correxit, et sic latitudinem cometæ fecit esse $8^{gr}. 55'. 30''$. Et irregularitatem paulo magis corrigendo, latitudo evadere potest $8^{gr}. 56'$. vel $8^{gr}. 57'$.

Visus etiam fuit hic cometa Martii die 9, et tunc locari debuit in ♉ $0^{gr}. 18'$. cum lat. bor. $9^{gr}. 3\frac{1}{2}'$ circiter.

Apparuit hic cometa menses tres, signaque ferè sex descripsit, et uno die gradus fere viginti confecit. Cursus ejus a circulo maximo plurimum deflexit, in boream incurvatus; et motus ejus sub finem ex retrogrado factus est directus. Et non obstante cursu tam insolito, theoriâ a principio ad finem cum observationibus non minus accuratè congruit, quàm theoriæ planetarum cum eorum observationibus congruere solent, ut inspicienti tabulam patebit. Subducenda tamen sunt minuta duo prima circiter, ubi cometa velocissimus fuit; id quod fiet auferendo duodecim minuta secunda ab angulo inter nodum ascendentem et perihelium, seu constituendo (x) angulum illum $49^{gr}. 27'. 18''$. Cometæ utriusque (et hujus et superioris) parallaxis annua insignis fuit, (y) et indè demonstratur motus annuus Terræ in orbe magno.

Confirmatur etiam theoria per motum cometæ, qui apparuit anno 1683. Hic fuit retrogradus in orbe, cujus planum cum plano eclipticæ angulum ferè rectum continebat. Hujus nodus ascendens (computante Halleio) erat in ♍ $23^{gr}. 23'$.; inclinatio orbitæ ad eclipticam $83^{gr}. 11'$.; perihelium in ♊ $25^{gr}. 29'. 30''$.; distantia perihelia a Sole 56020, existente radio orbis magni 100000, et tempore perihelii Julii $2^{d}. 3^{h}. 50'$. Loca autem cometæ in hoc orbe ab Halleio computata, et cum locis a observatis collata, exhibentur in tabulâ sequente.

(x) **Angulum illum* inter nodum ascendentem et perihelium invenerat Halleius 49°.27'.30''. constituto autem angulo illo 49°. 27'. 18''. computationibusque repetitis, subducta inveniuntur duo minuta prima circiter, ut oportet, et theoriâ a principio ad finem cum observationibus congruit. Corrigendam esse theoriam duobus minutis primis circiter ex observatione cometæ, ubi motus ejus velocissimus fuit, colligitur.

(y) * *Et indè demonstratur.* † Quâ ratione annua cometarum parallaxis cum Telluris quiete conciliari possit, legatur apud Ricciolium in Almagesto, Tacquetum in Astronomiâ, aliosque passim, ubi de planetarum retrogradationibus agunt.

1683. Temp. Æquat.	Locus Solis	Cometæ Long. Comp.	Lat. Bor. Comp.	Cometæ Long. Obs.	Lat. Bor. Observ.	Differ. Long.	Differ. Lat.
d. h. ′	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	′ ″	′ ″
Jul. 13. 12. 55	♌ 1. 2.30	♋ 13. 5. 42	29. 28. 13	♋ 13. 6. 42	29. 28. 20	+ 1. 0	+ 0. 7
15. 11. 15	2. 5.12	11. 37. 4	29. 34. 0	11. 39. 43	29. 34. 50	+ 1. 55	+ 0. 50
17. 10. 20	4.45.45	10. 7. 6	29. 33. 30	10. 8. 40	29. 34. 0	+ 1. 34	+ 0. 30
23. 13. 40	10.38.21	5. 10. 27	28. 51. 42	5. 11. 30	28. 50. 28	+ 1. 3	— 1. 14
25. 14. 5	12.35.28	3. 27. 53	24. 24. 47	3. 27. 0	28. 23. 40	— 0. 53	— 1. 7
31. 9. 42	18. 9.22	♊ 27. 55. 3	26. 22. 52	♊ 27. 54. 24	26. 22. 25	— 0. 39	— 0. 27
31. 14. 55	18.21.53	27. 41. 7	26. 16. 57	27. 41. 8	26. 14. 50	+ 0. 1	— 2. 7
Aug. 2. 14. 56	20.17.16	25. 29. 32	25. 16. 19	25. 28. 46	25. 17. 28	— 0. 46	+ 1. 9
4. 10. 49	22. 2.50	23. 18. 20	24. 10. 49	23. 16. 55	24. 12. 19	— 1. 25	+ 1. 30
6. 10. 9	23.56.45	20. 42. 23	22. 47. 5	20. 40. 32	22. 49. 5	— 1. 51	+ 2. 0
9. 10. 26	26.50.52	16. 7. 57	20. 6. 37	16. 5. 55	20. 6. 10	— 2. 2	— 0. 27
15. 14. 1	♍ 2.47.13	3. 30. 48	11. 37. 33	3. 26. 18	11. 32. 1	— 4. 30	— 5. 32
16. 15. 10	3.48. 2	0. 43. 7	9. 34. 16	0. 41. 55	9. 34. 13	— 1. 12	— 0. 3
18. 15. 44	5.45.33	♉ 24. 52. 53	5. 11. 15	♉ 24. 49. 5	5. 9. 11	— 3. 48	— 2. 4
			Austr.		Aust.		
22. 14. 44	9.35.49	11. 7. 14	5. 16. 58	11. 7. 12	5. 16. 58	— 0. 2	— 0. 3
23. 15. 52	10.36.48	7. 2. 18	8. 17. 9	7. 1. 17	8. 16. 41	— 1. 1	— 0. 28
26. 16. 2	13.31.10	♈ 24. 45. 31	16. 38. 0	♈ 24. 44. 0	16. 38. 20	— 1. 31	+ 0. 20

Confirmatur etiam theoria per motum cometæ retrogradi, qui apparuit anno 1682. Hujus nodus ascendens (computante Halleio) erat in ♉ 21^{gr}. 16′. 30″. Inclinatio orbitæ ad planum eclipticæ 17^{gr}. 56′. 0″. Perihelium in ♒ 2^{gr}. 52′. 50″. Distantia perihelia a Sole 58328, existente radio orbis magni 100000. Et tempus æquatum perihelii Sept. 4^{d}. 7^{h}. 39′. Loca verò ex observationibus Flamstedii computata, et cum locis per theoriam computatis collata, exhibentur in tabulâ sequente.

1682. Temp. Appar.	Locus Solis	Cometæ Long. Comp.	Lat. Bor. Comp.	Cometæ Loug. Obs.	Lat. Bor. Observ.	Differ. Long.	Differ. Lat.
d. h. ′	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	′ ″	′ ″
Aug. 19.16.38	♍ 7. 0. 7	♌ 18. 14. 28	25.50. 7	♌ 18.14.40	25.49.55	— 0. 12	+ 0. 12
20.15.38	7.55.52	24. 46. 23	26.14.42	24.46 22	26.12.52	+ 0. 1	+ 1. 50
21. 8.21	8.36.14	29. 37. 15	26.20. 3	29.38. 2	26.17.37	— 0. 47	+ 2. 26
22. 8. 8	9.33.55	♍ 6. 29. 53	26. 8.42	♍ 6.30. 3	26. 7.12	— 0. 10	+ 1. 30
29. 8.20	16.22.40	♎ 12. 37. 54	18.37.47	♎ 12.37.49	18.34. 5	+ 0. 5	+ 3. 42
30. 7.45	17.19.41	15. 36. 1	17.26.43	15.35.18	17.27.17	+ 0. 45	— 0. 34
Sept. 1. 7.33	19.16. 9	20. 30. 53	15.13. 0	20.27. 4	15. 9.49	+ 3. 49	+ 3. 11
4. 7.22	22.11.28	25. 42. 0	12.23.48	25.40.58	12.22. 0	+ 1. 2	+ 1. 48
5. 7.32	23.10.29	27. 0. 46	11.33. 8	26.59.24	11.33.51	+ 1. 22	— 0. 43
8. 7.16	26. 5.58	29. 58. 44	9.26.46	29.58.45	9.26.43	— 0. 1	+ 0. 3
9. 7.26	27. 5. 9	♏ 0. 44. 10	8.49.10	♏ 0.44. 4	8.48.25	+ 0. 6	+ 0. 45

Confirmatur etiam theoria per motum retrogradum cometæ, qui apparuit anno 1723. Hujus nodus ascendens (computante D. Bradleo, Astronomiæ apud Oxonienses Professore Saviliano) erat in ♈ 14^{gr}. 16′. Inclinatio orbitæ ad planum eclipticæ 49^{gr}. 59′. Perihelium in ♉ 12^{gr}. 15′. 20″. Distantia perihelia a Sole 998651, existente radio orbis magni 1000000, et tempore æquato perihelii Sept. 16^{d}. 16^{h}. 10′. Loca verò cometæ in

hoc orbe a Bradleo computata, et cum locis a seipso et patruo suo D. Poundio, et a D. Halleio observatis collata exhibentur in tabulâ sequente.

1723. Tempus Æquat.	Comet. Long. Observat.	Lat. Bor. Observat.	Comet. Long. Comput.	Lat. Bor. Comput.	Differ. Long.	Differ. Lat.
d. h. ′	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	″	″
Oct. 9. 8. 5	♒ 7. 22. 15	5. 2 0	♒ 7. 21. 26	5. 2. 47	+ 49	— 47
10. 6. 21	6. 41. 12	7. 44. 13	6. 41. 42	7. 43. 18	— 50	+ 55
12. 7. 22	5. 39. 58	11. 55. 0	5. 40. 19	11. 54. 55	— 21	+ 5
14. 8. 57	4. 59. 49	14. 43. 50	5. 0. 37	14. 44. 1	— 48	— 11
15. 6. 35	4. 47. 41	15. 40. 51	4. 47. 45	15. 40. 55	— 4	— 4
21. 6. 22	4. 2. 32	19. 41. 49	4. 2. 21	10. 42. 3	+ 11	— 14
22. 6. 24	3. 59. 2	20. 8. 12	3. 59. 10	20. 8. 17	— 8	— 5
24. 8. 2	3. 55. 29	20. 55. 18	3. 55. 11	20. 55. 9	+ 18	+ 9
29. 8. 56	3. 56. 17	22. 20. 27	3. 56. 42	22. 20. 10	— 25	+ 7
30. 6. 20	3. 58. 9	22. 32. 28	3. 58. 17	22. 32. 12	— 8	+ 16
Nov. 5. 5. 53	4. 16. 30	23. 38. 33	4. 16. 23	23. 38. 7	+ 7	+ 26
8. 7. 6	4. 29. 36	24. 4. 30	4. 29. 54	24. 4. 40	— 18	— 10
14. 6. 20	5. 2. 16	24. 48. 46	5. 2. 51	24. 48. 6	— 35	+ 30
20. 7. 45	5. 42. 20	25. 24. 45	5. 43. 13	25. 25. 17	— 53	— 32
Dec. 7. 6. 45	8. 4. 13	26. 54. 18	8. 3. 55	26. 53. 42	+ 18	+ 36

His exemplis abundè satis manifestum est, quod motus cometarum per theoriam a nobis expositam non minus accuratè exhibentur, quàm solent motus planetarum per eorum theorias. (z) Et propterea orbes cometarum per hanc theoriam enumerari possunt, et tempus periodicum cometæ in quolibet orbe revolventis tandem sciri, et tum demum orbium ellipticorum latera transversa et apheliorum altitudines innotescent.

Cometa retrogradus, qui apparuit anno 1607, descripsit orbem, cujus nodus ascendens (computante Halleio) erat in ♉ 20gr. 21′.; inclinatio plani orbis ad planum eclipticæ erat 17gr. 2′.; perihelium erat in ♒ 2gr. 16′.; et distantia perihelia a Sole erat 58680, existente radio orbis magni 100000. Et cometa erat in perihelio Octob. 16d. 3h. 50′. Congruit hic orbis quamproximè cum orbe cometæ, qui apparuit anno 1682. Si cometæ hi duo fuerint unus et idem, revolvetur hic cometa spatio annorum 75, (a) et axis major orbis ejus erit ad axem majorem orbis magni, ut $\sqrt{c}$: 75 × 75 ad 1, seu 1778 ad 100 circiter. (b) Et distantia aphelia cometæ hujus a Sole, erit ad distantiam mediocrem Terræ a Sole, ut 35 ad 1 circiter. (c) Quibus cognitis, haud difficile fuerit orbem ellip-

(z) * *Et propterea.* Quomodò hæc omnia fieri possint, variis methodis suprà exposuimus.

(a) * *Et axis major* orbis ejus erit ad axem majorem orbis magni ut radix cubica numeri 75 × 75 ad 1 (172).

(b) * *Et distantia aphelia.* Quoniam distantia perihelia cometæ a Sole erat 58680, existente radio orbis magni 100000 erit eadem distantia perihelia 29, circiter existente radio orbis magni 100, ac proindè distantia aphelia quæ est differentia inter axem majorem orbitæ cometicæ 1778 et distantiam periheliam 29, erit earumdem partium 1749, ideóque distantia aphelia cometæ hujus a Sole erit ad distantiam mediocrem Terræ a Sole ut 1749 ad 29, hoc est, ut 35 ad 1 circiter.

(c) * *Quibus cognitis.* (Per Prop. XX. Lib. I.).

ticum cometæ hujus determinare. Atque hæc ita se habebunt, si cometa, spatio annorum septuaginta quinque, in hoc orbe posthac redierit. Cometæ reliqui majori tempore revolvi videntur et altiùs ascendere.

Cæterum cometæ, ob magnum eorum numerum, et magnam apheliorum a Sole distantiam, et longam moram in apheliis, per gravitates in se mutuo nonnihil turbari debent, et eorum eccentricitates et revolutionum tempora nunc augeri aliquantulum, nunc diminui. Proindè non est expectandum ut cometa idem in eodem orbe, et iisdem temporibus periodicis accuratè redeat. Sufficit si mutationes non majores obvenerint, quàm quæ a causis prædictis oriantur.

Et hinc ratio redditur, ([d]) cur cometæ non comprehendantur zodiaco more planetarum, sed indè migrent et motibus variis in omnes cœlorum regiones ferantur. Scilicet eo fine, ut in apheliis suis, ubi tardissimè

([d]) 173. * *Cur cometæ non comprehendantur zodiaco*. Ex observato sæpè sæpius cometarum cursu retrogrado deduxit Newtonus cometas non comprehendi zodiaco more planetarum, sed indè migrare et motibus variis in omnes cœlorum regiones excurrere. Attamen clariss. Cassinus in Monum. Paris. an. 1731. retrogrados cometarum motus ad directos reduxit. Verùm eo artificio utitur vir doctissimus ut distantiam cometæ a Terrâ vel Sole pro arbitrio assumat, et modò Tellurem inter Solem et cometam, modò cometam inter Solem et Tellurem ac denique Solem inter cometam et Tellurem, pro necessitate, collocet. Quâ ratione id fieri possit non satis intelligitur, nisi ignota omninò fingatur cometarum theoria; concesso enim aliquo cometarum systemate, distantias illas pro lubitu usurpare non licet, sed ex datis motuum elementis, cometarum distantia totaque trajectoria determinantur. Sic Halleius definivit trajectoriam cometæ qui annis 1664. et 1665. apparuit. Ut autem retrogradum hujus cometæ motum ad directum reducat clariss. Cassinus, talem huic cometæ motum tribuit qui cum Halleii computo nequaquam convenit. Quàm probè tamen cum observationibus theoria congruat, ostendit tabula paulò antè exhibita. Quamvis itaque retrogrados cometarum motus ad directos ingeniosâ arte reduxerit Cassinus, non id tamen satis esse arbitramur ut eam rejiciamus cometarum theoriam quæ phænomenis apprimè respondet, atque incerti sine ullâ theoriâ erremus. Præthereà talem orbitam prædicto cometæ assignat Cassinus ut extrà orbem annuum ferè non excurrat; quod si res ità se haberet, hic cometa in conspectum citò rediisset, cometas enim ad maximam quoquè distantiam conspicuos esse constat ex defectu parallaxeos. Nec feliciori successu ad motum directum reduci posse videtur motus retrogradus cometæ an. 1680. Nam præter quàm quod omnem cometarum theoriam fictis ad arbitrium hypothesibus everti necesse sit, in explicatione Cassini gravissima occurrit difficultas cujus vim totam sensit clariss. vir. Oporteret scilicet ut cometa ille paulò ante 27. diem Novembris per nodum descendentem transierit et versus diem 17. Decembris ad nodum ascendentem pervenerit, ideóque cometa breviori quàm unius mensis intervallo, totum spatium quod est infrà planum eclipticæ trajecisset. Porrò tanta velocitas caret verisimilitudine, nec conciliari posse videtur cum observatis longo temporis spatio hujus cometæ motibus; hic enim astronomorum oculis citò sese subduxisset. Singulas explicationes quæ in loco cit. Monum. Paris. leguntur percurrere longiùs foret, satis erit addere eas hoc potissimum fine excogitatas fuisse ut nempe servaretur et a gravissimâ objectione liberaretur vorticum hypothesis. Verùm his explicationibus cæteroquin ingeniosissimis nondum tamen propositus finis obtineri videtur; hanc enim difficultatem effugientes vorticum patroni, in aliam incurrunt. Oporteret siquidem ut cometarum vortices ipsum saltem Telluris vorticem intersecarent, quod sine vorticum perturbatione ac tandem destructione fieri posse non intelligitur. Alias hypotheses finxerunt alii. Quidam cometas habuerunt tanquam planetas non circà Solem nostrum, sed circa alium velut centrum revolventes. Nonnulli eos habuerunt velut satellites planetæ cujusdam primarii in nostro vortice constituti, qui tamen ob maximam illius a nobis distantiam conspici non potest, ità ut cometæ seu satellites sese nobis duntaxat conspicuos præbeant, dum in inferiori et Telluris proximiori orbitarum suarum parte versantur. Sed a Newtonianâ cometarum theoriâ, quæ phænomenis consentanea est, nequaquam nos removere debent hypotheses illæ quæ eam duntaxat ob causam subtiliter inventæ sunt ut servaretur vorticum hypothesis, quam aliis multis difficultatibus premi passim ostendimus. Cæterum quidquid de hâc materiâ diximus, et ipsa, prout nobis visum est, rei veritas et commentatorum officium a nobis postulabant.

moventur, quam longissimè distent ab invicem, et se mutuò quàm minimè trahant. Quâ de causâ cometæ, quia altiùs descendunt, ideóque tardissimè moventur in apheliis, debent altiùs ascendere.

Cometa, qui anno 1680 apparuit, minus distabat a Sole in perihelio suo quàm parte sextâ diametri Solis; et propter summam velocitatem in viciniâ illâ, et densitatem aliquam atmosphæræ Solis, resistentiam nonnullam sentire debuit, et aliquantulum retardari, et propiùs ad Solem accedere: et singulis revolutionibus accedendo ad Solem, incidet is tandem in corpus Solis. Sed et in aphelio ubi tardissimè movetur, aliquando per attractionem aliorum cometarum retardari potest, et subindè in Solem incidere. ([e]) Sic etiam stellæ fixæ, quæ paulatim expirant in lucem et vapores, cometis in ipsas incidentibus refici possunt, et novo alimento accensæ pro stellis novis haberi. Hujus generis sunt stellæ fixæ, quæ subito apparent, et sub initio quàm maximè splendent, et subindè paulatim evanescunt. Talis fuit stella in cathedrâ Cassiopeiæ quam Cornelius Gemma octavo Novembris 1572, lustrando illam cœli partem nocte serenâ minimè vidit; at nocte proximâ (Novemb. 9.) vidit fixis omnibus splendidiorem, et luce suâ vix cedentem Veneri. Hanc Tycho Brahæus vidit undecimo ejusdem mensis ubi maximè splenduit; et ex eo tempore paulatim decrescentem et spatio mensium sexdecim evanescentem observavit. Mense Novembri, ubi primùm apparuit, Venerem luce suâ æquabat. Mense Decembri nonnihil diminuta Jovem æquare videbatur. Anno

([e]) 174. * *Sic etiam stellæ fixæ.* De stellarum variationibus nonnulla hic afferemus quæ habet clariss. D. de Maupertuis in eximio Opusculo de Figuris Astrorum et in Mon. Paris. an. 1734. Fixas, quæ sunt totidem Soles, variis donatas esse figuris et ex iis aliquas ad figuram planam vel planitiem accedere non repugnat. Nam a sphæroide propemodum sphærico per innumeros gradus depressionis versus polos tandem devenitur ad planum circulare, si continuò varietur ratio vis centrifugæ ad gravitatem, ut patet ex num. 56. His positis, ratio reddi poterit cur fixæ quædam nunc appareant, nunc evanescant, cur mutetur apparens stellarum quarumdam magnitudo, nec non etiam cur stellæ aliquæ quasi recens accensæ oriri visæ sint, quædam verò quasi extinctæ videri desierint. Si in stellarum numero reperiantur aliquæ ad figuram planam accedentes, illæ dum faciem suam nobis obvertunt, sphærarum instar apparebunt. Si autem respectu nostri situm suum mutent, magis vel minus stellarum illarum splendor decrescet, prout hoc vel illo modo sese nobis ostendent, ac tandem exiguæ crassitiei latus exhibeant et satis longè a nobis distent, conspectui nostro sese omninò subducent. Quomodò autem fixæ respectu nostri positionem suam mutent, explicari potest, si ponamus circà stellam compressam revolvere planetam aliquam ingentis molis aut cometam in orbitâ valde excentricâ et ad æquatorem stellæ inclinatâ; in hâc enim hypothesi, planeta ad perihelium suum accedens juxtà attractionis leges inclinationem fixæ planæ perturbabit, et hinc fieri poterit ut partem lucidam disci nobis obversam conspiciamus, quæ ob exiguam lateris compressi crassitiem oculos nostros anteà effugiebat. Ex his quoque intelligitur fieri posse ut circà planetam congregetur annulus Saturni annulo similis, si nempe cometa cujus cauda ex vaporibus tenuissimis æstu Solis in perihelio elevatis componitur, ad planetam aliquem maximè potentem proximè accederet. Hic enim vaporum torrens attractionis vi ad revolvendum circà planetam annuli instar posset detorqueri; imò impossibile non foret ipsum quoquè corpus cometæ circà planetam rapi et sic planeta satellitem acquireret. Haberet autem planeta satellitem sine annulo, si cometa destitueretur caudâ, sed adjicietur etiam annulus, si cometa caudam habuerit, atquè annulus aderit sine satellite, si cauda duntaxat a planetâ attrahatur. Hæc sunt quæ ad hunc Newtoni locum præcipuè referuntur; cæterum in laudatis opusculis elegantissima sunt Problemata quæ consulat lector.

1573, mense Januario minor erat Jove et major Sirio, cui in fine Februarii et Martii initio evasit æqualis. Mense Aprili et Maio stellis secundæ magnitudinis, Junio, Julio et Augusto stellis tertiæ magnitudinis, Septembri, Octobri et Novembri stellis quartæ, Decembri et anni 1574 mense Januario stellis quintæ, et mense Februario stellis sextæ magnitudinis æqualis videbatur, et mense Martio ex oculis evanuit. Color illi ab initio clarus, albicans ac splendidus, postea flavus, et anni 1573 mense Martio rutilans instar Martis aut stellæ Aldebaran, Maio autem altitudinem sublividam induxit, qualem in Saturno cernimus, quem colorem usque in finem servavit, semper tamen obscurior facta. Talis etiam fuit stella in dextro pede Serpentarii, quam Kepleri discipuli anno 1604, die 30 Septembris st. vet. apparere cœpisse observarunt, et luce suâ stellam Jovis superasse, cùm nocte præcedente minimè apparuisset. Ab eo verò tempore paulatim decrevit, et spatio mensium quindecim vel sexdecim ex oculis evanuit. Tali etiam stellâ novâ supra modum splendente Hipparchus ad fixas observandas et in catalogum referendas excitatus fuisse dicitur. Sed fixæ, quæ per vices apparent et evanescunt, quæque paulatim crescunt, et luce suâ fixas tertiæ magnitudinis vix unquam superant, videntur esse generis alterius, et revolvendo partem lucidam et partem obscuram per vices ostendere. Vapores autem, qui ex Sole et stellis fixis et caudis cometarum oriuntur, incidere possunt per gravitatem suam in atmosphæras planetarum et ibi condensari et converti in aquam et spiritus humidos, et subindè per lentum calorem in sales, et sulphura, et tincturas, et limum, et lutum, et argillam, et arenam, et lapides, et coralla, et substantias alias terrestres paulatim migrare.

SCHOLIUM GENERALE.

(f) Hypothesis vorticum multis premitur difficultatibus. Ut planeta unusquisque radio ad Solem ducto areas describat tempori proportionales, tempora periodica partium vorticis deberent esse in duplicatâ ratione distantiarum a Sole. Ut periodica planetarum tempora sint in proportione sesquiplicatâ distantiarum a Sole, tempora periodica partium vorticis deberent esse in sesquiplicatâ distantiarum proportione. Ut vortices minores circum Saturnum, Jovem et alios planetas gyrati conserventur et tranquillè natent in vortice Solis, tempora periodica partium vorticis solaris deberent esse æqualia. Revolutiones Solis et planetarum

(f) * *Hypothesis vorticum.* (Prop. LII. Lib. II. cum Coroll. Schol. Prop. XL. Lib. II. et not. 175. Lib. huj.).

circum axes suos, quæ cum motibus vorticum congruere deberent, ab omnibus hisce proportionibus discrepant. Motus cometarum sunt summè regulares, et easdem leges cum planetarum motibus observant, et per vortices explicari nequeunt. Feruntur cometæ motibus valdè eccentricis in omnes cœlorum partes, quod fieri non potest, nisi vortices tollantur.

Projectilia, in aëre nostro, solam aëris resistentiam sentiunt. Sublato aëre, ut fit in vacuo Boyliano, resistentia cessat, siquidem pluma tenuis et aurum solidum æquali cum velocitate in hoc vacuo cadunt. Et par est ratio spatiorum cœlestium, quæ sunt suprà atmosphæram Terræ. Corpora omnia in istis spatiis liberrimè moveri debent; et propterea planetæ et cometæ in orbibus specie et positione datis secundum leges suprà expositas perpetuò revolvi. Perseverabunt quidem in orbibus suis per leges gravitatis, sed regularem orbium situm primitùs acquirere per leges hasce minimè potuerunt.

Planetæ sex principales revolvuntur circum Solem in circulis Soli concentricis, eâdem motûs directione, in eodem plano quamproximè. Lunæ decem revolvuntur circum Terram, Jovem et Saturnum in circulis concentricis, eâdem motûs directione, in planis orbium planetarum quamproximè. (g) Et hi omnes motus regulares originem non habent ex causis mechanicis; siquidem cometæ in orbibus valde eccentricis, et in omnes cœlorum partes liberè feruntur. Quo motûs genere cometæ per orbes planetarum celerrimè et facillimè transeunt, et in apheliis suis ubi tardiores sunt et diutiùs morantur, quàm longissimè distant ab invicem, ut se mutuò quàm minimè trahant. Elegantissima hæcce Solis, planetarum et cometarum compages non nisi consilio et dominio entis intelligentis et potentis oriri potuit. Et si stellæ fixæ sint centra similium systematum, hæc omnia simili consilio constructa suberunt *Unius* dominio: præsertim cùm lux fixarum sit ejusdem naturæ ac lux Solis, et systemata omnia lucem in omnia invicem immittant. Et ne fixarum systemata per gravitatem suam in se mutuò cadant, hic eadem immensam ab invicem distantiam posuerit.

(g) * *Et hi omnes motus regulares.* Celeberrimi viri Joannes et Daniel Bernoullius, prior in Physicâ Cœlesti, posterior in Disquisitionibus Pysico-astronomicis mechanicam horumce motuum causam ex vorticibus repetunt. Sed cùm mechanicæ explicationes illæ omnibus obnoxiæ sint difficultatibus quibus vorticum hypothesim premi jam ostendimus, huic rei diutiùs non immorabimur. Satis erit describere verba quæ habet Joan. Bernoullius mentionem faciens de hoc ipso Newtoni loco. (Si causæ illæ non sunt mechanicæ, erunt præternaturales et miraculo tribuendæ; sed magnum philosophum non decet ad miraculum recurrere, ubi alicujus phænomeni quæritur explicatio.) Numquid pari jure Cartesianum philosophum possumus interrogare quânam causâ mechanicâ vortices secundum varias directiones ferantur, cur planetarum circumsolarium vortices ab occidente in orientem moveantur? ubi phænomenon aliquod ad primam causam deductum est, hic hærere causamque mechanicam ulteriùs non quærere, magnum philosophum non dedecet.

Hic omnia regit non ut anima mundi, sed ut universorum dominus. Et propter dominium suum, dominus deus (*) Παντοκράτωρ dici solet. Nam deus est vox relativa et ad servos refertur: et deitas est dominatio dei, non in corpus proprium, uti sentiunt quibus deus est anima mundi, sed in servos. Deus summus est ens æternum, infinitum, absolutè perfectum: sed ens utcunque perfectum sine dominio non est dominus deus. Dicimus enim deus meus, deus vester, deus Israëlis, deus deorum, et dominus dominorum: sed non dicimus æternus meus, æternus vester, æternus Israëlis, æternus deorum; non dicimus infinitus meus, vel perfectus meus. Hæ appellationes relationem non habent ad servos. Vox deus passim (†) significat dominum: sed omnis dominus non est deus. Dominatio entis spiritualis deum constituit, vera verum, summa summum, ficta fictum. Et ex dominatione verâ sequitur deum verum esse vivum, intelligentem et potentem; ex reliquis perfectionibus summum esse, vel summè perfectum. Æternus est et infinitus, omnipotens et omnisciens, id est, durat ab æterno in æternum, et adest ab infinito in infinitum: omnia regit, et omnia cognoscit, quæ fiunt aut fieri possunt. Non est æternitas et infinitas, sed æternus et infinitus; non est duratio et spatium, sed durat et adest. Durat semper, et adest ubique, et existendo semper et ubique, durationem et spatium constituit. Cùm unaquæque spatii particula sit *semper*, et unumquodque durationis indivisibile momentum *ubique*, certè rerum omnium fabricator ac dominus non erit *nunquam*, *nusquam*. Omnis anima sentiens diversis temporibus, et in diversis sensuum, et motuum organis eadem est persona indivisibilis. Partes dantur successivæ in duratione, co-existentes in spatio, neutræ in persona hominis seu principio ejus cogitante; et multò minùs in substantiâ cogitante dei. Omnis homo, quatenus res sentiens, est unus et idem homo durante vitâ suâ in omnibus et singulis sensuum organis. Deus est unus et idem deus semper et ubique. Omnipræsens est non per *virtutem* solam, sed etiam per *substantiam*: nam virtus sine substantiâ subsistere non potest. In ipso (‡) continentur et moventur universa, sed sine mutuâ passione. Deus

(*) Id est imperator universalis.

(†) Pocokius noster vocem *dei* deducit a voce Arabicâ *du*, (et in casu aliquo *di*,) quæ dominum significat. Et hoc sensu principes vocantur *dii*, Psal. LXXXIV. 6. et Joan. X. 45. Et Moses dicitur *deus* fratris Aaron, et *deus* regis Pharaoh (Exod. IV. 16. et VII. 1.). Et eodem sensu animæ principum mortuorum olim a gentibus vocabantur dii, sed falso propter defectum dominii. (Nota Autoris.)

(‡) Ita sentiebant veteres, ut Pythagoras apud Ciceronem, de Naturâ Deorum, Lib. I. Thales, Anaxagoras, Virgilius, Georgic. Lib. IV. v. 220. et Æneid. Lib. VI. v. 721. Philo Allegor. Lib. I. sub initio. Aratus in Phænom. sub initio. Ita etiam scriptores sacri, ut Paulus in Act. XVII. 27. 28. Johannes in Evang. XIV. 2. Moses in Deut. IV. 39. et X. 4. David Psal. CXXXIX. 7. 8. 9. Salomon 1 Reg. VIII. 27. Job. XXII. 12. 13. 14. Jeremias XXIII. 23. 24. Fingebant autem idololatræ Solem, Lunam, et astra, animas hominum et alias mundi partes esse partes Dei summi, et ideò colendas, sed falsò. (Nota Auctoris.)

nihil patitur ex corporum motibus: illa nullam sentiunt resistentiam ex omnipræsentiâ dei. Deum summum necessariò existere in confesso est: et eâdem necessitate *semper* est et *ubique*. Unde etiam totus est sui similis, totus oculus, totus auris, totus cerebrum, totus brachium, totus vis sentiendi, intelligendi, et agendi, sed more minimè humano, more minimè corporeo, more nobis prorsus incognito. Ut cæcus non habet ideam colorum, sic nos ideam non habemus modorum, quibus deus sapientissimus sentit et intelligit omnia. Corpore omni et figurâ corporeâ prorsus destituitur, ideóque videri non potest, nec audiri, nec tangi, nec sub specie rei alicujus corporeæ coli debet. Ideas habemus attributorum ejus, sed quid sit rei alicujus substantia minimè cognoscimus. Videmus tantùm corporum figuras et colores, audimus tantùm sonos, tangimus tantùm superficies externas, olfacimus odores solos, et gustamus sapores: intimas substantias nullo sensu, nullâ actione reflexâ cognoscimus; et multò minùs ideam habemus substantiæ dei. Hunc cognoscimus solummodo per proprietates ejus et attributa, et per sapientissimas et optimas rerum structuras et causas finales, et admiramur ob perfectiones; veneramur autem et colimus ob dominium. Colimus enim ut servi, et deus sine dominio, providentiâ, et causis finalibus nihil aliud est quàm fatum et natura. A cæcâ necessitate metaphysicâ, quæ utique eadem est semper et ubique, nulla oritur rerum variatio. Tota rerum conditarum pro locis ac temporibus diversitas, ab ideis, et voluntate entis necessariò existentis solummodo oriri potuit. Dicitur autem deus per allegoriam videre, audire, loqui, ridere, amare, odio habere, cupere, dare, accipere, gaudere, irasci, pugnare, fabricare, condere, construere. Nam sermo omnis de deo a rebus humanis per similitudinem aliquam desumitur, non perfectam quidem, sed aliqualem tamen. Et hæc de Deo, de quo utique ex phænomenis disserere, ad philosophiam naturalem pertinet.

Hactenus phænomena cœlorum et maris nostri per vim gravitatis exposui, sed causam gravitatis nondum assignavi. Oritur utique hæc vis a causâ aliquâ, quæ penetrat ad usque centra Solis et planetarum, sine virtutis diminutione; quæque agit non pro quantitate *superficierum* particularum, in quas agit (ut solent causæ mechanicæ) sed pro quantitate materiæ *solidæ*; et cujus actio in immensas distantias undique extenditur, decrescendo semper in duplicatâ ratione distantiarum. Gravitas in Solem componitur ex gravitatibus in singulas Solis particulas, et recedendo a Sole decrescit accuratè in duplicatâ ratione distantiarum ad

usque orbem Saturni, (h) ut ex quiete apheliorum planetarum manifestum est, et ad usque ultima cometarum aphelia, si modò aphelia illa quiescant. Rationem verò harum gravitatis proprietatum ex phænomenis nondum potui deducere, et hypotheses non fingo. Quicquid enim ex phænomenis non deducitur, *hypothesis* vocanda est; et hypotheses seu metaphysicæ, seu physicæ, seu qualitatum occultarum, seu mechanicæ, in *philosophiâ experimentali* locum non habent. In hâc philosophiâ Propositiones deducuntur ex phænomenis, et redduntur generales per inductionem. Sic impenetrabilitas, mobilitas, et impetus corporum et leges motuum et gravitatis innotuerunt. Et satis est quod gravitas reverà existat, et agat secundum leges a nobis expositas, et ad corporum cœlestium et maris nostri motus omnes sufficiat.

Adjicere jam liceret nonnulla de spiritu quodam subtilissimo corpora crassa pervadente, et in iisdem latente; cujus vi et actionibus particulæ corporum ad minimas distantias se mutuò attrahunt, et contiguæ factæ cohærent: et corpora electrica agunt ad distantias majores, tam repellendo quàm attrahendo corpuscula vicina; et lux emittitur, reflectitur, refringitur, inflectitur, et corpora calefacit; et sensatio omnis excitatur, et membra animalium ad voluntatem moventur, vibrationibus scilicet hujus spiritus per solida nervorum capillamenta ab externis sensuum organis ad cerebrum et a cerebro in musculos propagatis. (i) Sed hæc paucis exponi non possunt; neque adest sufficiens copia experimentorum, quibus leges actionum hujus spiritus accuratè determinari et monstrari debent.

(h) * *Ut ex quiete apheliorum.* Prop. II. Lib. huj.)

(i) * *Sed hæc paucis exponi non possunt.* De hoc subtilissimo spiritu plurimas quæstiones sibi proponit Newtonus in Tractatu Opticæ.

INDEX PROPOSITIONUM

IN

VOLUMINIS II. PARTE I.

INDEX PROPOSITIONUM

IN

VOLUMINIS II. PARTE II.

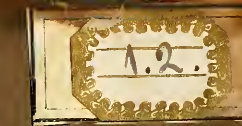
FINIS.

GLASGUÆ:
EXCUDIT GEORGIUS BROOKMAN.

Date Due

10/26/64 JA 30 '65			


BOSTON COLLEGE
3 9031 01528483 9


1.2.



